ソフトウェア基礎論　２５－６
（1988. 5. 26）

連続動作代数と項書換え系の意味論への応用

Continuous Behaviroul Algebra and its Applications to the Semantics of Term Rewriting Systems

直井 徹　稲垣 康善
Tohru NAOI and Yasuyoshi INAGAKI

名古屋大学 工学部 電気系教室
Faculty of Enginnering, Nagoya University

あらまし　本論文では，ADJ による連続代数の概念を通して，項書換え系に動作意味論を与えるための基礎的な結果を導く．このためにまず，「動作」の概念を項（有限木）集合上の合同関係として定式化する．ここで著者らの提案する無矛盾性，完全性などを仮定すると「動作」合同関係から無限木の集合上に連続な商代数を定めることができ，この商代数について，それが二つの連続代数のクラスにおいてそれぞれ始代数と終代数である等の性質を導くことができる．この商代数を連続動作代数という．以上の結果の応用例として，項書換え系の二つのクラスを取り上げ，それらのクラスにおいて書換えを通じて連続動作代数が導かれることを示す．

Abstracts: The authors give a general framework for behavioral semantics of term rewriting systems through the notion of continuous algebra proposed by ADJ. They formalize behavior as a preorder on the set of terms and show that, under some criteria, the behavior induces a quotient continuous algebra over infinite trees. They also show that the algebra is free (initial) in the class of continuous algebras such that the behavior is valid over them and final in the class of continuous quotient algebras induced by weaker preorders than the behavior. They give two classes of term rewriting systems such that the above results can be applied.

１．はじめに

項書換え系やλ計算などの，項の簡約に基づく計算体系に対し古典的な動作意味論を定式化しようとすれば，項 t の意味は文脈 s[ ] と代入 σ を s[σ(t)] の正規形（それ以上簡約化できない項）に写す写像とするのが自然である(10, 12, 13)．この場合，直観的には，t は(サブ)プログラムであり，s[ ] はメインプログラム，σ は t への引数を表わし，また，正規形はプログラム全体を評価した結果に相当する．一般にはすべての項が正規形をもつとは限らないので，上述の写像は部分的である．この定式化は，計算が停止した後にのみ，その結果を得ることができるという前提，すなわち，A.Church の立場に基づいたものである．

これに対して，D.Scott の立場にたてば，計算の結果は，実行の各段階に得られる中間結果の集積したものとして捉えられ，実行の停止，非停止は第二義的なものとなる(1-6, 9-12)．このような発想を代数的な枠組みにおいて形式化したものが，本論文で提案する連続動作代数である．

本論文では，まず，計算結果の集合を項集合の任意の部分集合とし，それぞれの項から中間結果を抽出する手段を項集合上の適当な前順序（preorder）とする一般的な設定の下で，「動作」の概念を定式化する．このとき，本論文で提案する完全性，無矛盾性などの条件を仮定すると，前順序と計算結果の集合は自然に無限木集合上に拡張され，これによって無限木集合上に定まる商代

数は連続代数[1](完備代数) であることを示せる．この商代数を連続動作代数と呼ぶ．さらに，連続動作代数は，二つの代数のクラスにおいてそれぞれ始代数と終代数であり，また，ある種の外延性が成り立つ等，強い性質をもつことが導かれる．

この結果は，項書換え系やλ計算など，項の簡約に基づく計算体系に対して，意味の領域を連続代数とするような動作意味論を与えるためにひろく適用可能であり，著者らが以前提案した無あいまい線形項書換え系の代数的意味論[9-11]，あるいは，Courcelle[3] が示した単調な項書換え系に基づく連続代数の構成法がその例となっている．また，J.-J. Lévy [6] による λ計算の代数的モデルも，定式化を若干修正すれば，連続動作代数の一例とみなされるであろう．

２．準備

２．１　完備順序と連続関数

順序集合 $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ において，その部分集合 S が有向であるとは，S が非空で，任意の d_1, $d_2 \in S$ に対し，$d_1 \sqsubseteq d$, $d_2 \sqsubseteq d$ となる $d \in S$ が存在することをいう．完備順序集合とは，最小元をもち，そのすべての有向部分集合 S が上限（$\sqcup S$ で表わす）をもつような順序集合である．以下，$\langle D, \sqsubseteq\rangle$ と $\langle D', \sqsubseteq'\rangle$ を完備順序集合とする．D の要素 d がコンパクトであるとは，$d \sqsubseteq \sqcup S$ である任意の有向集合 S に対し，$d' \in S$ が存在して $d \sqsubseteq d'$ となることをいう．E を D のコンパクトな要素の全体とする．D の任意の要素 d について，$\{e \in E \mid e \sqsubseteq d\}$ が有向でその上限が d に一致するとき，$\langle D, \sqsubseteq\rangle$ は代数的であるといい，E をその基底という．

写像 $\phi: D^n \to D'$ は，$c_1 \sqsubseteq d_1, \ldots, c_n \sqsubseteq d_n$ ならば $\phi(c_1, \ldots, c_n) \sqsubseteq' \phi(d_1, \ldots, d_n)$ であるとき，単調であるという．また，D の有向部分集合 $S_1, \ldots, S_n$ に対し，$\phi(\sqcup S_1, \ldots, \sqcup S_n) = \sqcup \phi(S_1, \ldots, S_n)$ であるとき，ϕ は連続であるという．$\langle D, \sqsubseteq\rangle$ が基底 E をもつ代数的完備順序集合ならば，ϕ が連続であることと次の条件は等価である：$d_1, \ldots, d_n \in D$ に対して，$S_i = \{e \in E \mid e \sqsubseteq d_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ とすると，　$\phi(d_1, \ldots, d_n) = \sqcup \phi(S_1, \ldots, S_n)$．連続写像は単調である．D 上の連続関数 ρ が $\rho \circ \rho = \rho$ をみたすとき，ρ は引き込み(retraction) とよばれる．また，値域 $\rho(D)$ は D のレトラクトとよばれ，ρ の不動点全体と一致する．$\rho(D)$ は D の部分順序集合として完備順序集合をなし，その有向部分集合の $\rho(D)$ における上限は，D における上限に一致する．

［補題 2.1.1］順序集合 $\langle A, \leq_A\rangle$，$\langle B, \leq_B\rangle$ と上への写像 $f: A \to B$ が次を満たすとする．

$$\forall a, a' \in A \quad a \leq_A a' \Leftrightarrow f(a) \leq_B f(a')$$

このとき，(1) $\leq_A$ が完備順序である必要十分条件は $\leq_B$ が完備順序であることである．(2) $\leq_A$, $\leq_B$ が完備順序なら，f とその逆写像は連続である（f が一対一であることに注意する）． □

π を集合 A 上の前順序とするとき，同値関係 $\pi \cap \pi^{-1}$ による商集合と，その上に π から誘導される順序を A/π で表わす．また，$a \in A$ の $\pi \cap \pi^{-1}$ に関する同値類を $[a]_\pi$ で表わす．A から $\langle B, \leq_B\rangle$ への写像 f に対して，Ker(f) とは次のような A 上の前順序である．

$$a \mathrm{Ker}(f)\, a' \Leftrightarrow f(a) \leq_B f(a')$$

２．２　連続代数

F を関数記号の可算集合とする．各関数記号は定められた次数（arity）をもつ．F は特別な定数記号（すなわち，次数 0 の関数記号）Ω を含む．また，X を変数記号の可算集合とし，$F \cap X = \phi$ とする．変数記号の次数は 0 である．

順序 F 代数とは，対 $A = \langle\langle D_A, \sqsubseteq_A\rangle, \langle f_A \mid f \in F\rangle\rangle$ で，$\langle D_A, \sqsubseteq_A\rangle$ が Ω_A を最小元とする順序集合であり，次数 n の関数記号 $f \in F$ に対し，f_A が $D_A{}^n$ から D_A への単調写像であるものをいう．$\langle D_A, \sqsubseteq_A\rangle$ を代数 A の台という．順序 F 代数 A から B への準同型 $\eta: A \to B$ とは，次をみたすような，D_A から D_B への単調写像である：

$f \in F$に対して，

$$\eta(f_A(d_1, \ldots, d_n)) = f_B(\eta(d_1), \ldots, \eta(d_n))$$

順序 F 代数 A の台が完備順序集合であり，また，各 f_A が連続であるとき，A は連続代数といわれる．連続代数間の準同型は，順序代数間の準同型であって，連続なものをいう．

[定義 2.2.1] 連続 F 代数 A と連続 F 代数のクラスΓに対して次の条件(1)，(2)が成立するとき，Γにおいて A はΓにおける始代数（または，終代数）であるという：(1) A はΓに属し，(2) Γの任意の代数 B に対して，準同型 $\theta:A\rightarrow B$（または，$\theta:B\rightarrow A$)が一意に存在する． □

始代数に類似する概念として，次を定義する．

[定義 2.2.2] 連続 F 代数 A と連続 F 代数のクラスΓに対して次の条件(1)，(2)が成立するとき，Γにおいて A は X 上で自由であるという：(1) A はΓに属し，(2) 写像 $\iota:X\rightarrow D_A$が存在し，Γの任意の代数 B と任意の写像 $\theta:X\rightarrow D_B$ に対して，$\theta = \theta'\circ\iota$ となる準同型 $\theta':A\rightarrow B$ が一意に存在する． □

これらの概念は，順序代数に関しても同様に定義される．さて，それぞれの変数記号を単に定数記号とみなすと，F∪X 代数という概念を考えることができる．

[注意 2.2.3] 変数記号に関する解釈を忘れることによって， F∪X 代数は F 代数とみなされる．□

なお，本節の内容については，詳しくは文献(1,5) を参照されたい．

2．3 無限木

本節では無限木に関する諸概念を定義する．詳細は文献(1,4)を参照されたい．

節点を関数記号または変数記号でラベル付けされた，無限ないしは有限な有向木の集合を $T^\infty(F,X)$ で表わす．また，これらの木のうち有限なものの全体を T(F,X) で表わす．T(F,X) の要素は項とみなすことができる．以下，T(F,X) の要素を s, t, t', u,...，などの文字で表わし，$T^\infty(F,X)$ の要素を S, T, T', U,...， などの文字で表わす．

$\mathbb{N}^*$ を正整数の有限列の全体とする．空列はεで表わす．列 p, q の連接を $p\cdot q$ で表わす．$\mathbb{N}^*$上の順序$\le$を，$p\le q \Leftrightarrow \exists r\ \ p\cdot r=q$ で定義する．集合 $P\subseteq \mathbb{N}^*$ の極小な要素全体を Min(P) とかく．

木 T に対し，$\mathbb{N}^*$ の部分集合 Node(T) を，以下のように定義する．木 T の各節点は Node(T) の要素と自然に同一視される(1,3,4)．

$$\mathrm{Node}(T) = \begin{cases} \{\varepsilon\}, & T \in F\cup X \text{ のとき}, \\ \{\varepsilon\}\cup\{i\cdot p \mid p\in \mathrm{Node}(T_i),\ i = 1,\dots,n\}, & T = f(T_1,\dots,T_n) \text{のとき}. \end{cases}$$

木 T と $p\in\mathrm{Node}(T)$ に対し，p を根とする T の部分木を T/p で表す．また，$T[p\leftarrow T']$ は T の節点 p を根とする部分木を木 T' で置き換えて得られる木を表わす．$T^\infty(F,X)$上の順序$\le$を次のように定義する：木 T' の適当な部分木の可算個の出現をΩで置き換えることにより木 T が得られるとき，$T\le T'$．$\langle T^\infty(F,X),\le\rangle$ は T(F,X) を基底とする代数的完備順序集合である．$T^\infty(F,X)$ 上の代入とは， X から $T^\infty(F,X)$ への写像 σ である．次式

$$\sigma(T) = T[p\leftarrow\sigma(x) \mid T/p=x\in X]$$

により代入の定義域を $T^\infty(F,X)$ へ拡張する．代入σが，$\sigma(x_i) = T_i$ $(i = 1,2,\dots)$ をみたし，$x_1, x_2,\dots$ 以外の変数記号 y に対しては$\sigma(y) = y$ であるとき，$\sigma(T)$を $T[T_1/x_1, T_2/x_2,\dots]$ とも表わす．あいまいさが生じなければ，これを $T[T_1, T_2,\dots]$ と略記することもある．代入に関し次のような連続性が成り立つ： $T_0[T_1,T_2,\dots] = \sqcup\{t_0[t_1, t_2,\dots] \mid t_i\le T_i\ (i = 0,1,2,\dots)\}$．有限木には変数記号が有限個しか現れないことから，木 t_0 に対してある n が存在して $t_0[t_1, t_2,\dots] = t_0[t_1, t_2,\dots, t_n]$ が成り立つ．よって，$T_0[T_1,T_2,\dots] = \sqcup\{t_0[t_1, t_2,\dots,t_n] \mid t_i \le T_i\ (i = 0,1,2,\dots,n)$，ただし，n は各 t_0 に対してそれぞれ十分大きくとる$\}$．$T^\infty(F,X)$ 上の代入の特別な場合として，T(F,X) 上の代入を考えることができる．

2．4 木の代数と合同関係

次数 n の記号 $f\in F\cup X$ に対し，$T^\infty(F,X)$ 上の写像 $\langle T_1,\dots, T_n\rangle \mapsto f(T_1,\dots,T_n)$ を割り当てることで，$\langle T^\infty(F,X), \le\rangle$ を台とする連続 F∪X 代数が定まる．これを $H^\infty(F\cup X)$ で表わす．さらに，$H^\infty(F\cup X)$ から，注意 2.2.3 によって得られる連続 F 代数を $H^\infty(F,X)$ で表わす．代入は，これらの代数上の自己準同型である．

[命題 2.4.1] (ADJ(1))

(1) $H^\infty(F\cup X)$ はすべての連続 F∪X 代数のなす

クラスにおける始代数である.

(2) $H^{\infty}(F,X)$ はすべての連続 F 代数のなすクラスにおいて X 上で自由である. □

上の命題の (1) によると, 次のようにして, 木 T は連続 F∪X 代数 A の要素 T^A とみなされる:

$$T^A = \upsilon_A(T)$$

ただし, υ_A: $H^{\infty}(F\cup X)\to A$ は一意的な準同型であり, 木の A 上の値としての解釈を表す. 一方, 上の命題の (2) によると, 連続 F 代数 A に対し, 木 T は連続写像 $T_A:(X\to D_A)\to D_A$ を表すと考えられる: $\theta: X\to D_A$ に対して,

$$T_A(\theta) = \theta'(T)$$

ただし, θ' はθに対して一意的な準同型である. このとき, 写像φ_A: $T\mapsto T_A$ は, H(F∪X) から $\hat{A}$ への準同型であり, よって, $\upsilon_{\hat{A}} = \varphi_A$ が成り立つ. φ_A は, 木の関数としての解釈を定める. 連続 F 代数 A から, 連続写像の集合 $(X\to D_A)\to D_A$ を台とする連続 F∪X 代数 $\hat{A}$ が導かれる(2). ここで, g, g': $(X\to D_A)\to D_A$ に対して,

$$g \sqsubseteq_{\hat{A}} g' \Leftrightarrow g(\theta) \sqsubseteq_A g'(\theta)\ (\theta:X\to D_A)$$

また, f∈F∪X に対し,

$$f_{\hat{A}}(g_1,\ldots,g_n)(\theta) = f_A(g_1(\theta),\ldots,g_n(\theta))$$
$$(g_1,\ldots,g_n:(X\to D_A)\to D_A,\ \theta:X\to D_A)$$

とする. φ_A の値域 $\{T_A|\ T\in T^{\infty}(F,X)\}$ の上に導かれる $\hat{A}$ の部分構造は, 順序 F∪X 代数を成す. これを $H^{\infty}(F,X)_A$ で表わす. すなわち,

$$f_{H^{\infty}(F,X)_A}((T_1)_A,\ldots,(T_n)_A) = (f(T_1,\ldots,T_n))_A\ (f\in F\cup X)$$

$H^{\infty}(F,X)_A$ は, 「無限木によって表現可能」な A 上の関数の代数であり, 一般には連続でない(5).

$T^{\infty}(F,X)$上の前順序πが≤を含んで, さらに次の条件をみたすとき, πを$T^{\infty}(F,X)$上の前合同関係という:

$$T_i\ \pi\ U_i\ (i=0,1,\ldots) \Rightarrow T_0[T_1,T_2,\ldots]\ \pi\ U_0[U_1,U_2,\ldots]$$

$T^{\infty}(F,X)$上の前合同関係が同値関係であるとき, $T^{\infty}(F,X)$上の合同関係といわれる. T(F,X) 上の前合同関係, 合同関係も同様に定義される. $T^{\infty}(F,X)$ 上の任意の前合同関係πを与えると, $T^{\infty}(F,X)/\pi$ を台とする順序 F∪X 代数 Q_π が次によって定まる: f∈F∪X に対して,

$$f_{Q_\pi}([T_1]_\pi,\ldots,[T_n]_\pi) = [f(T_1,\ldots,T_n)]_\pi$$

Q_π が順序代数であることは ≤⊆π によるが, これは必ずしも連続でない. これが連続である場合には, 以下に述べるような興味深い性質が得られる. まず, 二つの補題を用意する.

[補題 2.4.2] Q_π は連続とし, $\theta: X\to Q_\pi$ に対し, 一意に存在する準同型を $\theta': H^{\infty}(F,X)\to Q_\pi$ と表す.

(1) $\theta: X\to Q_\pi$ に対し, 下の (*) をみたす代入σ をとると, $\theta'(T) = [\sigma(T)]_\pi$ $(T\in T^{\infty}(F,X))$.

(2) 代入σ に対し, 下の (*) をみたす$\theta:X\to Q_\pi$ をとると, $\theta'(T) = [\sigma(T)]_\pi$ $(T\in T^{\infty}(F,X))$.

ただし,

$$\theta(x) = [\sigma(x)]_\pi\ (x\in X)\ \ldots\ldots\ldots (*)$$

(証明) $[\sigma(\_)]_\pi$ が準同型であること, および準同型θ' の一意性による. □

[補題 2.4.3] Q_π が連続なとき,

$$[T]_\pi \sqsubseteq [U]_\pi \Leftrightarrow T_{Q_\pi} \sqsubseteq U_{Q_\pi}.$$

ただし, 左辺の⊑は Q_π の, また, 右辺の⊑は $H^{\infty}(F,X)_A$ の順序を表わす.

(証明) まず, $[T]_\pi \sqsubseteq [U]_\pi$, すなわち, T π U とする. 任意の$\theta: X\to Q_\pi$ に対し, 補題 2.4.2 (1) から代入σが存在して, $\theta'(T) = [\sigma(T)]_\pi$ $(T\in T^{\infty}(F,X))$. 仮定から, σ(T) π σ(U) だから, $\theta'(T) \sqsubseteq \theta'(U)$. すなわち, $T_{Q_\pi} \sqsubseteq U_{Q_\pi}$.

逆に, $T_{Q_\pi} \sqsubseteq U_{Q_\pi}$ とする. すなわち, 任意の $\theta: X\to Q_\pi$ に対し, $\theta'(T) \sqsubseteq \theta'(U)$. ここで, 代入として恒等写像を考え, θを $\theta(x) = [x]_\pi$ (x∈X) と決めると, 補題 2.4.2 (2) により任意の T に対しθ'(T) = $[T]_\pi$. よって仮定から, $[T]_\pi \sqsubseteq [U]_\pi$. □

[定理 2.4.4] (外延性定理) $T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係πに対して, Q_π が連続なとき, $H^{\infty}(F,X)_{Q_\pi}$ も連続でこれらは同型である. 同型を与える準同型は, $[T]_\pi$ を T_{Q_π} に写す.

(証明) 補題 2.1.1, 2.4.3 による. □

上の性質は, 木がもつ, 値としての側面と関数としての側面の整合性を主張している.

最後に, Q_π が連続であるための十分条件を与える. 連続 F 代数 A に対し, $T^{\infty}(F,X)$ 上の前順序 Ker(φ_A) を $\lessapprox_A$ で表わす. すなわち,

$$T \sqsubseteq_A T' \Leftrightarrow T_A \sqsubseteq_{H^\infty(F,X)_A} T'_A$$

$\sqsubseteq_A$ は $T^\infty(F,X)$ 上の前合同関係で，$Q_{\sqsubseteq_A}$ は $H^\infty(F,X)_A$ と同型であることに注意する．次の命題は，文献(7) の結果に若干手を加えたものである．

[命題 2.4.5] $T^\infty(F,X)$上の前合同関係πに対し，引き込みρが存在して次の条件をみたすとき，

$$T \ \pi \ T' \Leftrightarrow \rho(T) \le \rho(T')$$

(1) Q_π は連続で，次の代数 N_ρ に同型である．

$N_\rho = \langle\langle \rho(T^\infty(F,X)), \le\rangle, \langle f_{N_\rho} \mid f \in F \cup X\rangle\rangle$

ただし，$f \in F$ に対し，

$f_{N_\rho}(T_1,\ldots,T_n) = \rho(f(T_1,\ldots,T_n))$

(2) これらの代数は，次の連続 F 代数のクラスにおいて，X 上で自由である．

$\Gamma_\pi = \{A \mid \pi \subseteq \sqsubseteq_A\}$

(3) さらに，次の順序 $F \cup X$ 代数のクラスにおける始代数である．

$\Phi_\pi = \{H^\infty(F,X)_A \mid$ 連続 F 代数 A, $\pi \subseteq \sqsubseteq_A\}$

このとき，Q_π, N_ρ から Φ_π に属する代数への準同型は，連続である．

(略証) (1) Q_π, N_ρ が連続で同型であることは，引き込みの値域が完備順序集合であることと補題 2.1.1 による．(2) 両代数の自由性は，次のように示される．まず，これらが Γ_π に属することは，定理 2.4.4，注意 2.3.3 による．また，命題 2.4.1 (2) から得られる準同型θ': $H^\infty(F,X) \to A$ を $\rho(T^\infty(F,X))$ に制限したものが一意的な準同型 $N_\rho \to A$ である．(3) 命題 2.4.1 (1) を使って自由性と同様に示される． □

なお，勝手な前合同関係πに対して Q_π がたまたま連続代数であったとしても，それが Γ_π における自由代数であるとは限らない(5)．

3. 連続動作代数

3.1 連続動作代数

本節では，"動作" の概念を，ひとつの前合同関係から新たな前合同関係を導く枠組みとして抽象的に定式化し，誘導された前合同関係が連続代数を定めるための十分条件を示す．

πを $T(F,X)$ 上の前合同関係とし，B を $T(F,X)$ の部分集合とする．$t \in T(F,X)$ に対し，次のように定義される関数 $Bhv_{\langle\pi,B\rangle}(t)$ を，$\langle\pi, B\rangle$ を基底とする t の動作という．

$$Bhv_{\langle\pi,B\rangle}(t)(s,x,\sigma) = \{u \in B \mid u \ \pi \ s[\sigma(t)/x]\}$$

$T(F,X)$上の前順序 $\beta_{\langle\pi,B\rangle}$ を次のように与え，$\langle\pi, B\rangle$ 動作前順序とよぶ:

$$t \ \beta_{\langle\pi,B\rangle} \ t' \Leftrightarrow \forall s \forall x \forall \sigma \ Bhv_{\langle\pi,B\rangle}(t)(s,x,\sigma) \subseteq Bhv_{\langle\pi,B\rangle}(t')(s,x,\sigma)$$

$\beta_{\langle\pi,B\rangle}$ が前合同関係であることは容易に導かれる．以下で，基底 $\langle\pi, B\rangle$ が文脈から明らかであるときは，添字 $\langle\pi, B\rangle$ を省略することがある．

[補題 3.1.1]

(1) $t \beta t' \Rightarrow \{u \in B \mid u \pi t\} \subseteq \{u \in B \mid u \pi t'\}$,

(2) $t \pi t' \Rightarrow t \beta t'$,

(3) $u \in B$ のとき，$u \pi t \Leftrightarrow u \beta t$. □

[定義 3.1.2] 次の条件が成り立つとき，$\langle\pi, B\rangle$ は完全な基底であるという：

$u \in B$ かつ $u \ \pi \ s[\sigma(t)/x] \Rightarrow$

$\exists v \in B$ $v \ \pi \ t$ かつ $u \ \pi \ s[\sigma(v)/x]$ □

[補題 3.1.3] 基底 $\langle\pi, B\rangle$ が完全ならば，

$t \beta t' \Leftrightarrow \{u \in B \mid u \pi t\} \subseteq \{u \in B \mid u \pi t'\}$ □

[定義 3.1.4] 次の性質が成り立つとき，$\langle\pi, B\rangle$ は無矛盾な基底であるという： 任意の t に対して $\{u \in B \mid u \pi t\}$ はπに関して有向である． □

[定義 3.1.5] 次が成り立つとき，基底 $\langle\pi, B\rangle$ は構文論的であるという: $u, u' \in B$ に対し，

$u \pi u \Leftrightarrow u \le u'$. □

無矛盾な構文論的基底 $\langle\pi, B\rangle$ に対しては，$\{u \in B \mid u \ \pi \ t\}$ は$\le$に関して有向である．そこで，写像 $Proj_{\langle\pi,B\rangle}: T(F,X) \to T^\infty(F,X)$ を次のように定義することができる．

$$Proj_{\langle\pi,B\rangle}(t) = \sqcup\{u \in B \mid u \ \pi \ t\}$$

$Proj_{\langle\pi,B\rangle}(t)$を t の $\langle\pi,B\rangle$ 射影という．

[補題 3.1.6] 無矛盾で構文論的な基底に対し，

$t \beta t' \Rightarrow Proj(t) \le Proj(t')$

さらに基底が完全ならば，逆も成り立つ．

(証明) 十分性は補題 3.1.1(1) による．また，基底が完全な場合には，B の要素がコンパクトであることと補題 3.1.3 から必要性が導かれる． □

[系 3.1.7] 無矛盾な構文論的基底 $\langle\pi, B\rangle$ に対

して，Proj は単調である．

(証明) $\leq \subseteq \pi$ と補題 3.1.1 (2) による． □

補題 3.1.6 とその系から，構文論的基底が完全かつ無矛盾であれば，T(F,X) 上の前合同関係 β は次のようにして $T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係へと拡張される．まず，下の式により，単調写像 Proj は $T^{\infty}(F,X)$ を定義域とする連続写像へと一意に拡張される．

$$\mathrm{Proj}^{\infty}(T) = \sqcup\{\mathrm{Proj}(t) \mid t \leq T\}$$

そこで補題 3.1.6 に準じ，βを，次のようにして $T^{\infty}(F,X)$ 上の関係 β^{∞} へと拡張する：

$$T\ \beta^{\infty}\ T' \Leftrightarrow \mathrm{Proj}^{\infty}(T) \leq \mathrm{Proj}^{\infty}(T')$$

さらに，下のようにして，π を T(F,X) から $T^{\infty}(F,X)$ への関係に拡張する．

$$t\ \pi^{\infty}\ T \Leftrightarrow \exists t'\ t\ \pi\ t' \text{ かつ } t' \leq T$$

事実，$\leq \subseteq \pi$ より $\pi \subseteq \pi^{\infty}$．

補題 3.1.1，3.1.3 は次のように一般化される．

［補題 3.1.8］ 完全かつ無矛盾な構文論的基底に対し，

(1) $\mathrm{Proj}^{\infty}(T) = \sqcup\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T\}$

(2) $T\ \beta^{\infty}\ T' \Leftrightarrow$

$$\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T\} \subseteq \{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T'\}$$

(3) $t\ \pi^{\infty}\ T \Rightarrow t\ \beta^{\infty}\ T$

(4) $u \in B$ のとき，$u\ \pi^{\infty}\ T \Leftrightarrow u\ \beta^{\infty}\ T$ □

また，$B^{\infty} = \{\sqcup\Delta \in T^{\infty}(F,X) \mid \Delta \subseteq B$ で，Δ は有向$\}$ と定義すると，次の補題が成り立つ．

［補題 3.1.9］ 完全で無矛盾な構文論的基底に対し，Proj^{∞} は引き込みで $\mathrm{Proj}^{\infty}(T^{\infty}(F,X)) = B^{\infty}$．

(証明) 基底が無矛盾かつ構文論的だから，任意の $v \in B$ は集合 $\{u \in B \mid u\ \pi\ v\}$ の最大元で，よって $\mathrm{Proj}(v) = v$．Proj^{∞} の連続性から有向な $\Delta \subseteq B$ に対して，$\mathrm{Proj}^{\infty}(\sqcup\Delta) = \sqcup\{\mathrm{Proj}(v) \mid v \in \Delta\} = \sqcup\Delta$．よって，任意の $U \in B^{\infty}$ について $\mathrm{Proj}^{\infty}(U) = U$．さらに，任意の T について $\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T\}$ が有向であることと補題 3.1.8 (1) から，$\mathrm{Proj}^{\infty}(T) \in B^{\infty}$．以上から，$\mathrm{Proj}^{\infty}$ は引き込みである．また，$\mathrm{Proj}^{\infty}(T^{\infty}(F,X)) = B^{\infty}$ も容易に分かる． □

［補題 3.1.10］ 完全基底 $\langle\pi, B\rangle$ においては，$u \in B$ かつ $u\ \pi\ t_0[t_1,\ldots,t_n]$ ならば，$u_0,\ldots,u_n \in B$ が存在し，$u_i\ \pi\ t_i$ $(i = 0,\ldots,n)$ かつ $u\ \pi\ u_0[u_1,\ldots,u_n]$． □

［補題 3.1.11］ 完全で無矛盾な構文論的基底に対して，β^{∞} は，$T^{\infty}(F,X)$ 上の前合同関係である．

(証明) まず，$T_0[T_1,T_2,\ldots]$ について次のことが成り立つ．$t \leq T_0[T_1,T_2,\ldots]$ とすると，$T_0[T_1,T_2,\ldots] = \sqcup\{t_0[t_1, t_2, \ldots, t_n] \mid t_i \leq T_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$，ただし，n は各 t_0 に対してそれぞれ選んだ十分大きい自然数$\}$ と t のコンパクト性から，ある n と $t_i \leq T_i$ なる t_i $(i = 0, 1,\ldots,n)$ が存在して $t \leq t_0[t_1, t_2,\ldots, t_n]$．これと $\pi^{\infty} = \pi\cdot\leq$ より，$\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T_0[T_1,T_2,\ldots]\} = \{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ t_0[t_1, t_2,\ldots, t_n],\ t_i \leq T_i,\ i = 0, 1,\ldots,n$，ただし，n は各 t_0 に対してそれぞれ十分大きい$\}$．補題 3.1.10 と $\pi^{\infty} = \pi\cdot\leq$ より，これはさらに $\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ u_0[u_1, u_2,\ldots,u_n],\ u_i\ \pi^{\infty}\ T_i,\ i = 0, 1,\ldots, n$，ただし，n は各 u_0 に対してそれぞれ十分大きい$\}$ に等しい．以上のことは，$S_0[S_1, S_2,\ldots]$ についても同様である．

そこで，$T_i\ \beta^{\infty}\ S_i$ $(i = 0,1,\ldots)$ とする．補題 3.1.9 (2) より，$\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T_i\} \subseteq \{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ S_i\}$ $(i = 0,1,\ldots)$．すると，上の議論から $\{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ T_0[T_1,T_2,\ldots]\} \subseteq \{u \in B \mid u\ \pi^{\infty}\ S_0[S_1,S_2,\ldots]\}$．再び補題 3.1.9 (2) より，$T_0[T_1,T_2,\ldots]\ \beta^{\infty}\ S_0[S_1,S_2,\ldots]$． □

［定理 3.1.12］ 完全で無矛盾な構文論的基底に対して，$Q_{\beta^{\infty}}$，$N_{\mathrm{Proj}^{\infty}}$ は同型な連続代数である．

(証明) 補題 3.1.9，3.1.11，命題 2.4.5 (1) による． □

このとき，$Q_{\beta^{\infty}}$ を，$\langle\pi, B\rangle$ を基底とする連続動作代数という．

3．2 連続な始代数と終代数

本節では，完全かつ無矛盾な構文論的基底から定まる連続動作代数が，二つの代数のクラスに対してそれぞれ始代数，終代数となっていることを示す．まず，命題 2.4.5 (2)，(3) から次を得る．

［定理 3.2.1］ 完全かつ無矛盾な構文論的基底に対して，$Q_{\beta^{\infty}}$，$N_{\mathrm{Proj}^{\infty}}$ は連続 F 代数のクラス $\Gamma_{\beta^{\infty}}$ において X 上で自由であり，順序 F∪X 代数のクラス $\Phi_{\beta^{\infty}}$ における始代数である． □

次に，Q_{β^∞}，N_{Proj^∞} が終代数となっている代数のクラスについて検討する．

[補題 3.2.2] 連続 F∪X 代数 A と準同型 υ_A: $H^\infty(F\cup X) \to A$ について，υ_A が上への写像ならば，$Q_{\sqsubseteq_A}$ は連続で A に同型である．

(証明) 系 2.1.2 による． □

[補題 3.2.3] 完全かつ無矛盾な構文論的基底 $\langle\pi, B\rangle$ と $T^\infty(F,X)$ 上の関係 ρ が $\pi^\infty \subseteq \rho \subseteq \beta^\infty$ をみたすとする．このとき，u∈B ならば，

$$u\,\pi^\infty\,T \Leftrightarrow u\,\rho\,T \Leftrightarrow u\,\beta^\infty\,T$$

(証明) 補題 3.1.8 (4) による． □

[定義 3.2.4] 次の条件をみたすような連続 F∪X 代数 A のなすクラスを $\Delta_{\langle\pi,B\rangle}$ で表わす: すなわち，

(1) 準同型 υ: $H^\infty(F\cup X)\to A$ が全射であって，
(2) $\pi^\infty \subseteq \sqsubseteq_A \subseteq \beta^\infty$ であり，
(3) u∈B に対し，$[u]_{\sqsubseteq_A}$ はコンパクト． □

[定理 3.2.5] $\langle\pi, B\rangle$ を，完全で無矛盾な構文論的基底とする．連続 F∪X 代数 A が，定義 3.2.4 の (1)，(2) をみたすとき，同定義の (3) は，A から Q_{β^∞}，N_{Proj^∞} への準同型が一意に存在する必要十分条件である．

(証明) 補題 3.2.3 より，$Q_{\sqsubseteq_A}$ から Q_{β^∞} への準同型を問題にすれば十分である．最初に，定義 3.2.4 (1)，(2) の条件下で，写像 η: $[T]_{\sqsubseteq_A} \mapsto [T]_{\beta^\infty}$ が順序代数の準同型であることを示す．η の定義から，f∈F に対して，

$$\eta(f_{Q_{\sqsubseteq_A}}([T_1]_{\sqsubseteq_A},\dots,[T_n]_{\sqsubseteq_A})) = f_{Q_{\beta^\infty}}(\eta([T_1]_{\sqsubseteq_A}),\dots,\eta([T_n]_{\sqsubseteq_A})).$$

また，$\sqsubseteq_A \subseteq \beta^\infty$ より，η は単調である．よって，任意の有向な $\{[T_i]_{\sqsubseteq_A}\}_i$ に対して，$[S]_{\sqsubseteq_A} = \sqcup\{[T_i]_{\sqsubseteq_A}\}_i$ とすると，$\sqcup\{\eta([T_i]_{\sqsubseteq_A})\}_i = \sqcup\{[T_i]_{\beta^\infty}\}_i \sqsubseteq \eta([S]_{\sqsubseteq_A}) = [S]_{\beta^\infty}$

(⇒) そこでまず，定義 3.2.4 (3) から η の連続性を導く．η が連続である条件は，上の式において逆向きの⊑が成立することである．さて，定義 3.2.4 (3) は次の条件に等価である．

$$\{u\in B \mid u \sqsubseteq_A S\} \subseteq \cup_i \{u\in B \mid u \sqsubseteq_A T_i\}$$

この条件は，補題 3.2.3 より，次に等価である．

$$\{u\in B \mid u\,\pi^\infty\,S\} \subseteq \cup_i\{u\in B \mid u\,\pi^\infty\,T_i\}$$

さらに，補題 3.1.9 (2) より，次に等価である．

$$\{u\in B \mid u\,\pi^\infty\,S\} \subseteq \{u\in B \mid u\,\pi^\infty \sqcup\{[T_i]_{\beta^\infty}\}_i\}$$

再び同補題 (2) より，$S\,\beta^\infty \sqcup\{[T_i]_{\beta^\infty}\}_i$ を得て，逆向きの⊑が導かれる．以上から，η は（連続代数間の）準同型である．その一意性は，υ が上への準同型であることと，$\upsilon\circ\eta$ の一意性による（命題 2.4.1 (1)）．

(⇐) 反対に，A から Q_{β^∞} への準同型が一意に存在したとすると，命題 2.4.1 (1) より，η がそれであることが導かれる．そこで，η が連続であることを用いて，上の議論を逆にたどる． □

[系 3.2.6] 完全で無矛盾な構文論的基底 $\langle\pi, B\rangle$ に対して，Q_{β^∞}，N_{Proj^∞} は $\Delta_{\langle\pi,B\rangle}$ における終代数である． □

The Class of Ordered F∪X Algebras

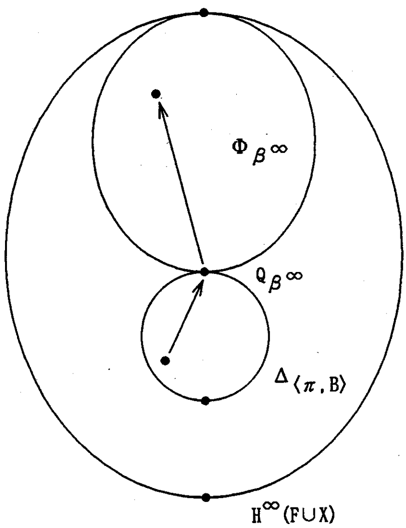

図1．始代数および終代数としての連続動作代数

以上の議論から，ただちに次の性質が得られる．

［定理 3.2.7］ 完全無矛盾な構文論的基底 $\langle \pi, B\rangle$ に対し，$\Delta_{\langle \pi, B\rangle}$ の任意の代数から $\Phi_{\beta}\infty$ の任意の代数へ（連続な）準同型が一意存在する．□

［定理 3.2.8］ 完全で無矛盾な構文論的基底 $\langle \pi, B\rangle$ に対して，次の三条件は等価である．

(1) $T\ \beta^{\infty}\ S$.

(2) $\Gamma_{\beta}\infty$ の任意の A において $T_A \sqsubseteq S_A$．

(3) $\Delta_{\langle \pi, B\rangle}$ のある A において $T^A \sqsubseteq S^A$．□

４．項書換え系の連続動作意味論

本章では，連続動作代数の概念を項書換え系の意味論に応用する．項の書換えから完全で無矛盾な構文論的基底が導かれるなら，このとき定まる連続動作代数によって項書換え系の意味論を与えることができる．

４．１ 項書換え系

木 t に現れる変数記号の集合を Var(t) とする．有限木の対の非空可算集合 R で，その要素 ⟨u, u'⟩ が $Var(u) \supseteq Var(u')$ かつ $u \notin X$ をみたすものを項書換え系という．また，項書換え系の要素 ⟨u, u'⟩ を書換え規則といい，u をその左辺，u' を右辺という．以下，R は 項書換え系とする．

代入σ，$p \in Node(t)$，$\langle u, u'\rangle \in R$ が存在して $t/p = \sigma(u)$ かつ $t' = t[p \leftarrow \sigma(u')]$ であるとき，$t \rightarrow_R t'$ として，T(F, X) 上の 2 項関係 $\rightarrow_R$ を定義する．$\rightarrow_R$ の逆関係 $\rightarrow_R^{-1}$ を $\leftarrow_R$ で表わし，$\leftrightarrow_R = \rightarrow_R \cup \leftarrow_R$ とする．また，一般に 2 項関係ρの反射推移閉包を ρ^* で表わす．

R のリデックスの集合 Red_R を次に定義する．

$$Red_R = \{t \in T(F, X) \mid \exists \langle u, u'\rangle \in R \exists \sigma\ \ \sigma(u) = t\}$$

R の正規形の集合 NF_R を次で定める．リデックスを部分項としてもたない（有限）項を正規形といい，その集合を NF_R で表わす．$t \rightarrow_R^* t'$ かつ $t' \in NF_R$ のとき，t は正規形 t' を持つという．

t, t_1, t_2 に対し，$t \rightarrow_R^* t_1$ かつ $t \rightarrow_R^* t_2$ ならば，u があって $t_1 \rightarrow_R^* u$ かつ $t_2 \rightarrow_R^* u$ であるとき，R は合流性を満たすという．また，無限列 $t_0 \rightarrow_R t_1 \rightarrow_R t_2 \rightarrow_R \ldots$ が存在しないならば，R は停止性を満たすという．R が合流性と停止性を満たすとき，各項は唯一の正規形を持つ．この場合，t の正規形を $nf_R(t)$ で表す．

項 t にどの変数記号も 2 回以上現れないとき，t は線形であるという．項書換え系 R のすべての規則の左辺が線形のとき，R を線形であるという．t にΩが現れないとき，t をΩフリーであるという．Ωフリー正規形全体の集合を SNF_R で表わす．R のすべての規則の左辺がΩフリーのとき，R をΩフリーという．木 t と t' が単一化可能であるとは，$\sigma(t) = \sigma'(t')$ となる代入σ，σ' が存在することである．R の規則 ⟨t, t'⟩, ⟨u, u'⟩があり，ある $p \in Node(t)$ について，$t/p \notin X$ で，かつ t/p と u が単一化可能であるとき，R はあいまいであるという（ただし，⟨t, t'⟩ と ⟨u, u'⟩ が同一の規則で，かつ，$p = \varepsilon$ の場合は除外する）．そうでなければ，R は無あいまいであるという．

４．２ 項書換え系の動作意味論

基底を $\langle(\preceq \cup \leftarrow_R)^*, SNF_R\rangle$ にとった動作は，1．で触れた古典的な動作意味論に対応する．$(\preceq \cup \leftarrow_R)^*$ が $\leftarrow_R$ を含む最小の前合同関係であることに注意する．すなわち，古典的動作意味論を順序論的な動作意味論の特別な場合とみなすこともできる．上の基底は構文論的ではあるが，容易に示されるように，一般には無矛盾性も完全性も満たさない．これらを保証するためには，さらに条件を仮定しなければならない．

まず，Courcelle(3) の単調な項書換え系をとりあげる．R が停止性と合流性を満たし，かつ，写像 nf_R が単調なとき，R は単調であるという．

［命題 4.2.1］ R が単調ならば，次の基底はいずれも完全かつ無矛盾で構文論的である：

$\langle(\preceq \cup \leftrightarrow_R)^*, NF_R\rangle$, $\langle(\preceq \cup \leftarrow_R)^*, NF_R\rangle$.

これらの基底は同一の動作前順序を定める．

（証明） まず，$(\preceq \cup \leftarrow_R)^*$ の場合をとりあげる．これが，構文論的であることは明らか．さらに，$\preceq \cup \leftarrow_R$ の鎖の長さに関する帰納法と R の単調性により，$nf_R(t)$ は $\{u \in NF_R \mid u\ (\preceq \cup \leftarrow_R)^*\ t\}$ の最大元であることが示され，これから，無矛盾性が導かれる．完全性については，$(\preceq \cup \leftarrow_R)^* =$

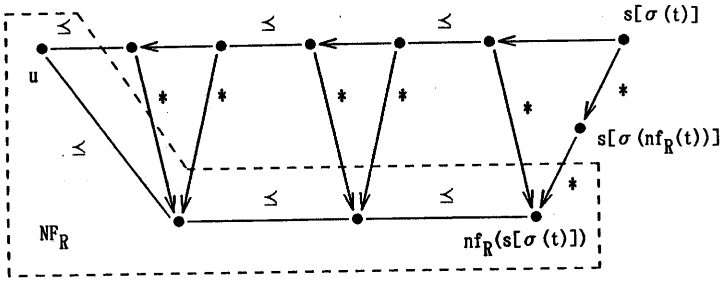

図2．命題 4.2.1 証明中の図式

$(\le \cdot \leftarrow_R)^*$ に注意して図 2 のように考えればよい．もう一つの基底についても，これと同様に示される．また，両基底による動作前順序の一致については，補題 3.1.3 を用いる．□

項書換え系を計算の体系とみなすときには，停止性の仮定は厳しすぎるため[9]，これに代わる適当な条件を考える必要がある．

次のように帰納的に定められる集合を $Cand_R$ で表し，R のリデックスの候補の集合という： (1) $Red_R \subseteq Cand_R$. (2) t, $t' \in Cand_R$, $p \in Node(t)$ ならば $t[p \leftarrow t'] \in Cand_R$. さらに，$\downarrow Cand_R = \{t \mid \exists t' \in Cand_R\ t \le t'\}$ とする．Ω以外の $\downarrow Cand_R$ の要素を，部分項としてもたない(有限)項を R の近似正規形といい，その集合を ANF_R で表わす．$^+$

[命題 4.2.2] 無あいまい線形Ωフリー項書換え系 R に対し，$\langle (\le \cup \leftarrow_R)^*, ANF_R \rangle$ は完全かつ無矛盾な構文論的基底である．

(証明) R が線形かつΩフリーならば，$(\le \cup \leftarrow_R)^* = \le \cdot (\leftarrow_R^*)$である（文献(12) 命題 12）．このことと，文献(9)，補題 3.5, 3.6 と無あいまい線形項書換え系が合流性を満たすこと，および，同文献の定理 4.3 による．□

すなわち，文献(9) に著者らが与えた無あいまい線形項書換え系の代数的意味論は，上の基底の下での動作意味論である．

定理 3.1.13 により，上述の二つの場合においては項書換え系から連続動作代数が導かれる．定理 3.2.1 から，この代数は自由代数である．これについては既に文献 (3, 9) の中でも検討されているが，本論文の結果によれば，さらに，この代数は終代数 (系 3.2.6) でもあり，定理 3.2.7, 3.2.8 の性質を満たすことが分かる．また，定理 2.4.4 の意味での外延性が成立している．

5．結論

Scott の順序論的な立場に基づき，連続動作代数の概念を定式化し，これがいくつかの有用な性質を備えていることを明らかにした．また，この概念を項書換え系の意味論に適用した例を示した．

さらに，束縛変数の概念を導入して代入などの定式化を修正することにより，本論文の議論をλ計算の意味論に応用することが可能である．実際，このような修正の後には，Lévy[6] によるλ計算の代数的モデルを連続動作代数の例とみなすことができると考えられる．

謝辞 日頃御指導いただく豊技大本多波雄学長，名大福村晃夫教授，御討論下さった名大坂部俊樹助教授，平田富夫講師，並びに研究室の皆様に感謝する．また，本論文の近接に関連して九大河原康雄先生から有益なご助言をいただいた．記して感謝する．なお，本研究は一部文部省科研費（一

$^+$ この表記は，著者らの以前の文献[9,10,11] におけるものと整合しない．これらの文献中における ANF_R は，本論文での $(ANF_R)^\infty$ にあたる．

般研究(C)課題番号62550261, 試験研究(1)課題番号62880007)の援助を受けた.

文献

(1) ADJ: "Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras," J.ACM 24, pp.68-95(1977).

(2) G.Boudol: "Computational Semantics of Term Rewriting Systems," [文献(8), pp.167-236].

(3) B.Courcelle: "Infinite Trees in Normal Form and Recursive Equations Having a Unique Solution," Math. Systems Theory 13, pp.131-180 (1979).

(4) B.Courcelle: "Fundamental Properties of Infinite Trees," Theor. Comput. Sci. 25, No. 2, pp. 95-169(1983).

(5) I.Guessarian: "Survey on Classes of Interpretations and Some of Their Applications," [文献(8), pp.383-410].

(6) J.-J.Lévy: "An Algebraic Interpretation of the λβK-Calculus; and an Application of a Labeled λ-calculus," Theor. Comput. Sci. 2, No.1, pp.97-114(1976).

(7) M.R.Levy and T.S.E.Maibaum: "Continuous Data Types," SIAM J. Comput. 11, No.2, pp.201-216(1982).

(8) M.Nivat and J.C.Reynolds, Eds., "Algebraic Methods in Semantics," Cambridge University Press(1985).

(9) 直井, 稲垣:"項書換え系の意味論と自由連続代数", 信学論採録.

(10) 直井, 稲垣:"項書換え系とその保存的拡大における代数的意味論と動作意味論の関連について", 信学論投稿中.

(11) T.Naoi and Y.Inagaki: "The Relation between Algebraic and Fixedpoint Semantics of Term Rewriting Systems, Report of Tech. Group on Computation, COMP86-37, IECEJ(1986)(1986).

(12) J.-C.Raoult and J.Vuillemin: "Operationaland Semantic Equivalence Between Recursive Programs," J.ACM 27, pp.772-796(1980).

(13) D.A.Schmidt: "Approximation Properties of Abstract Data Types," Theor. Comput. Sci. 24, pp.73-94(1983).