

非探索アルゴリズムによる n -queen問題の解法

山田 義朗

富田 悦次

高橋 治久

電気通信大学 電子情報学科

n -queen問題は探索アルゴリズムの例題としてよく取上げられる。しかしながら、探索アルゴリズムは問題のサイズが大きくなると現実的な時間で解が得られないことが多い。ここでは、 n -queen問題を解く2つの非探索アルゴリズムを提唱する。どちらのアルゴリズムも、モンテカルロ法による近似最大独立節点集合(MIS)抽出アルゴリズムを基本にして効率化を行なったものである。計算機実験によりこれまでに20000 queen問題の解が得られており、アルゴリズムの効率の良さが伺える。

Non-Searching Algorithms for the n -Queen Problem

Yoshiaki YAMADA Etsuji TOMITA Haruhisa TAKAHASHI

Dept. of Commun. & Systems , The Univ. of Electro-Communications

An n -queen problem is one of typical problems which can be solved by searching methods. In many cases, the time required for such searching algorithms is very huge. In this note, we propose two non-searching algorithms for the n -queen problem that which are based upon a Monte-Carlo algorithm for finding a near-maximum independent set (MIS). We present some experimental results of these algorithms for up to 20000 queens.

1. はじめに

組合せ最適化問題は、応用上重要な幾多の問題を含む。しかし、それらの多くはNP完全のクラスに属し、多項式時間で解を求めるアルゴリズムの存在は期待し難い。

ところで、実用上に於いては膨大な時間をかけて厳密解を得るよりは、むしろ短時間で厳密解に近い解(近似解)を得たい場合が少なくない。高効率な近似解抽出アルゴリズム(近似アルゴリズム)を得ることも、多くの場合また困難であるが、ニューラルネットワークの概念を用いると、比較的容易に近似アルゴリズムを構成することの出来る可能性がある。

ニューラルネットワークは、元来、並列計算モデルとして考案されたものであるが、TSP(巡回セールスマン問題)などに対して直列処理計算機上のシミュレーションを行ない、短時間で良好な解が求められるとの実験結果が報告されている。

これらニューラルネットワークの概念を用いた組合せ最適化問題の解法では、与えられた問題をエネルギー関数とよばれる系の状態の関数の形に置き換え、このエネルギー関数の極値探索という形で問題を解く。その為に、アルゴリズムの骨格は、問題によらずほぼ同じものとなる。ここで、各問題ごとに必要となることはエネルギー関数を作成することと、幾つかのパラメータを決定することである。

本稿では、 n -queen問題を例題として、ボルツマンマシンの直列処理に於ける効率化の手法及び実験結果について述べることにする。ここでは、 n -queen問題を最大独立節点集合抽出問題に帰着させて解いているが、それと双対な問題である最大クリーク抽出問題に対する同概念によるランダム化アルゴリズムと実験結果は、既に文献(1)に示している。

2. 直列処理によるボルツマンマシンの効率化

2.1. ボルツマンマシン

確率系を導入した相互接続型ニューラルネットワークにボルツマンマシンと呼ばれるものがある。ボルツマンマシンとは2値状態をとる多数のユニットから構成される並列計算モデルで、系の平衡状態に於けるエネルギーの出現確率がマクスウェル・ボルツマン分布に従うことからこの名が付けられている。

2.2. エネルギーの観測と直列処理

ボルツマンマシンは最適化目的量をエネルギー関数と呼ばれる系の状態の関数に対応させ、エネルギーの最小化(又は最大化)という形で近似的に最適化問題を解く。

高度並列処理に於いては大域的なエネルギーを知ることは一般的に困難であるが、直列処理では容易にエネルギーの観測を行なうことが出来る。

エネルギーの観測により、試行の最終状態(収束状態)のみを解とするのではなく、試行の途中でも解を抽出することが可能であるので、必ずしもアニーリングの様な収束手法を用いる必要はない。

エネルギーの観測により、次の様な事が可能になる。

1. 解の抽出機会の複数化
2. 非収束の手法による解の抽出

2.3. 温度パラメータとエネルギー関数の極の緩和

平衡状態にあるボルツマンマシンでは、温度とよばれる非負のパラメータが小さいほど最適解の出現確率が高くなる。しかしながら、温度パラメータが小さいほどエネルギー関数の極に対応する状態から脱出するのに時間がかかり、平衡状態に達するまでの時間が増加してしまう。従来この問題を解決する為に、温度パラメータ(T)を時間(t)と共に減少させ(近似)最適解に収束させる手法(アニーリング手法)が広く用いられている。しかしながら、精度を高めるには温度の減少関数に t^{-1} や $\log(t)^{-1}$ などの非常に収束の遅い関数を用いなくてはならないと言われており、効率のよい方法とは言い難い。

ここでは、非収束の手法として次の様なことを考える。

1. 目的量を増加させる状態の遷移に関して緩和を行なう。
2. 温度パラメータを低く設定し最適解の出現確率を高くする。
3. エネルギーの観測をすることにより状態遷移過程においても解の抽出を行なう。

2.4. 状態空間制限によるボルツマンマシンの効率化

問題の設定によっては、解空間に対してボルツマンマシンの状態空間が冗長性をもつことがある。この時、次に述べるような理由から、状態空間を制限して冗長性を無くした方が効率的であると考えられる。

まず、状態空間の制限を行なわない場合、解でない状態の出現確率が低くなるようにエネルギー関数が設定されなくてはならないが、このことは同時に極を生成する原因となると考えられる。もう一つは、解の個数は状態空間の定義によらず不変であるから、状態空間を小さくするほど解の現れる確率が高くなるであろうという予測である。

3. MIS(最大独立節点集合)抽出問題⁽¹⁾

与えられた無向グラフ $G=(V,E)$ { V は節点集合; E は枝集合 } 中の最大独立節点集合 (Maximum Independent Set; 以下MISと記述) とは $V' \subseteq V$ によって張られる誘導部分グラフ $G'=(V',E')$ (但し, $E'=\{(p,q) \in E \mid p,q \in V'\}$) が空グラフであるような V' のうち要素数が最大のものをいう。

3.1. エネルギー関数の構成

MIS抽出問題の場合、目的項を $|V'|$, 条件制約項を $|E'|$ として、その1次結合により eq.(3.1) のようなエネルギー関数を構成することが出来る⁽²⁾。

$$f(V') = \lambda |E'| - |V'| \quad (\lambda > 1) \quad (3.1)$$

($\lambda > 1$ は $V' \in \text{MIS}$ に於けるエネルギー関数の極小化条件を満足するパラメータ。)

3.2. 極の緩和について

極を緩和する手法として、目的項 ($|V'|$) が増加するような状態の遷移に対して状態の受入れ確率を高くする手法を用いる。従来のボルツマンマシンでは状態遷移によるエネルギーの変化量によって遷移確率が決定されるが、ここではエネルギーの変化量に緩和項を付加して遷移確率を計算する。 $V' \rightarrow W'$ の遷移を考えると、緩和項は eq.(3.2) で表されるものとする。

$$\text{緩和項} = \frac{\lambda}{2} (|W'| - |V'| + 1) \quad (3.2)$$

3.3. アルゴリズム RaMIS

状態遷移を確率的に決定する事は従来のボルツマンマシンによるものと基本的に同じであるが、温度を定数に固定する点と、最適解の抽出方法が異なっている。 $|V'|$, $|E'|$ を観測し、状態遷移過程に於ける $|E'| = 0$ である時の $|V'|$ の最大値を(近似)最大独立節点集合の位数としている。 σ は次の様に定義される p により誘導される i の近傍を返す関数である。

```
function  $\sigma(i,p)$ 
begin
  if  $p \in i$  then return  $i - \{p\}$ 
  else return  $i + \{p\}$ 
end.
```

尚、確率の決定に関してはロジスティック関数

$$\text{LOGISTIC}(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)}$$

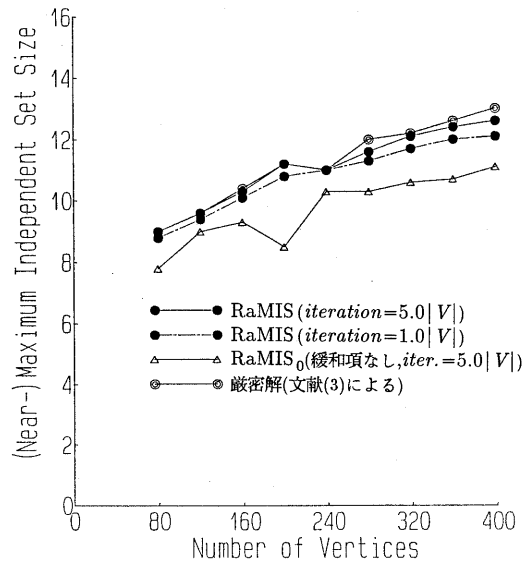
RaMIS($G=(V,E), T, \text{iteration}$)

```
begin
   $V' \leftarrow \phi$ ;
   $\text{MIS} \leftarrow \phi$ ;
   $t := 0$ ;
  while  $t < \text{iteration}$  do
    begin
       $t := t + 1$ ;
       $Y \leftarrow V$ ;
      while  $Y \neq \phi$  do
        begin
          select  $p \in Y$ ;
           $Y \leftarrow Y - \{p\}$ ;
           $W' \leftarrow \sigma(V', p)$ ;
          randomly with probability *1
             $V' \leftarrow W'$ 
          if  $|E(V')| = 0$  and  $|\text{MIS}| < |V'|$  then
             $\text{MIS} \leftarrow V'$ 
        end
      end
    end
end.
```

$$*1 \text{ LOGISTIC}\left(\frac{f(V') - f(W') + \frac{\lambda}{2} (|W'| - |V'| + 1)}{T}\right)$$

3.4. 実験結果

枝の存在確率(Probability)0.50に対して、80節点から400節点まで40節点おきにそれぞれ5つのランダムグラフ⁽³⁾を発生させ、MISの抽出をおこなった。各ランダムグラフに対しては乱数系列を変えて10回の試行をおこなった。(温度パラメータ T は0.28, λ は2.0に固定)



4. n_queen(n クイーン配置)問題への応用

ランダムグラフのMIS抽出実験から極の緩和の効果は明らかである。入力グラフに対する極が十分に緩和される場合、さらに温度パラメータを小さくした方が効率的であると予測される。ここでは、温度パラメータを0にして状態遷移を決定的にした場合を示す。

4.1. n_queen問題とMIS抽出問題

n_queen問題とは $n \times n$ ($n > 3$)のます目に n 個の queen を配置する問題である。但し、各queenの縦、横、斜方向のます目には他の queen が存在してはならないという制約を課す。(Fig.4.1)

n_queen問題は以下の方法によりMIS抽出問題に帰着される。 $n \times n$ のます目を n^2 個の節点に対応させる。全ての節点 i について、節点 i の縦、横、斜方向のます目に相当する節点に枝を張る⁽⁴⁾。(Fig.4.2)

この様にして作成されたグラフのMISは、queen の存在し得るます目に対応した節点集合となる。

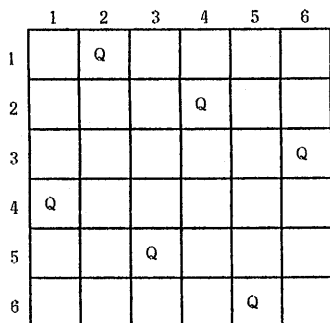


Fig.4.1 6 queen問題の解の1例

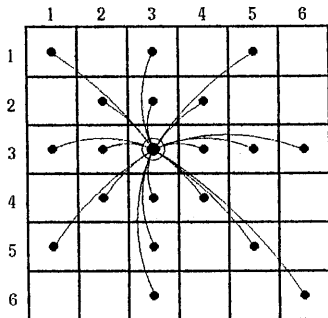


Fig.4.2 節点(3,3)から張られる枝

4.2. アルゴリズムQUEEN1

アルゴリズムは局所探索を基本にしているが、エネルギーの等しい時にも状態遷移を行なうのが異なる点である。 $C_1(n)$ は n^2 個の節点の集合を表す。例えば、 $C_1(4) = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (4,4)\}$ となる。 i_{start} は初期状態(状態は節点の集合で表す)、 σ, f はMISの章で定義した関数と同じである。

QUEEN1 ($n, i_{start}, iteration$)

```

begin
  X ← C1(n);
  i ← istart;
  t := 0;
  repeat
    Y ← X;
    while Y ≠ φ do
      begin
        select p ∈ Y;
        Y ← Y - {p};
        j ← σ(i, p);
        if f(i) - f(j) +  $\frac{\lambda}{2}(|j| - |i| + 1) \geq 0$  then
          i ← j;
        end
      end
    t := t + 1;
  until t ≥ iteration or |i| = n and f(i) = -n
end.

```

4.3. 計算機実験

任意の i_{start} に対して、解が求まる保証はないので、iterationにより停止できるようにする。今回の実験では $i_{start} = \phi$ として実験を行なったが、 $4 \leq n \leq 100$ (n は整数)とTbl.4.1の範囲に於いては、全て解が求まった。 i_{start} を変更することにより、異なる解を抽出することが可能であり、 $i_{start} = \phi$ で解が求まらないときは適当な i_{start} を選ばばよい。

(実験には、SUN SPARC station 1 (12.5 MIPS)使用)

アルゴリズムQUEEN1の実行時間	
n	CPU Time (sec)
100	1.22
200	4.27
500	145
1000	2940
2000	16000
5000	145000

Tbl.4.1

5. 状態空間制限を用いたn_queenの解法

5.1. 状態空間と解空間

k 個のユニットから構成されるボルツマンマシンは、各ユニットが2値状態をもつので、状態空間の大きさは 2^k となる。

前章ではn_queen問題は節点数 n^2 のグラフ上に展開された。これを2値ボルツマンマシンで解く場合、ボルツマンマシンの状態空間の大きさは 2^{n^2} (n^2 bit)となる。しかしながら、n_queen問題の任意の解を表現するのにこれほどの空間は必要としない。各列にはqueenは必ず1つのみ存在するので、各列にあるqueenの行の位置は、 $\log n$ bitで表すことが出来る。全体で n 列存在するので、 $n \cdot \log n$ bit あれば全ての解を表現可能である。

5.2. 状態空間制限を導入したアルゴリズム

前の項から、ボルツマンマシンにより、n_queen問題をMIS問題に帰着させて解く方法では、表現空間が解空間に対して冗長性をもつ事が分る。

ここでは、状態を各列に於けるqueenの行位置の順序付き集合で表し、状態の遷移は二つの列の交換という形で行なう。(Fig.5.1)

5.3. アルゴリズムQUEEN2

$C_2(n)$ は1から n までの2整数のすべての組合わせの集合を表す。例えば $C_2(3) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ となる。 i_{start} は初期状態(状態は順序付き集合で表す)、 $\pi(i, p = \{u, v\})$ は順序付き集合 i の u 番目の要素と v 番目の要素を交換して得られる順序付き集合を返す関数とする。

```

QUEEN2( $n, i_{start}, iteration$ )
begin
   $X \leftarrow C_2(n)$ ;
   $i \leftarrow i_{start}$ ;
   $t := 0$ ;
  repeat

     $Y \leftarrow X$ ;
    while  $Y \neq \phi$  do
      begin
        select  $p \in Y$ ;
         $Y \leftarrow Y - \{p\}$ ;
         $j \leftarrow \pi(i, p)$ ;
        if  $f(i) \geq f(j)$  then
           $i \leftarrow j$ 
        end
         $t := t + 1$ ;
      until  $t \geq iteration$  or  $f(i) = -n$ 
    end.
  
```

5.4. 計算機実験

今回の実験では $i_{start} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $iteration = 25$ として実験を行なったが、 $4 \leq n \leq 1000$ とTbl.5.1の範囲に於いて $n = 6$ 以外全て解が求まった。 i_{start} を変更することにより、異なった解を抽出することが可能であることはQUEEN1と同様である。(計算機は4.3と同一のもの)

アルゴリズムQUEEN2の実行時間	
n	CPU Time (sec)
100	0.33
200	1.32
500	5.50
1000	33.8
2000	135
5000	584
10000	3630
20000	14900

Tbl.5.1

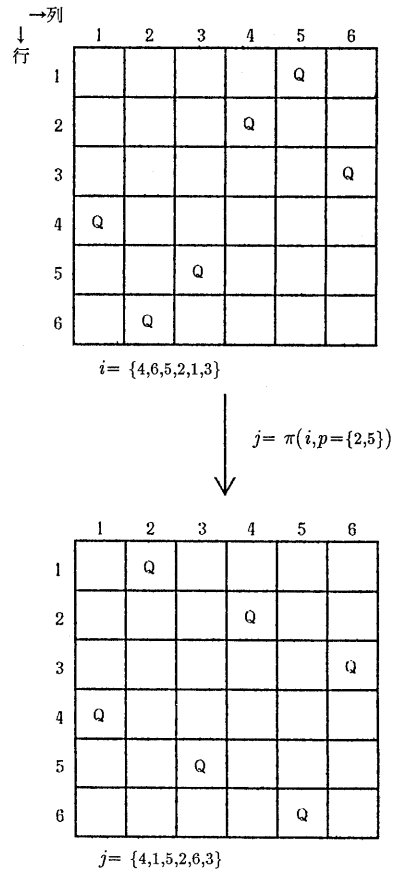


Fig.5.1 状態遷移例

6. おわりに

n -queen問題に対して2つの新しいアルゴリズムの提案と実験的評価を行なった。実験結果から、従来のボルツマンマシンによる方法⁽⁵⁾と比較して、どちらのアルゴリズムもかなり効率的であると言えよう。QUEEN1に用いた概念は、MIS抽出問題に帰着される他の問題に対しても幅広く応用できる可能性をもっている。一方、QUEEN2に用いた概念は、実験結果から、ボルツマンマシンが冗長な状態空間をもつ場合に非常に有効である事を示している。

謝辞

計算機実験に際して、ご助力いただいた、本学小野里好邦助教授に深く感謝いたします。

文献

- (1) 山田,富田,高橋:"近似最大クリークを抽出するランダム化アルゴリズムの実験的評価" 1990年春季信学全大 D-6 (1990.3)
- (2) Emile Arts and Jan Korst:"Simulated Annealing and Boltzmann Machines" JOHN WILEY & SONS (1989)
- (3) 富田,藤井:"最大クリーク抽出の効率化手法とその実験的評価" 電子通信学会論文誌(D),Vol.J68-D,No.3,pp.221-228 (1985.3)
- (4) 阿江忠:"連想をコントロールするアルゴリズム" bit,Vol.22,No.3,pp.304-311, 共立出版 (1990.3)
- (5) 秋山,梶浦:"ボルツマンマシンとNクイーン問題" bit,Vol.22,No.3,pp.340-341, 共立出版 (1990.3)