記　　号　　処　　理　60－2
プログラミング―言語・基礎・実践―　2－2
（1991.　6.　21）

N-クイーン問題の解について

秋葉 澄孝

電子技術総合研究所

本報告では、まず N-クイーン問題の基本的な配置を定義し、この配置が N-クイーン問題の解になる条件を明らかにする。次に、今までに発見されている明示的な解はこの配置の変形とみなせることを示し、その結果を用いて新しい解を求める。さらに、これらの解が点対称になるための条件を明らかにし、すべての N ($\neq 2, 3$) に対して N-クイーン問題の点対称な解が存在することを示す。

Explicit Solutions of the N-Queens Problem

Sumitaka Akiba

Electrotechnical Laboratory

1-1-4, Umezono, Tsukuba, Ibaraki, 305, Japan

In this paper, we propose a set of basic arrangements of the N-queens problem, and investigate the conoditions under which they become solutions of the N-queens problem. Then, we point out that the explicitly given solutions discovered so far can be considered just as some transformed arrangements, and, by using this result, derive new solutions. Finally, after discussing about the conditions for these new solutions to be point symmetric, we prove that there are point symmetric solutions of the N-queens problem for all N ($\neq 2, 3$).

1 はじめに

N-クイーン問題は古典的な組合せ探索問題であり、現在では様々な手法を用いた探索プログラムの評価などに用いられている [6, 9]。一方、あまり知られていない事実だが、N-クイーン問題の明示的な解が既に幾つか求められている。従って N-クイーン問題は探索プログラムの例題としては適切でないという指摘もある [2]。しかし、性質が良く分かっている問題を例題として用いることは、プログラムの良い性能評価につながると我々は考える。従って N-クイーン問題の性質を調べ、プログラムの評価に用いることは重要である。

本報告では、現在までに発表されている N-クイーン問題の明示的な解の幾つかについて、点対称な解との関係を中心にして述べる。

2 N-クイーン問題の解

N-クイーン問題とは与えられた N に対して「N 行 N 列の『チェス盤』の上に N 個のクイーンの駒をどのクイーンも互いに他のクイーンの利き筋に入らないように配置する」問題である。本報告では N 行 N 列の「チェス盤」を格子点の集合

$$\left\{(x,\ y) \,\middle|\, x,\ y = 0, \ldots, N-1\right\}$$

で表し、駒の配置を格子点の部分集合で表す。従って、配置 S が N-クイーン問題の解であるとは、S が以下の 3 つの条件を満たすことである。

$$S \subset \left\{(x,\ y) \,\middle|\, x,\ y = 0, \ldots, N-1\right\}$$

$$|S| = N$$

すべての $(x,\ y),\ (x',\ y') \in S$ に対して

$$(x,y) \neq (x',y') \Rightarrow \begin{cases} x \neq x' \\ y \neq y' \\ x+y \neq x'+y' \\ x-y \neq x'-y' \end{cases}$$

$N = 2,\ 3$ の場合にはそのような配置は存在せず、$N = 1$ の場合には自明な配置しか存在しないので、本報告では $N \geq 4$ の場合について述べる。

また、N 行 N 列の盤上の配置 S が点対称であるとは、S が

$$(x,\ y) \in S \Rightarrow (N-1-x,\ N-1-y) \in S$$

を満たすことである。

Abramson ら [1] によると、Yaglom[10] はすべての N に対する N-クイーン問題の解を発見した (図 1、図 2、図 3)。詳しく述べると、Yaglom は偶数を 2 つの場合に分けてそれぞれの場合の解と、それらを用いて奇数の場合の解を求める方法を発見した。

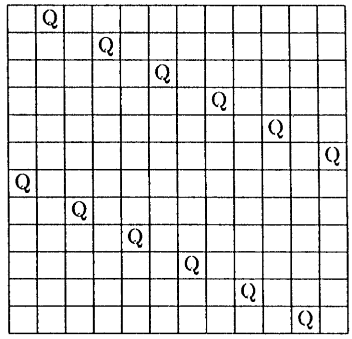

図 1: $N = 12$ の場合の Yaglom の解

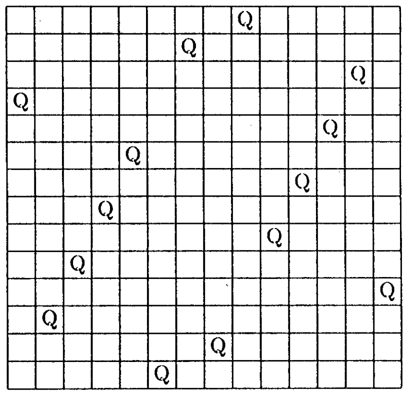

図 2: $N = 14$ の場合の Yaglom の解

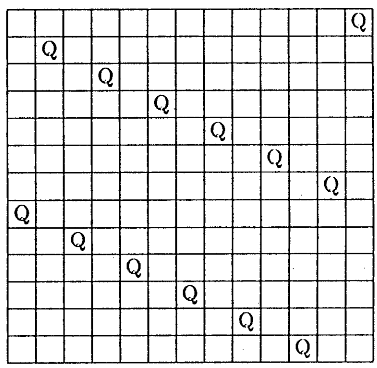

図 3: $N = 13$ の場合の Yaglom の解

Yaglom が発見した N が偶数の場合の N-クイーン問題の解は、以下のように表すことができる。

$N \equiv -2,\ 0 \pmod 6$ の場合

$$Y_{1N} = \left\{ \left(2t,\ \frac{N}{2} - 1 - t\right) \,\middle|\, t = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \right\} \cup \left\{ (1 + 2t,\ N - 1 - t) \,\middle|\, t = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \right\}$$

$N \equiv 2 \pmod 6$ の場合

$$\begin{aligned} Y_{2N} = &\left\{ (0,\ N - 4) \right\} \\ &\cup \left\{ (1 + t,\ 2 + 2t) \,\middle|\, t = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 4 \right\} \\ &\cup \left\{ \left(\frac{N}{2} - 2,\ 0\right), \left(\frac{N}{2} - 1,\ N - 2\right) \right\} \\ &\cup \left\{ \left(\frac{N}{2},\ 1\right), \left(\frac{N}{2} + 1,\ N - 1\right) \right\} \\ &\cup \left\{ \left(\frac{N}{2} + 2 + t,\ 5 + 2t\right) \,\middle|\, t = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 4 \right\} \\ &\cup \left\{ (N - 1,\ 3) \right\} \end{aligned}$$

図 1、図 2 からも分かるように、これらの解は点対称である。

また、これらの解には対角線上に駒がない。従って盤の外側に行と列を 1 つずつ追加して、その交点に駒を追加すると、N が 1 つ大きい場合の N-クイーン問題の解を作ることができる。Yaglom はこの方法で N が奇数の場合の解を求めた (図 1、図 3)。

偶数の解は点対称なので、駒を追加できる位置は盤の右上と右下の 2 か所であると考えて良い。つまり Yaglom が発見した N が奇数の場合の解は

$$Y'_{iN} = Y_{iN-1} \cup \left\{ (N - 1,\ N - 1) \right\}$$

$$Y''_{iN} = \left\{ (x,\ y + 1) \,\middle|\, (x,\ y) \in Y_{iN-1} \right\} \cup \left\{ (N - 1,\ 0) \right\}$$

但し、

$N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合は $i = 1$

$N \equiv 3 \pmod 6$ の場合は $i = 2$

である。

Yaglom が発見した解は、偶数の場合のものは点対称だが奇数の場合のものは点対称ではない。しかし、$N \neq 2, 3$ の場合には点対称な解が存在すると推測されている [13]。つまり、Yaglom の結果から偶数の場合には点対称な解が存在するのはわかったが、奇数の場合にも点対称な解が存在するかどうかわかっていなかったのである。

我々は奇数 N を 3 つの場合に分けて、それぞれの場合の点対称解を発見した。しかし、その後の調査と考察により、それらは Chandra[3] と Falkowski ら [4] が発見した解の拡張であることがわかった [12]。しかも、我々が知っている N-クイーン問題の明示的な解 [1, 4, 5, 8, 10, 12] はすべて、Chandra が発見した配置の変形とみなせることがわかった。

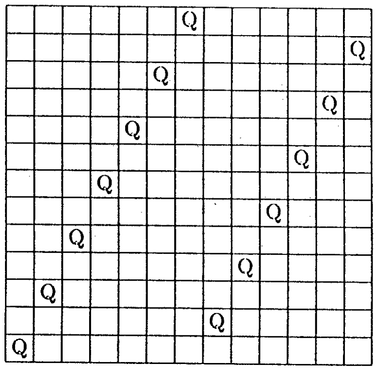

図 4: 基本解の例 ($N = 13,\ a = 2,\ b = 0$)

以下の章では Chandra が発見した配置とそれを変形した配置の性質、および Chandra の配置の変形から得られる N-クイーン問題の解、特に点対称な解について述べる。

3 Chandra の解

本章では Chandra が発見した解[1] とその性質について述べる。

$N,\ a,\ b$ を任意の整数 (ただし $N \geq 1$) とする。このとき駒の配置 $C_N^{a,b}$ を以下のように定義する。

$$C_N^{a,b} = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, \begin{array}{l} x,\ y = 0, \ldots, N - 1 \\ y \equiv ax + b \pmod N \end{array} \right\}$$

本報告では、この配置を N-クイーン問題の基本配置と呼ぶ[2]。また、N-クイーン問題の解の条件を満たす基本配置を N-クイーン問題の基本解と呼ぶ (図 4)。

基本配置 $C_N^{a,b}$ が N-クイーン問題の解であるための必要十分条件は

$$a,\ a \pm 1 \text{ はそれぞれ } N \text{ と互いに素} \qquad (1)$$

である。また、この条件 (1) を満たす a が存在するための必要十分条件は

$$N \equiv \pm 1 \pmod 6$$

である。従って、$N \not\equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合には基本配置は解にならない。

Chandra[3] は、$N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合に a を適切な値にとれば基本配置 $C_N^{a,b}$ が N-スーパークイーン問題の

[1] これより先に Pólya が発表しているかも知れない。

[2] Gardner[11] によると、文献 [7] に $C_N^{2,b}$ に関する記述がある。

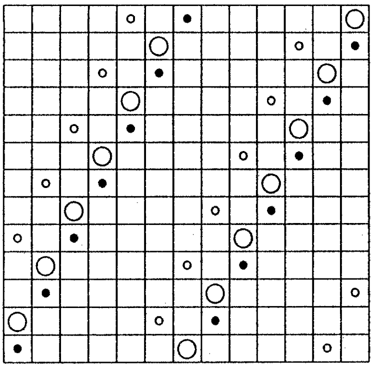

図 5: 基本解の平行移動 ($N = 13$)

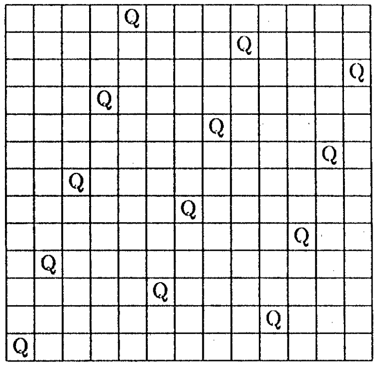

図 6: 基本解の例 ($N = 13,\ a = 3,\ b = 0$)

解になることを示した。本報告では、N-スーパークイーン問題に関して「 N-スーパークイーン問題の解は N-クイーン問題の解である」とだけ述べておく。これは基本解に対して以下で述べるような配置の平行移動を行なえることを意味する。

基本配置 $C_N^{a,b}$ において、b の値を変えた配置はもとの配置全体を平行移動させた配置である。

図 5 の • は基本解 $C_{13}^{2,0}$ であり、◯ は $C_{13}^{2,1}$ である。この図からも分かるように、◯ は • を 1 行上に平行移動した配置になっている。一般に基本配置 $C_N^{a,b}$ において b の値を k 増やすと、配置全体を上方向に k 行平行移動して盤からはみ出した k 行を盤の下側に付け加えた配置になる。

また、図 5 の ∘ は $C_{13}^{2,4}$ である。これは • を左に 2 列平行移動した配置である。一般に b の値を ak 増やすと、配置全体を左方向に k 列平行移動して盤からはみ出した k 列を右側に付け加えた配置になる。

特に a が条件 (1) を満たす場合には、b を変えることにより解の条件を満たしたままで基本配置を上下左右に平行移動できる。

基本配置 $C_N^{a,b}$ において b の変化は配置の平行移動になった。もう 1 つのパラメータである a を変えると駒の飛び方を変えられる。例えば $a = 2$ の場合は「桂馬飛び」の配置であり (図 4)、$a = 3$ の場合は「大桂馬飛び」の配置になる (図 6)。

このように $N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合にはパラメータのとり方によってさまざまな解を得られる。特に、Chandra は指摘しなかったが、基本解の中には点対称な解が含まれている。

基本配置 $C_N^{a,b}$ が点対称であるための必要十分条件は

$$a - 1 \equiv 2b \pmod N \tag{2}$$

である。そして $N \equiv 1 \pmod 2$ ならば任意の a に対して条件 (2) を満たす b が存在する。従って $N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の

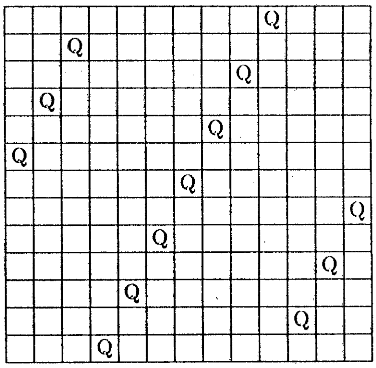

図 7: 点対称な基本解 ($N = 13,\ a = 2,\ b = 7$)

場合には a と b を条件 (1) と条件 (2) を満たすように決めることができるので、基本配置 $C_N^{a,b}$ を点対称な解にできる (図 7)。

本章では、$N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合には a を適切な値にとれば基本配置 $C_N^{a,b}$ が N-クイーン問題の解になることを示した。また、$N \not\equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合には基本配置は解にならないことも示した。しかし、基本配置をうまく変形して $N \not\equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合の解を求めることができる。

以下の章では、今までに発表されている幾つかの明示的な解を、基本配置の変形という観点から考察する。

4 Yaglom の解

2 章では Yaglom が発見した N-クイーン問題の解について、3 章では Chandra が発見した N-クイーン問題の基本解について述べた。本章では Yaglom の解を基本解の変形という観点から考察する。

Yaglom の $N \equiv -2,\ 0 \pmod 6$ の場合の解 Y_{1N} は

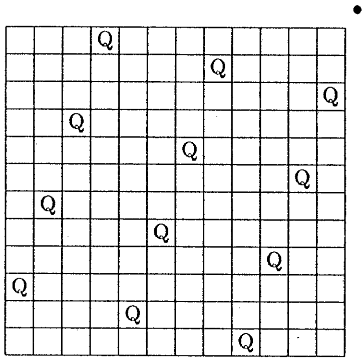

図 8: Yaglom の解の拡張 $(Y^3_{1\,12})$

基本解 $C^{N/2,N}_{N+1}$ から盤の角 (0, N) の駒と $x=0$ の列と $y=N$ の行を取り除いた配置である。つまり、

$$Y_{1N} = \left\{(x-1,\ y)\ \middle|\ (x,\ y) \in C^{\frac{N}{2},N}_{N+1},\quad x \neq 0,\ y \neq N\right\}$$

である。ここで基本解のパラメータは、盤の角に駒があるように決めれば良いので、Y_{1N} を拡張した解 Y^a_{1N} を次のように定義できる。

$N \equiv -2,\ 0 \pmod 6$ の場合

$$Y^a_{1N} = \left\{(x,\ y)\ \middle|\ (x,\ y) \in C^{a,a-1}_{N+1},\quad x,y \neq N\right\}$$

但し、a, $a \pm 1$ は $N+1$ と互いに素

Y_{1N} は Y^2_{1N} を 90° 回転させた配置である。また、図 8 はこの解の例であり、• は取り除かれた駒である。なお、Y_{1N} が点対称だったように Y^a_{1N} も点対称である。

N-クイーン問題の解から角の駒を取り除いて新しい解を得る方法は Abramson ら [1] が指摘した。Abramson らの成果については 5 章で述べる。

Yaglom の $N \equiv 2 \pmod 6$ の場合の解 Y_{2N} も以下で述べるように基本解の変形とみなせる。

まず基本解 $C^{2,0}_{N-1}$ の右上に駒を追加する。図 9 の • は $N=14$ の場合の例である。この配置では (0, 0) と ($N-1$, $N-1$) の駒が右上がり方向の制約条件を満たしていない。そこで制約条件を満たすように $y=0$ の行と $y=N-4$ の行を交換し、$y=N-1$ の行と $y=3$ の行を交換した配置が Y_{2N} である (図 2、図 9 の ○)。

この解 Y_{2N} も次のように拡張できる。まず、N は基本配置 $C^{2,0}_{N-1}$ が解になるような値であれば良いので、$N \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ に拡張できる。また、Y_{2N} では $y=0$ と $y=N-4$ の行を交換したが、他の行を交換しても解になる。以下では $N \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ と仮定して、これを示す。

$y=0$ と $y=k$ の行を交換すると、(0, 0) の駒が (0, k) に移動する。この駒が右上がり方向の制約条件を満たすためには $k \geq N/2$ 、右下がり方向の制約条件を満たすためには $k \equiv N-1 \pmod 3$ でなければならない。

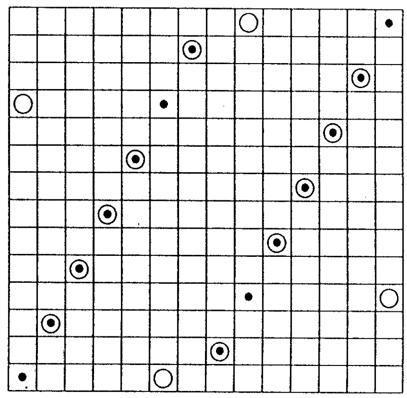

図 9: 基本解への駒の追加と行の交換 ($N=14$)

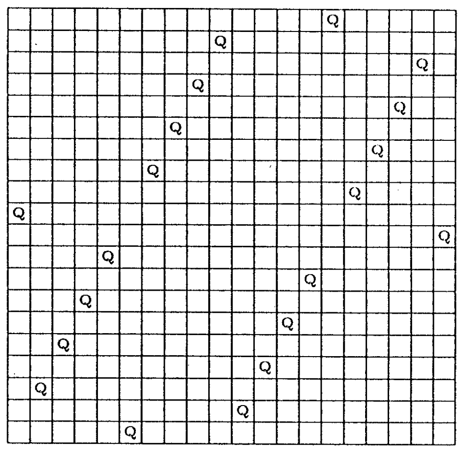

図 10: Yaglom の解の拡張 $(Y^{10}_{2\,20})$

そこで、これらの条件を満たすように k をとって $y=0$ と $y=k$ の行を交換すると、$y=k$ の行にあった駒は、$k \equiv N-1 \pmod 6$ の場合には $((N-1+k)/2,\ 0)$ に、$k \equiv N-4 \pmod 6$ の場合には $(k/2,\ 0)$ に移動する。

$y=0$ と $y=k$ の行を交換した結果得られる配置は、$k \equiv N-1 \pmod 6$, $k \neq N-1$ の場合には解の条件を満たしている。しかし、$k=N-1$ の場合には (0, $N-1$) と ($N-1$, 0) の駒が右下がり方向の制約条件を満たさない。また、$k \equiv N-4 \pmod 6$ の場合は $(k/2,\ 0)$ と $(N-1-k/2,\ N-1-k)$ の駒が右上がり方向の制約条件を満たさない。しかし後者の場合には、更に $y=N-1-k$ と $y=N-1$ の行を交換すると解の条件を満たすように

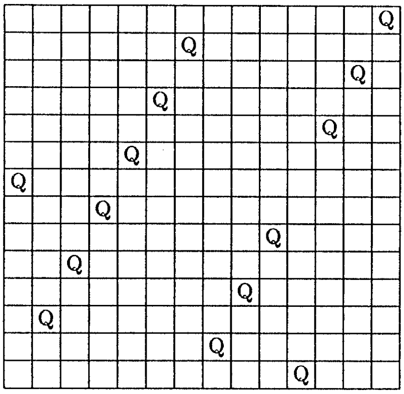

図 11: Yaglom の解の拡張 ($Y^{7}_{3\,14}$)

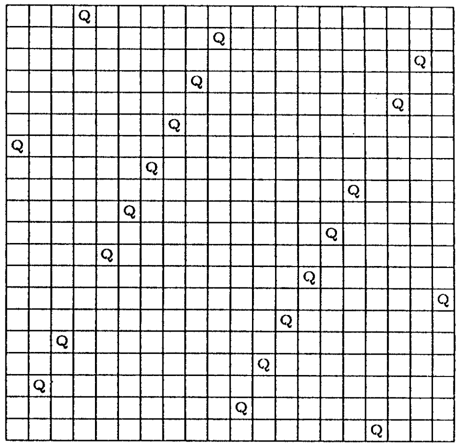

図 12: Yaglom の解の拡張 ($Y^{6,13}_{4\,20}$)

なる。

Yaglom の解 Y_{2N} を拡張したこれらの解は次のように定義できる。

$N \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ の場合

$$Y^{k}_{2N} = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, \begin{array}{l} (x,\ y) \in C^{2,0}_{N-1} \\ x \neq 0,\ k,\ N-1-k \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ \left(0,\ k\right),\ (\frac{k}{2},\ 0),\ \left(N-1-\frac{k}{2},\ N-1\right), \right.$$

$$\left. (N-1,\ N-1-k) \right\}$$

但し、

$$\frac{N}{2} \leq k < N-1, \quad k \equiv N-4 \pmod 6$$

$N \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ の場合

$$Y^{k}_{3N} = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, \begin{array}{l} (x,\ y) \in C^{2,0}_{N-1} \\ y \neq 0,\ k \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ (0,\ k),\ \left(\frac{N-1+k}{2},\ 0\right),\ (N-1,\ N-1) \right\}$$

但し、

$$\frac{N}{2} \leq k < N-1, \quad k \equiv N-1 \pmod 6$$

Y_{2N} は Y^{N-4}_{2N} である。また、k の値にかかわらず Y^{k}_{2N} は点対称だが (図 10)、Y^{k}_{2N} は点対称ではない (図 11)。

Y^{k}_{3N} の $y = h$ と $y = N-1$ の行を交換すると更に拡張した解が得られる。この解は次のように定義できる。

$N \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ の場合

$$Y^{h,k}_{4N} = \left\{ (x,\ y) \,\middle|\, \begin{array}{l} (x,\ y) \in C^{2,0}_{N-1} \\ y \neq 0,\ h,\ k \end{array} \right\}$$

$$\cup \left\{ (N-1,\ h),\ \left(\frac{h}{2},\ N-1\right), \right.$$

$$\left. (0,\ k),\ \left(\frac{N-1+k}{2},\ 0\right) \right\}$$

但し、

$$0 < h \leq \frac{N}{2} - 1, \quad h \equiv 0 \pmod 6 \tag{3}$$

$$\frac{N}{2} \leq k < N-1, \quad k \equiv N-1 \pmod 6$$

$$\frac{h}{2} + k \neq N-1, \quad 2h + k \neq N-1 \tag{4}$$

h の条件 (3) は Y^{k}_{3N} の k と同様な議論によって求められる。また条件 (4) は $(h/2,\ N-1)$ と $(0,\ k)$ および $(N-1,\ h)$ と $((N-1+k)/2,\ 0)$ の駒が右上がり方向の制約条件を満たすためのものである。

$Y^{h,k}_{4N}$ は $h + k = N-1$ の場合には点対称である (図 12)。$h + k \neq N-1$ の場合には $Y^{h,k}_{4N}$ は点対称ではないが、そのような解は $N \geq 38$ でなければ存在しない。例えば $Y^{18,31}_{4\,38}$ は点対称ではない。

以上のように、Yaglom の解やそれを拡張した解は、基本配置の行を交換した配置である。実際、N-クイーン問題の解を求める場合に、行や列の交換は重要な操作であることが知られている。本章では Yaglom の解のような特別な形の解を求める場合に有効であることを示した。この他、行の交換を用いてほとんど $O(N)$ で解を探索するアルゴリズム [9] が報告されている。

5 Abramson らの方法

Abramson ら [1] は N-クイーン問題の既知の解を変形して新しい解を求める方法を２つ示した。

１つは既知の解が盤の角に駒がある配置の場合に、角の駒を取り除いて新しい解を求める方法である。この方法は 2 章で述べた。

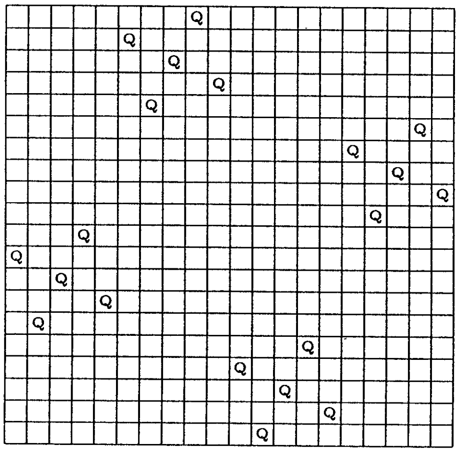

図 13: Abramson らの方法 ($N = 20,\ A = 4,\ B = 5$)

もう1つは、N-クイーン問題の解と N-スーパークイーン問題の解を用いて、N-クイーン問題の新しい解を求める方法である。以下ではこの方法について簡単に述べる。

Q_A を $N = A$ の場合の N-クイーン問題の解、S_B を $N = B$ の場合の N-スーパークイーン問題の解とする。Abramson らは Q_A と S_B を用いて得られる配置

$$Q_N = \left\{ (x_1 B + x_2,\ y_1 B + y_2) \;\middle|\; \begin{array}{l} (x_1,\ y_2) \in Q_A \\ (x_2,\ y_2) \in S_B \end{array} \right\}$$

が、$N = A \cdot B$ の場合の N-クイーン問題の解になることを示した。特に Q_A と S_B が点対称な解ならば、Q_N も点対称な解になる (図 13)。

Abramson らはこの方法で得られる解 Q_N を **decomposition solution** と呼んだ。

更に Abramson らはこの2つの方法を併用し、基本解を用いて $N \neq 8, 9, 14, 15, 26, 27, 38, 39$ の場合の N-クイーン問題の解を求める方法を示した。しかし、この方法は点対称解とは関係がないと思われるので、これ以上は触れない。

6 Falkowski らの解

Falkowski ら [4] は、N を

(i) $N \equiv -2, -1, 0, 1 \pmod 6$
(ii) $N \equiv 2, 3 \pmod{12}$
(iii) $N \equiv 8 \pmod{12}$
(iv) $N \equiv 9 \pmod{24}$
(v) $N \equiv 21 \pmod{24}$

の5つの場合に分けて、それぞれの場合の N-クイーン問題の解を発表した。これらの解のうち、(i) の場合の解は3章と4章で述べた $C_N^{2,0}$ および Y_{1N}^2 と同じである。また、他の場合の解 (図 14、図 15、図 16、図 17) は $N \equiv 3 \pmod 6$ の場合の基本配置に、ある基本的な変形を加えたのものとみなせる。

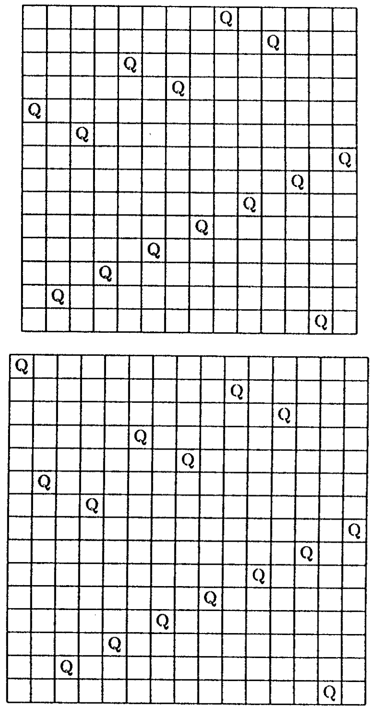

図 14: Falkowski らの $N \equiv 2,\ 3 \pmod{12}$ の場合の解 ($N = 14,\ 15$)

本章では、この基本的な変形について考察し、それから得られる解、特に点対称解と Falkowski らの解について述べる。

$N \equiv 3 \pmod 6$ の場合どんな a をとっても a, $a \pm 1$ のどれかは N と共通因数を持つので、基本配置 $C_N^{a,b}$ が解にならない。特に $a = 2$ の場合は $a + 1$ と N は共通因数を持つ。これは、桂馬飛びの配置が右下がり方向の制約条件を満たさないことを意味する (図 18 の •)。しかし、行の交換と配置の平行移動を行なうことによって、解の条件を満たすように変形できる。

図 18 の • は $N = 15$ の場合の基本配置 $C_{15}^{2,0}$ であり、○ は $y = 4i$ の行と $y = 4i + 2$ の行を交換した配置である。この変形の結果 ○ が満たしていない制約条件は $(1,0)$ と $(14,13)$ の駒による右上がり方向の制約条件だけである。そこで3章で述べた配置の平行移動を行ない、右上がり方向の制約条件を満たすようにする。

例えば、配置全体を左に2列平行移動して、はみ出した2列を右端につけると解が得られる (図 19 の ○)。この解は基本配置 $C_{15}^{2,4}$ (図 19 の •) の行を交換した配置であるとみなすこともできる。

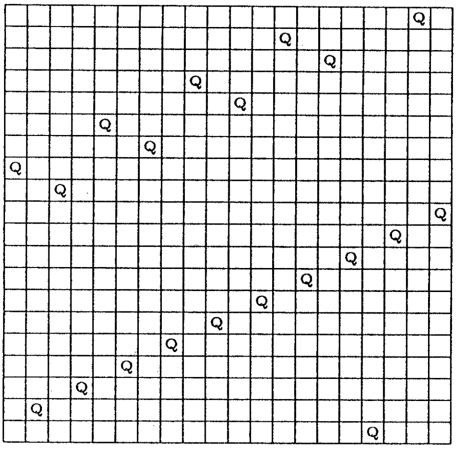

図 15: Falkowski らの $N \equiv 8 \pmod{12}$ の場合の解 ($N = 20$)

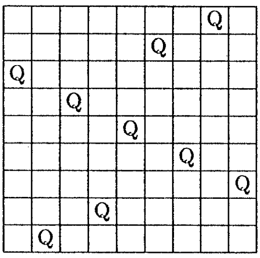

図 16: Falkowski らの $N \equiv 9 \pmod{24}$ の場合の解 ($N = 9$)

図 19 は 2 列移動した例であった。この例では 2 列以上 6 列以下平行移動すると解になる。しかし、7 列移動すると (1, 1) と (14, 14) の駒が右上がり方向の制約条件を満たさない (図 20)。一般の N に関していえば、2 列以上 $(N+1)/2-2$ 列以下移動した場合には解になる。

これで $N = 15 \equiv 3 \pmod{12}$ の場合の解の求め方がわかった。ここでは $N \equiv 3 \pmod 6$ の場合を考察しているので、次に $N \equiv 9 \pmod{12}$ の場合について述べる。

$N \equiv 9 \pmod{12}$ の場合は基本配置の $y = 4i + 1$ の行と $y = 4i+3$ の行を交換する。そして、右上がり方向の制約条件を満たすように配置を平行移動すれば良い。$N \equiv 3 \pmod{12}$ の場合と同様に、適切な基本配置を選んでから行を交換するとみなすこともできる。

この例として $N = 21$ の場合について述べる。まず基本配置 $C_{21}^{2,1}$ の行を交換する (図 21 の ∘)。この配置では (1, 1) と (20, 20) の駒が右上がり方向の制約条件を満たしていない。そこで配置全体を左に 2 列平行移動する (図 21 の ○) と制約条件を満たすようになる。この配置は基本配置 $C_{21}^{2,5}$ (図 21の •) の行を交換したとみなすこともで

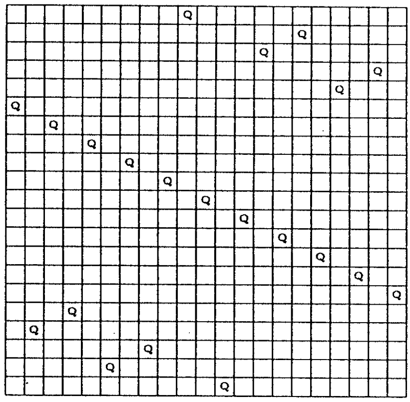

図 17: Falkowski らの $N \equiv 21 \pmod{24}$ の場合の解 ($N = 21$)

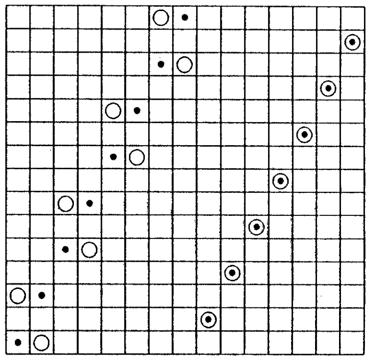

図 18: 基本配置の行の交換 ($N = 15$)

きる。

以上を一般化する。$N \equiv 3 \pmod 6$ の場合に、基本配置の行を交換して配置全体を左に k 列平行移動した配置 F_N^k を以下のように定義する。

$N \equiv 3 \pmod{12}$ の場合

$$
\begin{aligned}
F_N^k = &\left\{(x,\ y) \;\middle|\; (x,\ y) \in C_N^{2,2k},\quad y \equiv 1 \pmod 2 \right\}\\
&\cup \left\{(x,\ y+2) \;\middle|\; (x,\ y) \in C_N^{2,2k},\ y \equiv 0 \pmod 4 \right\}\\
&\cup \left\{(x,\ y-2) \;\middle|\; (x,\ y) \in C_N^{2,2k},\ y \equiv 2 \pmod 4 \right\}
\end{aligned}
$$

$N \equiv 9 \pmod{12}$ の場合

$$
\begin{aligned}
F_N^k = &\left\{(x,\ y) \;\middle|\; (x,\ y) \in C_N^{2,2k+1},\quad y \equiv 0 \pmod 2 \right\}\\
&\cup \left\{(x,\ y+2) \;\middle|\; (x,\ y) \in C_N^{2,2k+1},\ y \equiv 1 \pmod 4 \right\}\\
&\cup \left\{(x,\ y-2) \;\middle|\; (x,\ y) \in C_N^{2,2k+1},\ y \equiv 3 \pmod 4 \right\}
\end{aligned}
$$

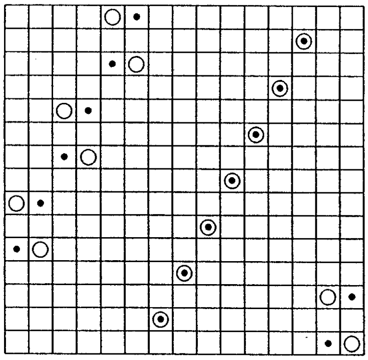

図 19: 行の交換と平行移動による解 ($N = 15$)

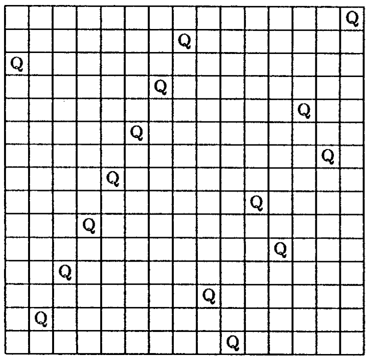

図 20: 解にならない平行移動 ($N = 15$)

この F_N^k は k の値を mod N で合同な値に変えても同じ配置になる。従って $0 \le k \le N-1$ の範囲で F_N^k が N-クイーン問題の解になるための必要十分条件は

$$N \equiv 3 \pmod{12} \text{ の場合} \quad 2 \le k \le \frac{N+1}{2} - 2$$

$$N \equiv 9 \pmod{12} \text{ の場合} \quad 2 \le k \le \frac{N-1}{2} - 2$$

である。また、k の値を

$$N \equiv 3 \pmod{12} \text{ の場合} \quad k = \frac{N+1}{4}$$

$$N \equiv 9 \pmod{12} \text{ の場合} \quad k = \frac{N-1}{4}$$

にすると、F_N^k は点対称な解になる (図 22)。

ここまでは右上がり方向の制約条件を満たすために配置を平行移動した。別の方法として、盤の角の駒を取り除く方法を用いることができる。

例えば、図 21 の ∘ の配置において、(20, 20) の駒を取り除けば $N = 20$ の場合の解が得られる。また、図 18

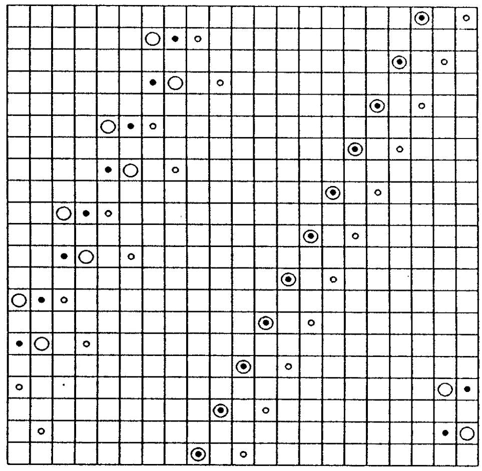

図 21: 行の交換と平行移動による解 ($N = 21$)

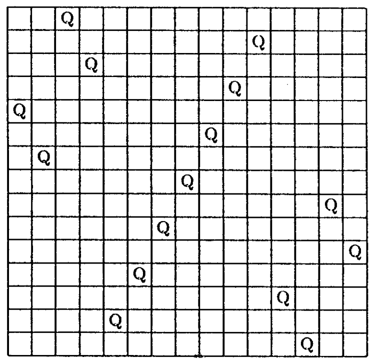

図 22: 行の交換と平行移動による点対称解 (F_{15}^{4})

の ○ を左に 1 列平行移動して (0, 0) の駒を取り除くと $N = 14$ の場合の解が得られる。

これを一般化して、$N \equiv 2 \pmod{6}$ の場合の N-クイーン問題の解 F_N' を次のように定義する。

$N \equiv 2 \pmod{12}$ の場合

$$F_N' = \left\{ (x-1,\ y-1) \;\middle|\; (x,\ y) \in F_{N+1}^1, \quad x,\ y \ne 0 \right\}$$

$N \equiv 8 \pmod{12}$ の場合

$$F_N' = \left\{ (x,\ y) \;\middle|\; (x,\ y) \in F_{N+1}^0, \quad x,\ y \ne N \right\}$$

以上の観点から Falkowski らの解を考察すると、次のようになる。

- $N \equiv -2, -1, 0, 1 \pmod{6}$ の場合

  本章前半で述べたように、

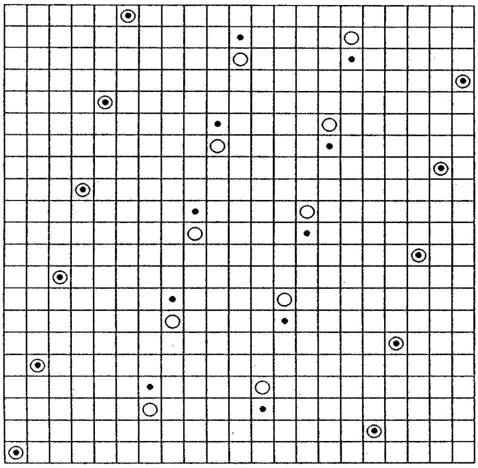

図 23: 行の交換による解 ($N = 21,\ a = 4$)

- ◦ $N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合は　$C_N^{2,0}$
- ◦ $N \equiv -2,\ 0 \pmod 6$ の場合は　Y_{1N}^2
- $N \equiv 2,\ 3 \pmod{12}$ の場合
  - ◦ $N \equiv 2 \pmod{12}$ の場合は　F'_N
  - ◦ $N \equiv 3 \pmod{12}$ の場合は

$$\left\{(x+1,\ y)\ \middle|\ (x,\ y) \in F'_{N-1}\right\}$$
$$\cup \left\{(0,\ N-1)\right\}$$

- $N \equiv 8 \pmod{12}$ の場合

$$\left\{(x-1,\ y)\ \middle|\ (x,\ y) \in F'_N,\quad x \neq 0\right\}$$
$$\cup \left\{(N-1,\ y)\ \middle|\ (0,\ y) \in F'_N\right\}$$

- $N \equiv 9 \pmod{24}$ の場合

$$F_N^{\frac{N-1}{4}}$$

- $N \equiv 21 \pmod{24}$ の場合

$$F_N^{\frac{N-1}{4}}$$

本章では $a = 2$ の場合の基本配置を考察したが、a が他の値でも適切な行を交換すると解になる場合がある (図 23)。我々は、a, $a \pm 1$ のうちの 1 つだけが N と共通因数を持つ場合には、この方法で解を求められると予想している。

7　おわりに

本報告では N-クイーン問題の基本配置とその変形から得られる N-クイーン問題の解として、

$C_N^{a,b}$	($N \equiv \pm 1 \pmod 6$ の場合)
Y_{1N}^a	($N \equiv -2,\ 0 \pmod 6$ の場合)
Y_{2N}^k, Y_{3N}^k, $Y_{4N}^{h,k}$	($N \equiv 0,\ 2 \pmod 6$ の場合)
F_N^k	($N \equiv 3 \pmod 6$ の場合)
F'_N	($N \equiv 2 \pmod 6$ の場合)

を考察した。特に、Yaglom が発見した解は Y_{1N}^2 と Y_{2N}^{N-4} であり、Falkowski らが発見した解は F'_N の変形と N が特別な値のときの $F_N^{(N-1)/4}$ であることを示した。

また、Y_{1N}^a と Y_{2N}^k は点対称な解であり、$C_N^{a,b}, Y_{4N}^{h,k}, F_N^k$ はパラメータを適切な値にとれば点対称になることを示した。従ってこれらの解を用いると、すべての N (≥ 4) に対して N-クイーン問題の点対称な解を求めるられる。

参考文献

[1] Abramson,B. & Yung,M.: Divide and Conquer under Global Constraints: A Solution to the N-Queens Problem, *J. of Parallel and Distributed Computing*, vol.6, pp.649-662, 1989.

[2] Bernhadsson,B.: Explicit Solutions to the N-Queens Problem for all N, *SIGART Bulletin*, Vol.2, No.2, p.7, 1991.

[3] Chandra,A.K.: Independent Permutations, as Related to a Problem of Moser and a Theorem of Pólya, *J. of Combinatorial Theory (A)*, Vol.16, pp.111-120, 1974.

[4] Falkowski,B. & Schmitz,L.: A Note on the Queens' Problem, *Information Processing Letters* **23**, pp.39-46, 1986.

[5] Hoffman,E.J., Loessi,J.C. & Moore,R.C.: Constructions for the Solution of the m Queens Problem, *Mathematics Magazine*, pp.66-72, 1969.

[6] Minton,S., Johnston,M.D., Philips,A.B. & Laird,P.: Solving Large-Scale Constraint Satisfaction and Scheduling Problems Using a Heuristic Repair Method, *Proc. of AAAI-90*, pp.17-24, 1990.

[7] Pólya,G.: Über die 'doppelt-periodischen' Lösungen des N-Damen-Problems, in W.Ahrens (Ed.), *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Teubner, Leipzig, pp.364-374, 1918.

[8] Reiching,M.: A Simplified Solution of the N Queens' Problem, *Information Processing Letters* **25**, pp.253-255, 1987.

[9] Sosic,R. & Gu,J.: 3,000,000 Queens in Less Than One Minute, *SIGART Bulletin*, Vol.2, No.2, pp.22-24, 1991.

[10] Yaglom,A.M. & Yaglom,I.M.: *Challenging Mathematical Problem with Elementary Solutions*, Holden-Day, San Francisco, 1964.

[11] Gardner,M.: スーパークイーン登場 (大熊正 訳), 別冊サイエンス「数学ゲーム IV」, 日本経済新聞社, pp.41-46, 1982.

[12] 秋葉澄孝: N-クイーン問題の解の１つを線形時間で求めるアルゴリズムについて, 情報処理学会第４２回全国大会講演論文集 (1), pp.87-88, 1991.

[13] 山本幸一: ８個のクィーンの問題, 数学セミナー増刊「数学１００の問題」, 日本評論社, pp.44-46, 1984.