

ユークリッド距離と回転角度を考慮した 最短経路について

安留 誠吾 増澤 利光 辻野 嘉宏 都倉 信樹

大阪大学基礎工学部情報工学科

豊中市待兼山町1番1号

あらまし 平面上の任意の2点間の最短経路を求める問題は、計算幾何学の基本的問題の一つである。本稿では、多角形の障害物と2点が与えられたとき、ユークリッド距離と回転角度の両方を考慮した評価尺度による最短経路を $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求めるアルゴリズムを提案する。また、始点と障害物が前もって与えられた場合に $O(n^2 \log n)$ 時間の前処理をしておけば、終点が与えられたとき $O(n \log n)$ 時間で最短経路が求められることも示す。ここで n は障害物の頂点の総数を表す。

和文キーワード 計算幾何学, 最短経路, 障害物, ユークリッド距離, 回転角度

Finding Shortest Paths among Obstacles Using a Combined Euclidean Distance and Rotation Angle

Seigo Yasutome Toshimitsu Masuzawa Yoshihiro Tsujino Nobuki Tokura

Department of Information and Computer Sciences
Faculty of Engineering Science, Osaka University

Toyonaka 560 Japan

Abstract The problem of finding the shortest path between two points in the plane is one of the fundamental problems in computational geometry. In this paper, given polygonal obstacles and two points, we present an algorithm for finding the shortest path in the new metric that combines the Euclidean distance and rotation angle. The algorithm runs in $O(n^2 \log n)$ time and $O(n^2)$ space, where n is the number of the vertices of obstacles. When a source point and obstacles are pre-given, queries for the shortest path from the source point to a given point can be handled in $O(n \log n)$ time after $O(n^2 \log n)$ preprocessing.

英文 key words Computational Geometry, Shortest Paths, Obstacles, Euclidean Distance, Rotation Angle

1 まえがき

障害物のある平面上の2点間の最短経路を求める問題は、計算幾何学における基本的問題の一つであり、これまでに多くの研究が行われている。この問題は求める経路の形状や距離の定義、あるいは障害物の形状の違いにより分類される。一般には、障害物と2点間の経路が交差できない(つまり、障害物の内部を通れない)環境においてユークリッド距離に関する最短経路を求める問題が研究されている(1, 2, 3, 4, 5)。また経路の形状として水平もしくは垂直な線分のみを扱う L_1 距離における最短経路問題も研究されている(6, 7, 8, 9, 17)。

文献(10, 11, 12, 13, 18)は、経路が曲がるときのコストを扱っている。しかし、これらは、曲がる時に定数コストを付加するというものである。実際には、曲がる角度に応じてコストが変わることが多い。つまり、経路が曲がる角度(回転角度)を考えた最短経路を求めたいときがある。

本稿では、多角形の障害物と2点が与えられたとき、ユークリッド距離と回転角度の両方を考慮した評価尺度による最短経路を $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求めるアルゴリズムを提案する。ここで n は障害物の頂点の総数を表す。また、始点と障害物が前もって与えられた場合に $O(n^2 \log n)$ 時間の前処理をしておけば、終点が与えられたとき $O(n \log n)$ 時間で最短経路が求められることも示す。

2 諸定義

本稿では、頂点を p_i で表し、点 p_1, p_2 を端点とする線分を $\overline{p_1 p_2}$ で表す。そして、始点、終点をそれぞれ s, t とする。

[定義 1] 障害物は単純多角形である。障害物の頂点集合を V 、 $\bar{V} = V \cup \{s, t\}$ とする。また $n = |V|$ とする。□

[定義 2] 有限個の点の系列 p_1, p_2, \dots, p_u に関して線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($i = 1, \dots, u-1$) を連結したものを p_1-p_u 経路といい、 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ で表す。ただし、 $\overline{p_{i-1} p_i}$ と $\overline{p_i p_{i+1}}$ は同一直線上に存在しない。そして、 p_1, p_u をそれぞれ経路 P の始点、終点という。また、終点を含む部分経路を陽に示したいとき、 $P(\dots, p_u)$ で表す。□

[定義 3] 経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ において、次に示す角度を頂点 p_i ($1 < i < u$) における回転角度といい θ_i で表す(図1)。

$$\theta_i = \begin{cases} \angle p_{i-1} p_i p_{i+1} - \pi & \text{if } \angle p_{i-1} p_i p_{i+1} \geq \pi \\ \angle p_{i-1} p_i p_{i+1} - \pi & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし、 $\angle p_{i-1} p_i p_{i+1}$ は頂点 p_i に対して時計回りの角度とし、反時計回りの角度を $\angle p_{i-1} p_i p_{i+1}$ とする。□

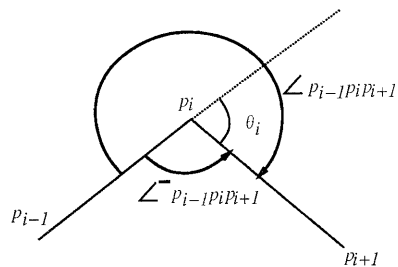


図 1: 回転角度

本稿では、次の定義のように回転角度とユークリッド距離を複合した評価尺度(以降、複合評価尺度とよぶ)の値を最小とする経路を求めるものとする。

[定義 4] 経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ の複合評価尺度の値を次のように定義する。

$$P \text{ の複合評価尺度の値} = C \sum_{i=2}^{u-1} \theta_i + D \sum_{i=1}^{u-1} \text{dist}(p_i, p_{i+1})$$

ただし、 C, D は非負の実数の定数で同時に0であることはないものとし、任意の2点 p_1, p_2 間のユークリッド距離を $\text{dist}(p_1, p_2)$ で表すものとする。□

[定義 5] 線分と線分が互いの端点以外で、ちょうど1つの共有点を持つとき交差するといい、共有点を交点という。□

[定義 6] 線分 \overline{pq} が障害物の境界の線分と交差しないとき p と q は互いに見える、または、 q は p から見えるという。□

[定義 7] 頂点 p から見える \bar{V} に属する頂点の集合 $\text{vis}(p)$ を次のように定義する。

$$\text{vis}(p) = \{z \in \bar{V} \mid z \text{ は } p \text{ から見える}\}$$

そして、 $d_i = |\text{vis}(p_i)|$ とする。 $\text{vis}(p) = \{z_1, z_2, \dots, z_w\}$ とするとき、 $z_i \in \text{vis}(p)$ に対して、頂点の集合 $\text{cw}(p, z_i)$ を次のように定義する。

$$\text{cw}(p, z_i) = \{z_k \mid \angle z_i p z_k = \min_{1 \leq j \leq w, j \neq i} \angle z_i p z_j, 1 \leq k \leq w, i \neq k\}$$

つまり、 $\text{cw}(p, z_i)$ は p を端点とし z_i を含む半直線を時計回りに回転させたとき、最初に半直線に含まれる $\text{vis}(p)$ の要素である。

同様に、 $\text{ccw}(p, z_i)$ を定義する。

$$\text{ccw}(p, z_i) = \{z_k \mid \angle z_i p z_k = \min_{1 \leq j \leq w, j \neq i} \angle z_i p z_j, 1 \leq k \leq w, i \neq k\}$$

つまり、 $ccw(p, z_i)$ は、 p を端点とし z_i を含む半直線を反時計回りに回転させたとき、最初に半直線に含まれる $vis(p)$ の要素である。

また、 $acw(p, z_i)$ を次のように定義する。

$$acw(p, z_i) = \{z_k | \angle z_i p z_k - \pi = \min_{1 \leq j \leq w, j \neq i} (\angle z_i p z_j - \pi), \angle z_i p z_j \geq \pi, 1 \leq k \leq w, i \neq k\}$$

つまり、 $acw(p, z_i)$ は、経路 $z_i p z_k$ の p における回転角度の候補となる。

同様に、 $accw(p, z_i)$ を定義する。

$$accw(p, z_i) = \{z_k | \angle^- z_i p z_k - \pi = \min_{1 \leq j \leq w, j \neq i} (\angle^- z_i p z_j - \pi), \angle^- z_i p z_j \geq \pi, 1 \leq k \leq w, i \neq k\}$$

つまり、 $accw(p, z_i)$ は、経路 $z_i p z_k$ の p における回転角度の候補となる。□

3 複合最短経路問題

[定義 8] [複合最短経路問題]

単純多角形の障害物の存在する平面において、障害物外あるいは境界上の2点 s, t と複合評価尺度のパラメタ C, D が与えられたとき、障害物の境界と交差しない複合評価尺度の値を最小とする $s-t$ 経路($s-t$ 複合最短経路と呼ぶ)を求める問題が複合最短経路問題である。□

3.1 複合最短経路

まず、複合最短経路の特徴を述べる。

[補題 1] 複合最短経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ 上の \bar{V} の要素を含まない最初の線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($1 \leq i \leq u-1$)とする。このとき、 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を平行移動した後の線分が \bar{V} の要素を含み、複合評価尺度の値が増加しない平行移動が存在する。

(証明)

$D \neq 0$ の場合

1. $\overline{p_{i-1} p_i}, \overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ が平行の場合

$\overline{p_{i-1} p_i}, \overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ が平行であることより $\overline{p_i p_{i+1}}$ の長さは平行移動しても変化しない。また $\overline{p_i p_{i+1}}$ の両端点での回転角度は変化しない。

- 2点 p_{i-1}, p_{i+2} が $\overline{p_i p_{i+1}}$ に対して同じ側に存在する場合(図2)。

$\overline{p_i p_{i+1}}$ を p_{i-1} の方向へ平行移動することにより複合評価尺度の値は減少する。これは、 P が複合最短経路であることに矛盾する。

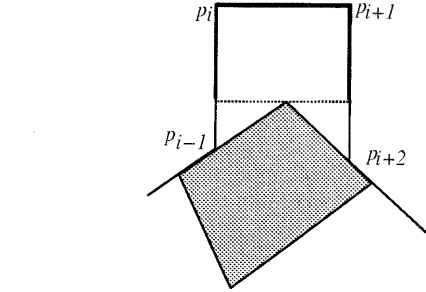


図 2: ケース 1

- 2点 p_{i-1}, p_{i+2} が $\overline{p_i p_{i+1}}$ に対して反対側に存在する場合(図3)。

$\overline{p_i p_{i+1}}$ を p_{i-1} の方向へ平行移動しても、 $\overline{p_{i-1} p_i}, \overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ が平行であることより複合評価尺度の値は変化しない。

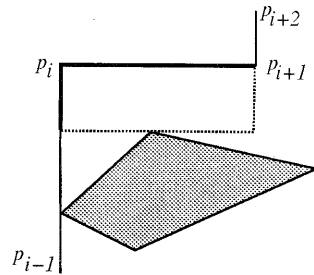


図 3: ケース 2

2. $\overline{p_{i-1} p_i}, \overline{p_{i+1} p_{i+2}}$ が平行でない場合

線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を平行移動しても両端点の回転角度は変化しない。

- 2点 p_{i-1}, p_{i+2} が $\overline{p_i p_{i+1}}$ に対して同じ側に存在する場合(図4,5)。

$\overline{p_i p_{i+1}}$ を p_{i-1} の方向へ平行移動することにより複合評価尺度の値は減少する。これは、 P が複合最短経路であることに矛盾する。

- 2点 p_{i-1}, p_{i+2} が $\overline{p_i p_{i+1}}$ に対して反対側に存在する場合(図6,7)。

$\overline{p_i p_{i+1}}$ を p_{i-1} もしくは p_{i+2} の方向へ平行移動することにより複合評価尺度の値は減少する。これは、 P が複合最短経路であることに矛盾する。

$D = 0$ の場合

$D = 0$ であることから、経路の長さは複合評価尺度の値に影響しない。線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を p_{i-1} または p_{i+2} の

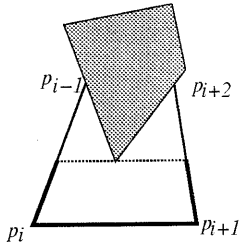


図 4: ケース 3

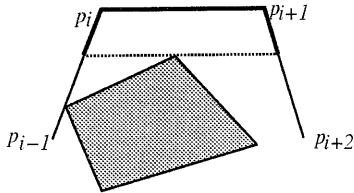


図 5: ケース 4

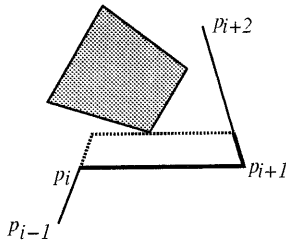


図 6: ケース 5

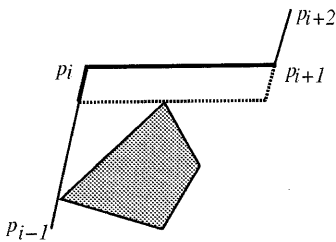


図 7: ケース 6

方向へ平行移動しても両端点の回転角度は変化しない。しかし、 p_{i+2} まで平行移動する間に $\overline{p_i p_{i+1}}$ が \bar{V} の要素を含む保証がない。そこで、任意の複合最短経路 $P'' = p''_1, p''_2, \dots, p''_u$ に対し、

$$\text{num}(P'') = \{u \mid P'' = p''_1, p''_2, \dots, p''_u\}$$

とする。つまり、 $\text{num}(P'')$ は P'' を構成する線分の数を示す。そして、

$$\text{num}(P) = \min\{\text{num}(P'') \mid P'' \text{ は複合最短経路}\} \quad (1)$$

となる任意の複合最短経路を $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ とする。 P において、 $\overline{p_i p_{i+1}}$ が p_{i+2} まで \bar{V} の要素を含むことなく平行移動できたと仮定する。この平行移動後の $\overline{p_i p_{i+1}}$ の両端点を p'_i, p'_{i+1} とし、経路 $p_{i-1} p'_i p'_{i+1} p_{i+3}$ の p'_i, p'_{i+1} での回転角度をそれぞれ θ'_i, θ'_{i+1} とする (図 8)。このとき、

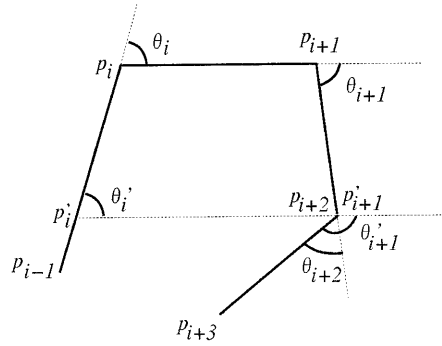


図 8: $\overline{p_i p_{i+1}}$ を平行移動

$$\theta_i + \theta_{i+1} + \theta_{i+2} \geq \theta'_i + \theta'_{i+1}$$

が容易に示せることから、 P' も複合最短経路である。これは、 $\text{num}(P') = \text{num}(P) - 1$ であり、条件 (1) に矛盾する。よって P の $\overline{p_i p_{i+1}}$ が p_{i+2} まで \bar{V} の要素を含むことなく平行移動できない。したがって、 $\overline{p_i p_{i+1}}$ を平行移動した後の線分が \bar{V} の要素を含み、複合評価尺度の値が増加しない平行移動が存在する。□

[補題 2] 次の条件を満たす複合最短経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ が存在する。

- 各線分 $\overline{p_i p_{i+1}}$ ($1 \leq i \leq u-1$) は \bar{V} の要素を少なくとも 1 つ含む。

(証明)

条件を満たす複合最短経路が存在しないと仮定する。任意の複合最短経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ に対し、

$$\text{first}(P) = \min_{1 \leq i \leq u-1} \{i \mid \overline{p_i p_{i+1}} \text{ は } \bar{V} \text{ の要素を含まない}\}$$

とする。つまり、 $first(P)$ は P を構成する線分のうち、 \bar{V} の要素を含まない線分が最初に現れるのが何番目かを示す。そして、

$$first(P') = \max\{first(P) | P \text{ は複合最短経路}\} \quad (1)$$

となる任意の複合最短経路を $P' = p'_1, p'_2, \dots, p'_u$ とする。ただし、 \bar{V} の要素を含んでいない最初の線分を $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ とする。補題 1 より $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ が \bar{V} の要素を含み、複合評価尺度の値を増加させない平行移動が存在することから、 $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を平行移動して \bar{V} の要素を含むようにできる。こうしてできた複合最短経路を P'' とすると $first(P'') > first(P')$ であり、条件 (1) に矛盾する。よって、条件を満たす複合最短経路が存在する。 □

[補題 3] 次の条件を満たす複合最短経路 $P = p_1, p_2, \dots, p_u$ が存在する。

- $p_i (1 \leq i \leq u)$ は \bar{V} の要素である。

(証明)

補題 2 より各線分 $\overline{p_i p_{i+1}} (1 \leq i \leq u-1)$ が \bar{V} の要素を少なくとも 1 つ含む複合最短経路 P が存在する。 p_i が \bar{V} の要素でない点であると仮定する。点 p_i からもっとも近い $\overline{p_{i-1} p_i}$ 上の \bar{V} の要素を p'_i とする。このとき、 p'_i を端点とし、 p_i を含む半直線を点 p'_i を中心に p_{i+1} の方向へ p'_i 以外の \bar{V} の要素を含むようになるまで回転することを考える (図 9)。 $\overline{p_i p_{i+1}}$ も \bar{V} の要素を含むことから必ずこの回転は停止する。そして、停止したときの半直線と $\overline{p_i p_{i+1}}$ との交点を p'_{i+1} とし経路 $p_{i-1} p'_i p'_{i+1} p_{i+1}$ の $p'_i p'_{i+1}$ での回転角度をそれぞれ θ'_i, θ'_{i+1} とする。 $\theta_i = \theta'_i + \theta'_{i+1}$ 、 $dist(p'_i, p_i) + dist(p_i, p_{i+1}) > dist(p'_i, p'_{i+1})$ であることから $D \neq 0$ の場合は P が複合最短経路であることに矛盾する。 $D = 0$ の場合は、複合評価尺度の値が変化しないことから、以上の回転を繰り返すことにより、全ての p_i が \bar{V} の要素である複合最短経路を構成できる。よって、条件を満たす複合最短経路は存在する。 □

3.2 最短経路グラフ

補題 3 より経路を構成する全ての線分の端点が \bar{V} の要素である経路のみを考えればよいことがわかる。そこで、次のような重みつき有向グラフ G^* を考える。

[定義 9] 重みつき有向グラフ $G^* = (V^*, E^*)$ を次のように定義する。ただし、頂点 p から q への有向辺を (p, q) 、その辺の重みを $w(p, q)$ で表すものとする。

- 頂点集合 $V^* = \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i$
 $V_i = R_i \cup L_i \cup O_i$
 ただし、

$$\begin{aligned} R_i &= \{v_{ij}^r | v_j \in vis(v_i), v_i, v_j \in \bar{V}\} \\ L_i &= \{v_{ij}^l | v_j \in vis(v_i), v_i, v_j \in \bar{V}\} \\ O_i &= \{v_{ij}^o | v_j \in vis(v_i), v_i, v_j \in \bar{V}\} \end{aligned}$$

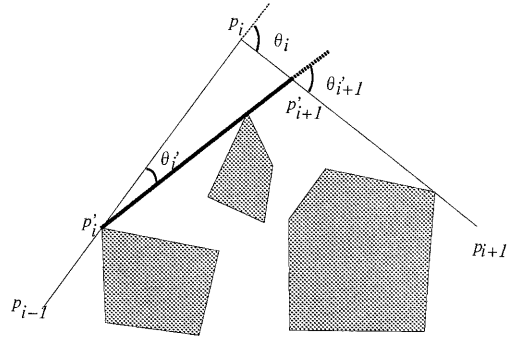


図 9: 線分 $\overline{p'_i p'_{i+1}}$ を回転

とする。つまり、頂点 $v_i \in \bar{V}$ を $3 \times |vis(v_i)|$ 個の頂点に置き換える。

- 辺集合 $E^* = \bigcup_{i=1}^{n+2} (E_i^r \cup E_i^l \cup E_i^o)$

$$\begin{aligned} E_i^r &= \{(v_{ij}^r, v_{ji}^r) | v_j \in vis(v_i)\} \\ w(v_{ij}^r, v_{ji}^r) &= D \times dist(v_i, v_j) \end{aligned}$$

つまり、 E_i^r は、 v_i から見える \bar{V} の要素への辺であり、その重みは、ユークリッド距離に関するものである。

$$E_i = rr_i \cup ll_i \cup or_i \cup ol_i \cup lo_i \cup ro_i$$

ただし、

$$\begin{aligned} rr_i &= \{(v_{ij}^r, v_{jk}^r) | v_{ij}^r, v_{jk}^r \in R_i, v_k \in cw(v_i, v_j)\} \\ w(v_{ij}^r, v_{jk}^r) &= C \times \angle v_j v_i v_k \\ ll_i &= \{(v_{ij}^l, v_{jk}^l) | v_{ij}^l, v_{jk}^l \in L_i, v_k \in ccw(v_i, v_j)\} \\ w(v_{ij}^l, v_{jk}^l) &= C \times \angle^- v_j v_i v_k \\ or_i &= \{(v_{ij}^o, v_{jk}^o) | v_{ij}^o \in O_i, v_{jk}^o \in R_i, \\ &v_k \in acw(v_i, v_j)\} \\ w(v_{ij}^o, v_{jk}^o) &= C \times (\angle v_j v_i v_k - \pi) \\ ol_i &= \{(v_{ij}^o, v_{jk}^o) | v_{ij}^o \in O_i, v_{jk}^o \in L_i, \\ &v_k \in accw(v_i, v_j)\} \\ w(v_{ij}^o, v_{jk}^o) &= C \times (\angle^- v_j v_i v_k - \pi) \\ ro_i &= \{(v_{ij}^r, v_{ij}^o) | v_{ij}^r \in R_i, v_{ij}^o \in O_i\} \\ w(v_{ij}^r, v_{ij}^o) &= 0 \\ lo_i &= \{(v_{ij}^l, v_{ij}^o) | v_{ij}^l \in L_i, v_{ij}^o \in O_i\} \\ w(v_{ij}^l, v_{ij}^o) &= 0 \end{aligned}$$

とする。つまり、 rr_i の有向辺は R_i の要素から成る時計回りのサイクルを構成する。同様に、 ll_i の有向辺は L_i の要素から成る反時計回りのサイクルを構成する。 or_i, ol_i の有向辺は O_i の要素か

ら R_i, L_i の要素から成るサイクルに向かう辺である。逆に ro_i, lo_i の有向辺は R_i, L_i の要素から成るサイクルから O_i の要素に向かう辺である。そして、 E_i に属する辺の重みは、角度に関するもの、もしくは 0 である。□

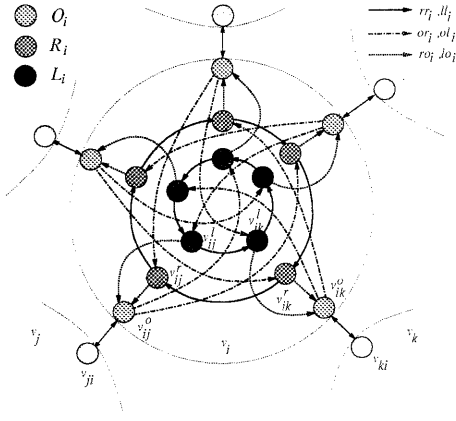


図 10: 重みつき有向グラフ G^* の一部分

[補題 4] 重みつきグラフ G^* が $O(n^2 \log n)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で構成できる。

(証明)

平面上の任意の 1 点 v_i が与えられたとき、 v_i から互いに見える障害物の頂点の集合 $vis(v_i)$ が文献 (14) より $O(n \log n)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で計算できる。 \bar{V} の要素数が $n + 2$ であることより互いに見える全ての頂点間のユークリッド距離が $O(n^2)$ 時間で計算できる。これは、グラフ G^* の $\bigcup_{i=1}^{n+2} E_i$ の辺に対応する。各頂点 v_i においてある頂点 $v_1 \in vis(v_i)$ を基準に $lv_1 v_i, v_j \in vis(v_i)$ を整列すれば $ccw(v_i, v_j), ccw(v_i, v_j), acw(v_i, v_j), accw(v_i, v_j)$ を計算できる。 $|vis(v_i)| \leq n + 1$ より整列に $O(n \log n)$ 時間かかる。全ての頂点に関しては、 $O(n^2 \log n)$ 時間かかる。

$$|E_i| = |rr_i| + |ll_i| + |or_i| + |ol_i| + |ro_i| + |lo_i| = 6|vis(v_i)| \leq 6(n + 1)$$

であるから、 $\sum_{i=1}^n E_i$ の辺の重みを $O(n^2)$ 時間で計算できる。したがって、重みつきグラフ G^* が $O(n^2 \log n)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で構成できる。□

定義 9 から、次の補題が示せる。

[補題 5] 重みつき有向グラフ G^* での最短経路の重みの合計は平面上の最短経路の複合評価尺度の値に一致する。□

補題 2.4.5 より次の定理が成り立つ。

[定理 1] 平面上の 2 点 s, t と障害物および複合評価尺度のパラメタ C, D が与えられたとき、 $s-t$ 複合最短経路を $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求めることができる。

(証明)

次のステップにより複合最短経路を求めることができる。

ステップ 1: グラフ G^* の構築。

ステップ 2: グラフ G^* において最短経路問題を解く。

ステップ 1 は補題 4 より $O(n^2 \log n)$ 時間 $O(n^2)$ 領域必要である。

ステップ 2 は Dijkstra の重みつきグラフにおける最短経路を求めるアルゴリズム⁽¹⁵⁾ を使うことにより $O(e \log e)$ 時間で求めることができる。ただし、 e は重みつきグラフの辺の数である。グラフ G^* の辺の数は次の式で表される。

$$\begin{aligned} |E_i^*| &= |vis(v_i)| \\ |E_i| &= |rr_i| + |ll_i| + |or_i| + |ol_i| + |ro_i| + |lo_i| \\ &= 6|vis(v_i)| \end{aligned}$$

$|vis(v_i)| \leq n + 1$ より $\sum_{i=1}^{n+2} |vis(v_i)|$ は $O(n^2)$ である。よって、グラフ G^* の辺の数は $O(n^2)$ であることから $O(n^2 \log n)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で複合最短経路を求めることができる。□

4 複合最短経路問い合わせ問題

この章で扱う問題を次のように定義する。

[定義 10] [複合最短経路問い合わせ問題]

多角形の障害物が存在する平面において、障害物外あるいは境界上の始点 s と複合評価尺度のパラメタ C, D が前もって与えられる。このとき、障害物外あるいは境界上の終点 t が質問点として与えられたときに、 $s-t$ 複合最短経路を求める問題が複合最短経路問い合わせ問題である。□

始点 s と障害物および複合評価尺度のパラメタ C, D が与えられ、終点 t が与えられていない状況でグラフ G^* を構築する。ただし、 $\bar{V} = V \cup \{s\}$ である。

[補題 6] 始点 s と障害物および複合評価尺度のパラメタ C, D が与えられたとき、 $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i$ の全ての頂点 p に対する $s-p$ 最短経路を $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求めることができる。

(証明)

定理 1 の証明で用いた *Dijkstra* のアルゴリズムは 1 頂点から全ての頂点までの最短経路を求めることができることから、 $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i$ の全ての頂点 p に対する s - p 最短経路を $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求めることができる。□

$\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i$ の全ての頂点 p に対する s - p 最短経路とは、平面上において、 s - v_i 経路 $P(u_j, v_i) (v_i \in \bar{V}, u_j \subset vis(v_i))$ のなかで複合評価尺度の値が最小の経路に対応する。 \bar{v}_i が障害物の境界と交差するかどうかは、 $vis(t)$ を求めればよい。これは、*Suri* のアルゴリズム^[14] を使うと $O(n \log n)$ 時間で求めることができる。 $d_i = |vis(t)| \leq n + 1$ であることから、すべての $dist(v_i, t) (v_i \in vis(t))$ が $O(n)$ 時間で計算できる。あとは、 $P(u_j, v_i)$ と線分 $\bar{v}_i t$ を連結した経路 $P(u_j, v_i, t)$ の v_i での回転角度がもとまれば、 $P(u_j, v_i, t)$ の複合評価尺度の値が求まる。したがって、

$$\min_{1 \leq i \leq n+1} \min_{1 \leq j \leq d_i} \{P(u_j, v_i, t) \text{ の複合評価尺度の値}\} (1)$$

が s - t 複合最短経路の複合評価尺度の値となる。この方法では、 $\sum_{i=1}^{n+1} d_i$ が $O(n^2)$ であることから (1) の計算に $O(n^2)$ 時間かかる。そこで、各頂点 v_i において、前処理をしておくことにより

$$\min_{1 \leq j \leq d_i} \{P(u_j, v_i, t) \text{ の複合評価尺度の値}\}$$

を効率よく求めることを考える。

頂点 v_i の直前の頂点 u_j が角度 a の方向に存在する s - v_i 最短経路を考える。この経路の複合評価尺度の値を w とし、角度 x の方向に終点 t が存在するものと仮定する。このとき、 s - t 最短経路の複合評価尺度の値 y は次の式で表される。

$$y = C \times |x - a| + w + D \times dist(v_i, t), 0 \leq x \leq 2\pi(1)$$

この式の表すグラフは高々 3 本の線分で構成される (図 11)。

$$\min_{1 \leq j \leq d_i} \{P(u_j, v_i, t) \text{ の複合評価尺度の値}\}$$

を求めることは、 t が x の方向に存在するとき y が最小となる直線を求めることに等しい。これは、高々 $3d_i$ 本の線分の *lower envelope* を前もって求めておけば簡単に求めることができる。

[補題 7] 次の式で表される d 本のグラフが前もって与えられたならば、 $O(d \log d)$ 時間で前処理することにより、 x が与えられたとき y を最小とするグラフを $O(\log d)$ 時間で求めることができる。

$$y = f_i(x) = |x - a_i| + b_i, 0 \leq x \leq 2\pi, 1 \leq i \leq d$$

□

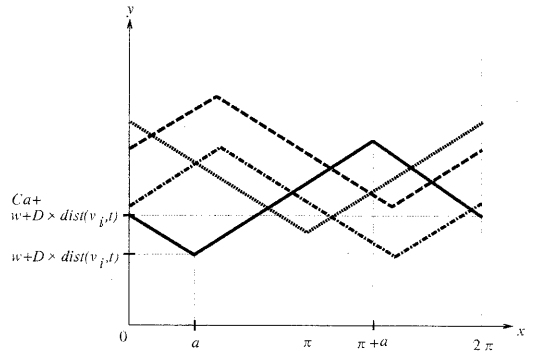


図 11: (1) 式の表すグラフ

(証明)

文献 (16) の n 本の線分の *upper envelope* を $O(n \log n)$ 時間で求めるアルゴリズムを用いると、 d 本のグラフは高々 $3d$ 本の線分と見ることができ、*lower envelope* を $O(d \log d)$ 時間で求めることができる。*lower envelope* を構成する線分の x 軸に関する区間が $O(d)$ 存在することよりバランスした 2 分木を $O(d \log d)$ 時間で構築すれば、 x が与えられたとき y を最小とする線分が $O(\log d)$ 時間で求めることができる。□

[定理 2] 平面上の始点 s と障害物および複合評価尺度のパラメタ C, D が前もって与えられた場合に、 $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域の前処理をしておけば、終点 t が与えられたとき $O(n \log n)$ 時間で s - t 複合最短経路を求めることができる。

(証明)

\bar{V} の各要素について $d_i = |vis(v_i)| \leq n + 1$ であることから補題 7 より、 $O(n \log n)$ 時間でバランスした 2 分木を構築できる。 \bar{V} の要素数は $n + 1$ なので、全ての要素で 2 分木を作成するのに $O(n^2 \log n)$ 時間かかる。この 2 分木が作成されていると終点が与えられたとき $O(\log d_i)$ 時間で t の直前で $v_i (1 \leq i \leq n)$ を通る s - t 最短経路を求めることができる。つまり、

$$\min_{1 \leq j \leq d_i} \{P(u_j, v_i, t) \text{ の複合評価尺度の値}\}$$

が $O(\log n)$ 時間で計算できることになる。よって、

$$\min_{1 \leq i \leq n+1} \min_{1 \leq j \leq d_i} \{P(u_j, v_i, t) \text{ の複合評価尺度の値}\}$$

は $O(n \log n)$ 時間で求めることができる。したがって、 $O(n \log n)$ 時間で s - t 複合最短経路を求めることができる。□

5 むすび

本稿では、多角形の障害物と2点が与えられたとき、ユークリッド距離と回転角度の両方を考慮した評価尺度を提案しその評価尺度による最短経路を $O(n^2 \log n)$ 時間、 $O(n^2)$ 領域で求めるアルゴリズムを提案した。また、始点と多角形の障害物が前もって与えられた場合に $O(n^2 \log n)$ 時間の前処理をしておけば、終点が与えられたとき $O(n \log n)$ 時間で最短経路が求められることも示した。今後の課題としては、ユークリッド距離、回転角度以外の評価尺度を組み合わせて考えることが考えられる。

参考文献

- [1] K. Kedem and M. Sharir: "An Automatic Motion Planning System for a Convex Polygonal Mobile Robot in 2-dimensional Space", Proceeding of the fourth annual Symposium on Computational Geometry, pp. 329-340 (1988).
- [2] D. T. Lee and F. P. Preparata: "Euclidean Shortest Paths in the Presence of Rectilinear Barriers", Networks, **14**, pp. 393-410 (1984).
- [3] D. Leven and M. Sharir: "An Efficient and Simple Motion-Planning Algorithm for a ladder moving in two-dimensional space amidst Polygonal Barriers", Proceeding of the fourth annual Symposium on Computational Geometry, pp. 221-227 (1985).
- [4] T. Lozano-Perez and M. A. Wesley: "An Algorithm for Planning Collision-free Paths among Polyhedral Obstacles", Communications of the ACM, **22**, pp. 560-570 (1979).
- [5] M. Sharir and A. Schorr: "On Shortest Paths in Polyhedral Spaces", SIAM Journal of Comput., **15**, pp. 193-215 (1986).
- [6] K. Clarkson, S. Kappor and P. Vaidya: "Rectilinear Shortest Paths through Polygonal Obstacles in $O(n \log^2 n)$ Time", Proceeding of the 3rd ACM Symposium on Computational Geometry, pp. 251-257 (1987).
- [7] P. J. de Rezende, D. T. Lee and Y. F. Wu: "Rectilinear Shortest Paths with Rectangular Barriers", Discrete & Computational Geometry, **4**, pp. 41-53 (1989).
- [8] D. T. Lee, T. H. Chen and C. D. Yang: "Shortest Rectilinear Paths among Weighted Obstacles", Proceeding of the sixth annual Symposium on Computational Geometry, pp. 301-310 (1990).
- [9] J. S. B. Mitchell: "An Optimal Algorithm for Shortest Rectilinear Paths Among Obstacles in the Plane", Abstracts of the First Canadian Conference on Computational Geometry, p. 22 (1989).
- [10] S. Suri: "Minimum Link Paths in Polygons and Related Problems", Ph.D thesis, Johns Hopkins University (1986).
- [11] J. S. B. Mitchell, G. Rote and G. Wöginger: "Computing the Minimum Link Path Among a Set of Obstacles in the Plane", Proceeding of the 6th ACM Symposium on Computational Geometry, pp. 63-72 (1990).
- [12] M. de Berg, M. van Kreveld, B. J. Nilsson and M. H. Overmars: "Finding Shortest Paths in the Presence of Orthogonal Obstacles Using a Combined L_1 and Link Metric", SWAT 90 Lecture Notes in Computer Science 447, pp. 213-224 (1990).
- [13] M. de Berg: "On Rectilinear Link Distance", Comp. Geom.: Theory and Applications, **1**, pp. 13-34 (1991).
- [14] S. Suri and J. O'Rourke: "Worst-case optimal algorithms for constructing visibility polygons with holes", Proceeding of the 2nd ACM Symposium on Computational Geometry, pp. 14-23 (1986).
- [15] E. W. Dijkstra: "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", Numer. Math, **1**, pp. 269-271 (1959).
- [16] J. Hershberger: "Finding the Upper Envelope of n line Segments in $O(n \log n)$ Time", Information Processing Letters, **33**, pp. 169-174 (1989).
- [17] 安留, 増澤, 辻野, 都倉 "障害物のある平面上で水平線分に制限をおいた水平垂直線分からなる経路について", 信学技報, **COMP92-40**, pp. 7-16 (1992).
- [18] 安留, 増澤, 辻野, 都倉 "重み付き領域を考慮した最短経路問題", 情処学アルゴリズム研報, **92-AL-26**, pp. 9-16 (1992).