プログラミング-言語・基礎・実践-　16－1
(1994. 3. 9)

高階論理を使ったオブジェクト指向データベースのモデル化

海老原一郎　大蒔和仁
{ebihara|ohmaki}@etl.go.jp
電子技術総合研究所情報アーキテクチャ部
〒305 茨城県つくば市梅園 1-1-4

あらまし: 近年、データベースの研究分野においては O-logic・F-logic をはじめとして、オブジェクト指向および論理型という概念を統一して説明する理論が登場して来た。これらの理論のうち初期のものは、オブジェクトが持つ個体変数名と関数という二つの側面を区別していた。最近の理論では改良が施されて、文法上は個体変数名と関数という二つの側面を区別せずに扱えるようになっているが、意味論上は依然として二つを区別して扱っており、データベースシステムを拡張するためシステムの元となっている基礎の理論を拡張しようとすると複雑な考察が必要になる。本論文では、データベースの基礎となる理論に Andrews による高階タイプ理論 $\mathcal{Q}_o$ を拡張した論理体系 $\mathcal{Q}_{oO}$ を提案する。$\mathcal{Q}_{oO}$ においては意味論上でもオブジェクトの個体変数名と関数という二つの側面を区別せずに済む。

一方、オブジェクト指向ではクラスの継承関係を定義するために、集合論的な記述が必要になるが、最近のオブジェクト指向の分野では自分自身が自分自身の元であるという記述が保証されるように要請する傾向がある。しかし、一般の公理論的集合論に基づくとこのような巡回的な集合を定義することはできないので、この要請を満たすのは困難である。本論文で提案する $\mathcal{Q}_{oO}$ もこの要請を自然な形で満たす。

和文キーワード: 演繹オブジェクト指向データベース、高階型理論、巡回的集合

A Model of Object-Oriented Database Based on Typed Higher-Order Logic

Ichirou EBIHARA and Kazuhito OHMAKI
Computer Science Division, Electrotechnical Laboratory
1-1-4 Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305, JAPAN

Abstract: In database reseach fields, it has been proposed to unify object-orientation and logics, such as F-logic and O-logic, for more flexible database systems. In early stages, those theories made distinction between individuals and functions both in syntax and semantics. Recently, some of those theories syntactically overcome this defect but not semantically. Therefore if we want to extend these theories of database systems, we had to face to resolve this complex semantics as well. In this paper, we propose a typed higher-order logic $\mathcal{Q}_{oO}$ which is an extension of Andrews' $\mathcal{Q}_o$. $\mathcal{Q}_{oO}$ makes no distinction between individuals and functions.

On the other hand, we need cyclic sets to describe the cyclic class inheritance in object-orientation. Generally, it would be difficult to describe cyclic sets using axiomatic set theory. $\mathcal{Q}_{oO}$ can satisfy this requirement.

英文 **keywords:**Deductive object-oriented database, Typed higher order logic, cyclic set

1　はじめに

オブジェクト指向データベースと論理型データベースを統合してより柔軟なシステムを作るためには、オブジェクト指向という概念を論理的に説明しなければならない。近年、O-logic・F-logic をはじめとして、これらを統一して説明する理論が登場して来た [6, 7, 8, 9, 10]。はじめはこれらの理論は、文法上でもそれを支える意味論上でも一つのオブジェクトが持つ個体変数名と関数という二つの側面を区別して説明を行った。しかし、これではオブジェクトを扱う際、その場その場でのオブジェクトの意味をいちいち考えなければならない。最近の理論では改良が施されて、文法上は個体変数名と関数という二つの側面を区別せずに扱えるようになっているので、こういった理論に基づくデータベースシステムはオブジェクト指向という概念を忠実に実現している。しかし、意味論上は依然として二つを区別して扱っているので、データベースシステムを拡張するためシステムの元となっている基礎の理論を拡張しようとすると複雑な考察が必要になるものと思われる。

本論文では、データベースの基礎となる理論に Andrews の高階タイプ理論 $\mathcal{Q}_o$[1, 2] を拡張した $\mathcal{Q}_{oO}$ という論理体系を提案する。$\mathcal{Q}_{oO}$ では意味論上でもオブジェクトの二つの側面を区別せずに済む。

一方、オブジェクト指向ではクラスの継承関係を定義するために、集合論的な記述が必要になる。最近のオブジェクト指向の分野では自分自身が自分自身の元であるという記述が保証されるように要請する傾向がある [5, 11, 12]。しかし、一般の公理論的集合論 [15] に基づくと自分自身が自分自身の元である集合を定義することはできないので、この要請を満たすのはなかなか困難である。最近の理論のうちのいくつかはこの要請を満たすようになって来ているが、本論文で提案した $\mathcal{Q}_{oO}$ もこの要請を自然な形で満たす。

本論文では $\mathcal{Q}_{oO}$ の公理を説明した後、健全性および完全性について考察する。さらに $\mathcal{Q}_{oO}$ に基づいたデータベースの簡単な記述例を示す。

2　高階型理論 $\mathcal{Q}_{oO}$ の公理

$\mathcal{Q}_{oO}$ は $\mathcal{Q}_o$ を元に拡張を行ったものである。$\mathcal{Q}_o$ は Andrews によって唱えられた高階論理体系であり、一階述語での表現を全て含んでいる。また、$\mathcal{Q}_o$ は集合論のいくつかの定理を含んでいて、しかもその集合論の体系は一般の公理論的集合論の「基礎の公理」を認めない特殊な体系である。[2, 1]

$\mathcal{Q}_{oO}$ ではオブジェクトタイプ O がデフォルトで存在するとする。タイプ O の変数 (定数)x_O が「変数でもあり関数でもある」という性質を満たすためにタイプ O についてのみ整合論理式の定義を一般の型付き λ から少し変更する。一般の型付き λ での整合論理式の条件の他に「x_O を x_{OO} に、x_{OO} を x_O に置き換えてみて、それが型付き λ の整合論理式になるならば元の式も整合論理式と認め、x_O を x_{oO} に、x_{oO} を x_O に置き換えてみて、それが型付き λ の整合論理式になるならば元の式も整合論理式と認める。」という条件を加える。

オブジェクトは定数でもあり関数でもある。また、オブジェクトは集合でもあり元でもある。そのため恒等関係も定数と関数の間、集合と元の間で定義されなければならない。$\mathcal{Q}_{oO}$ では、Q' という O と OO 間の恒等関係と Q'' という o と oO 間の恒等関係が存在すると仮定している。この仮定は、例えば Aczel の集合論等の基礎の公理を認めない集合論により説明可能であり [4]、$\mathcal{Q}_o$ も基礎の公理を認めていないので、$\mathcal{Q}_o$ にいくつかの公理を加えることにより集合論的な帰結については Aczel の体系と同じにすることが可能であると思われる。このため、Q' や Q'' の存在を仮定しても妥当であると思われる。Q' と Q'' は普通の恒等関係と同じように反射律・対象律を満たし、普通の恒等関係 $Q_{o\alpha\alpha}$ をも交えた関係で推移律も満たすとする。ただし、無条件にこの推移律を許すと他のタイプとの整合論理式を壊す可能性があるので、規則 R(b)・(c) で適用を制限した。また、異なったタイプの間に反射率を定義するために、例えば a_O を定義すればそれに恒等関係で対応する定数 a_{OO} が自動的に導入されて定義されるものとする。以下に $\mathcal{Q}_{oO}$ の公理を示す。

$\mathcal{Q}_{oO}$ の公理

(1)　$g_{oo}T_o \wedge g_{oo}F_o = \forall x \bullet g_{oo}x_o$

(2^α)　$[x_\alpha = y_\alpha] \supset \bullet h_{o\alpha}x_\alpha = h_{o\alpha}y_\alpha$

($3^{\alpha\beta}$)　$f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \forall x_\beta \bullet f_{\alpha\beta}x_\beta = g_{\alpha\beta}x_\beta$

(4_1)　$[\lambda x_\alpha B_\beta]A_\alpha = B_\beta$、ここで B_β は原始定数または x_α と異なる変数である。

(4_2)　$[\lambda x_\alpha x_\alpha]A_\alpha = A_\alpha$

(4_3)　$[\lambda x_\alpha \bullet B_{\beta\gamma}C_\gamma]A_\alpha = [[\lambda x_\alpha B_{\beta\gamma}]A_\alpha][[\lambda x_\alpha C_\gamma]A_\alpha]$

(4_4)　$[\lambda x_\alpha \bullet \lambda y_\gamma B_\beta]A_\alpha = [\lambda y_\gamma[\lambda x_\alpha B_\beta]A_\alpha]$ ここで y_γ は x_α ではなく、かつ A_α の全ての変数とも異なる。

(4_5)　$[\lambda x_\alpha \bullet \lambda x_\alpha B_\gamma]A_\alpha = [\lambda x_\alpha B_\gamma]$

(5)　$\iota_{\iota(o\iota)}[Q_{o\iota\iota}y_\iota] = y_\iota$

(推論規則 R)

(a) C における A_α の出現が λ の直後にくる (変数の出現) ではないとき、C および $Q_{o\alpha\alpha}A_\alpha B_\alpha$ から C における A_α の一つの出現を、B_α の出現によって置き換えた結果を推論する。

(b^1) $x_O = y_{oO}$ という形の式に限って、$x_O = z_O$ から $z_O = y_{oO}$ を、$y_{oO} = z_{oO}$ から $x_O = z_{oO}$ という推論を許す。

(b^2) $x_O = y_{OO}$ という形の式に限って、$x_O = z_O$ から $z_O = y_{OO}$ を、$y_{OO} = z_{OO}$ から $x_O = z_{OO}$ という推論を許す。

(c) $x_O\, y_O = z_O$ という形の式に限って、x_O を関数とみなして $x_{OO}\, y_O = z_O$ という推論を許す。 ∎

3　$\mathcal{Q}_{oO}$ の Semantics

空でないフレームの集合 $\{\mathcal{D}_\alpha\}$ を考える。タイプ α の個体定数を $\mathcal{D}_\alpha$ へ変換し、$Q_{o\alpha\alpha}$ を $\mathcal{D}_\alpha$ 上の恒等関係に変換し、Q' を $\mathcal{D}_O$ と $\mathcal{D}_{OO}$ 上の特殊な恒等関係に変換し、Q'' を $\mathcal{D}_O$ と $\mathcal{D}_{oO}$ 上の特殊な恒等関係に変換し、$\iota_{\iota(o\iota)}$ を $\mathcal{D}_{o\iota}$ の全ての単位集合について $\mathcal{D}_{o\iota}$ から $\mathcal{D}_\iota$ へのある関数へ変換する関数 $\mathcal{G}$ を考える。フレーム $\{\mathcal{D}_\alpha\}$ と関数 $\mathcal{G}$ を決めた時、$\mathcal{M} =< \{\mathcal{D}_\alpha\}, \mathcal{G} >$ を解釈をとよぶ。解釈 $\mathcal{M} =< \{\mathcal{D}_\alpha\}, \mathcal{G} >$ と割り当て関数 φ を決めた時、整合論理式 $\mathcal{A}_\alpha$ の解釈を $\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}\mathcal{A}_\alpha\ (\in \mathcal{D}_\alpha)$ で表すことにする。すべての割り当て φ とすべての整合論理式に対し、次の条件が満たされるような二項関数 $\mathcal{V}_\phi^\mathcal{M}$ が存在する時及びその時に限り解釈 $\mathcal{M} =< \{\mathcal{D}_\alpha\},$ を Q_{oO} のモデルと呼ぶことにする [1, 3]。

Q_{oO} のモデルの定義:

(a) $\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}x_\alpha = \varphi x_\alpha$

(b) $\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}A_\alpha = \mathcal{G}A_\alpha$ (A_α が原始定数のとき)。

(c) $\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}[A_{\alpha\beta}B_\beta] = (\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}A_{\alpha\beta})(\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}B_\beta)$

(d) $\mathcal{V}_\varphi^\mathcal{M}[\lambda x_\alpha B_\beta] =$ 引数 $z_\alpha \in \mathcal{D}_\alpha$ に対する値が $\mathcal{V}_{(\varphi:x_\alpha/z_\alpha)}^\mathcal{M}B_\beta$ となる $\mathcal{D}_\alpha$ から $\mathcal{D}_\beta$ の中への関数。(ここで $(\varphi : x_\alpha/z_\alpha)$ は、x_α 以外では φ と同じ値を割り当て、x_α には z_α を割り当てる関数とする。) ∎

(e) $\mathcal{Q}'\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}x_O\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}x_{oO}$

(f) $\mathcal{Q}''\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}x_O\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}x_{OO}$

補題 1:
$\mathcal{M}$ を Q_{oO} のモデル、A_α を整合論理式、φ と ψ を $\mathcal{A}_\alpha$ の全ての自由変数上で一致する割当とする。そのとき
$\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}A_\alpha = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\psi}A_\alpha$ が成り立つ。 ∎

定義 1:
$\mathcal{A}$ をタイプ O の整合論理式、$\mathcal{M}\varphi$ を $\mathcal{M}$ の中への割当関数とする。

(1) $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}A$ =T の時及びその時に限り φ は $\mathcal{M}$ において A を満たす。

(2) $\mathcal{M}$ において A を満たす割当関数が存在する時及びその時に限り A は $\mathcal{M}$ において充足可能である。

(3) $\mathcal{M}$ の中への割当関数を φ とする。そのとき、全ての φ に対して $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}A$ =T の時及びその時に限り A は $\mathcal{M}$ において妥当である。

(4) 文 A は $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}A$ =T の時及びその時にかぎり $\mathcal{M}$ において真であり、$\mathcal{V}^{\mathcal{M}}A$ =F の時及びその時にかぎり $\mathcal{M}$ において偽である。

(5) A が $\mathcal{Q}_{oO}$ の全てのモデルにおいて妥当である時及びその時に限って A は Q_{oO} において妥当である。

(6) 論理型整合論理式の集合 $\mathcal{Y}$ に対するモデルは、その中で $\mathcal{Y}$ の各整合論理式が妥当になるような $\mathcal{Q}_{oO}$ のモデルをいう。

「φ は $\mathcal{M}$ において A をみたす。」、「A は $\mathcal{M}$ において妥当である。」、「A は Q_{oO} のモデルで妥当である。」と言う事を $\mathcal{M}\models_{\phi}A$、$\mathcal{M}\models A$、$\models A$ で表す。 ∎

補題 2:
$\mathcal{M}$ を Q_{oO} のモデル、ϕ を $\mathcal{M}$ の中への割当関数とするとき、以下が成り立つ。

(a) $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}[[\lambda x_\alpha B_\beta]A_\alpha] = \mathcal{V}_{(\varphi:x_\alpha/\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}A_\alpha)}$

(b) $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}A = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}B$ の時及びその時に限り $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}[A = B]$ =T

(c) $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}T_o$ =T

(d) $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}F_o$ =F

(e) $x, y \in \mathcal{D}_o$ とする。
x =T かつ y =T のとき $(\mathcal{V}^{\mathcal{M}}\wedge_{ooo})xy$ =T
上記以外のとき $(\mathcal{V}^{\mathcal{M}}\wedge_{ooo})xy$ =F

(f) $x, y \in \mathcal{D}_o$ とする。
x =F または y =T のとき $(\mathcal{V}^{\mathcal{M}}\supset_{ooo})xy$ =T
上記以外のとき $(\mathcal{V}^{\mathcal{M}}\supset_{ooo})xy$ =F

(g) x_α 以外で φ と一致する全ての割当関数 ψ に対して $\mathcal{M}\models_{\psi}\mathcal{A}$ の時およびその時に限り $\mathcal{M}\models_{\varphi}\forall x_\alpha A$ である。

∎

健全性定理

(a) Q_{oO} の全ての定理は一般的意味で妥当である。

(b) もし、$\mathcal{Y}$ が論理型閉整合論理式の集合であり、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Y}$ に対する Q_{oO} のモデルであり、かつ $\mathcal{Y}\vdash A$ であれば、$\mathcal{M}\models A$ である。

証明

始めに健全性定理の (a) を証明する。そのために推論規則 R と公理 (1)~(5) が Q_{oO} の全ての Q_{oO} のモデルにおいて妥当である事を示す。

規則 R　まず、規則 R の (a) について証明する。$\mathcal{M}$ を Q_{oO} のモデルとし、$\mathcal{M}$ の中への割当関数全てに対して $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}A_\alpha = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}B_\alpha$ が成り立っているとする。C'_β は C_β の中の (λ の直後の変数でない) A_α の高々一つの出現を B_α で置き換えることにより C_β から得られる整合論理式であると仮定する。そのとき全ての割当関数 φ に対して $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}C_\beta = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}C'_\beta$ が成り立つ事を C_β の構造に関する帰納法によって証明する。

場合 1　C'_β が C_β である場合。自明。

場合 2　C_β が A_α である場合。C'_β は A_α または B_α であるので自明。

残りの場合は A_α は C_β の真部分集合と仮定できる。

場合 3　C_β が形式 $[G_{\beta\gamma}H_\gamma]$ である場合。
C'_β も形式 $[G'_{\beta\gamma}H'_\gamma]$ となる。帰納法の仮定より $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}G_{\beta\gamma} = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}G'_{\beta\gamma}$ と $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}H_\gamma = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}H'_\gamma$ が成り立つので、Q_{oO} のモデルの性質を適用すると $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}C_\beta = (\mathcal{V}^{\mathcal{M}}G_{\beta\gamma})(\mathcal{V}^{\mathcal{M}}H_\gamma)$
$= (\mathcal{V}^{\mathcal{M}}G'_{\beta\gamma})(\mathcal{V}^{\mathcal{M}}H'_\gamma) = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}C'_\beta$ となり、
$\mathcal{V}^{\mathcal{M}}C_\beta = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}C'_\beta$ を満たす。

場合 4　C_β が形式 $[\lambda x_\gamma E_\delta]$ である場合。
C'_β も形式 $[\lambda x_\gamma E'_\delta]$ となる。帰納法の仮定より $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}E_\delta = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}E'_\delta$...(1) が成り立つ。$Q_{oO}$ のモデルの定義 (d) より $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}C_\beta = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{(\varphi:x_\gamma/y_\gamma)}E_\delta$...(2) と $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{\varphi}C'_\beta = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}_{(\varphi:x_\gamma/z_\gamma)}E'_\delta$...(3) が成り立つ。
(1)、(2)、(3) より $\mathcal{V}^{\mathcal{M}}C_\beta = \mathcal{V}^{\mathcal{M}}C'_\beta$ が成り立つ。

以上より規則 R の (a) が成り立つ。

次に規則 R の (b^1) について証明する。

仮定 $\mathcal{V}(Q'x_Oy_{oO})$ =T と補題 2 (b) と Q_{oO} のモデルの性質より、$Q'\ \mathcal{V}x_O\mathcal{V}y_{oO}$...(1) が成り立つ。仮定 $\mathcal{V}(Q'x_Oz_O)$ =T に Q_{oO} のモデルの性質を適用して、$Q'\ \mathcal{V}x_O\mathcal{V}z_O$...(2) が成り立つ。恒等関数 Q' は対象律・推移律を保存するので、(1),(2) より $Q'\ \mathcal{V}z_O\mathcal{V}y_{oO}$...(3) が成り立つ。補題 2 (b) と Q_{oO} のモデルの性質を (3) に今までと逆に適用して、求める結果 $\mathcal{V}(Q'z_Oy_{oO})$ =T を得る。同様にして、仮定 $\mathcal{V}\bullet(Q'x_Oy_{oO})$ =T と $\mathcal{V}(Q'y_{oO}z_{oO})$ =T より $\mathcal{V}(Q'x_Oz_{oO})$ =T を得る。

以上より規則 R の (b^1) が成り立つ。

同様にして、規則 R(b^2) についても証明できる。

次に規則 R の (c) について証明する。

仮定 $\mathcal{V}(x_Oy_O = z_O)$ =T と Q_{oO} のモデルの性質より $\mathcal{V}x_O\mathcal{V}y_O = \mathcal{V}z_O$...(1) が成り立つ。さて、$Q_{oO}$ のモデルの性質として、$\mathcal{V}(Q''x_Ox_{OO})$ =T、つまり、$Q''\mathcal{V}x_O\mathcal{V}x_{OO}$...(2) が常に成り立つ。(1)・(2) より、$\mathcal{V}x_{OO}\mathcal{V}y_O = \mathcal{V}z_O$...(3) が成り立つ。補題 2 (b) と Q_{oO} のモデルの性質を (3) に今までと逆に適用して、求める結果 $\mathcal{V}(x_{OO}y_O = z_O)$ =T を得る。

以上より規則 R の (c) が成り立つ。

以上より規則 R が Q_{oO} の全ての Q_{oO} のモデルにおいて妥当である事が示される。

次に、公理の妥当性を証明する。

公理 1　まず、$(\varphi g_{oo})T_o$ =T かつ $(\varphi g_{oo})F_0$ =T と仮定する。そのとき、補題 2 (e) より、
$\mathcal{V}_\varphi[g_{oo}T_o \wedge g_{oo}F_o]$ =T...(1) が成り立つ。また、x_o 以外で φ と一致する任意の割当関数 ψ に対し、
$\mathcal{V}_\psi[g_{oo}x_o] = (\psi g_{oo})(\psi x_o) = (\varphi g_{oo})(\psi x_o)$ =T が成り立つので、$\mathcal{V}_\varphi\forall x_o[g_{oo}x_o]$ =T...(2) が補題 2 (g) より成り立つ。したがって、この場合 $\models_\varphi$[公理 1] が成り立つ。

他方、$(\varphi g_{oo})z$ =F となる $z \in \mathcal{D}_o$ が存在すると仮定する。ψ を $\varphi x_o = z$ となり、x_o 以外で φ と一致するように定義する。その時 $\mathcal{V}_\psi[g_{oo}x_o] = (\psi g_{oo})(\psi x_o)$

$= (\varphi g_{oo})z$ =F が成り立つので、$\mathcal{V}_\varphi \forall x_o[g_{oo}x_o]$ =F が補題2 (g) より成り立つ。しかし、仮定と補題2 (e) より $\mathcal{V}_\varphi[g_{oo}T_o \wedge g_{oo}F_o]$ =F であるので、この場合も補題2 (b) より $\models_\varphi$[公理1] が成り立つ。以上より、公理1が Q_oO の全ての Q_oO のモデルにおいて妥当である事が示される。

公理2 もし、$\varphi x_\alpha \neq \varphi y_\alpha$ ならば補題2 (b) と (f) より $\models_\varphi$[公理2] である。もし、$\varphi x_\alpha = \varphi y_\alpha$ ならば $\mathcal{V}_\varphi[h_{o\alpha}x_\alpha] = (\varphi h_{o\alpha})(\varphi x_\alpha) = (\varphi h_{o\alpha})(\varphi y_\alpha) = \mathcal{V}_\varphi[h_{o\alpha}y_\alpha]$ なので補題2 (b) と (f) により $\models_\varphi$[公理2]。以上より、公理2が Q_oO の全ての Q_oO のモデルにおいて妥当である事が示される。

公理3 $\varphi f_{\alpha\beta} = \varphi g_{\alpha\beta}$ と仮定し、ψ を x_β 以外で φ と一致する任意の割当関数とする。そのとき、
$\mathcal{V}_\psi[f_{\alpha\beta}x_\beta] = (\psi f_{\alpha\beta})(\psi x_\beta) = (\varphi f_{\alpha\beta})(\psi x_\beta) = (\varphi g_{\alpha\beta})(\psi x_\beta)$
$= (\psi g_{\alpha\beta})(\psi x_\beta) = \mathcal{V}_\psi[g_{\alpha\beta}x_\beta]$ となるので、
$\mathcal{V}_\psi[f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}]$ =T となる。故に、
$\mathcal{V}_\psi \forall x_\beta[f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}]$ =T...(1) が成り立つ。また、仮定より $\mathcal{V}_\varphi[f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}]$ =T...(2) が成り立つので、(1),(2), 補題2 (b) より、$\models_\varphi$[公理3]。
次に $(\varphi f_{\alpha\beta}) \neq (\varphi g_{\alpha\beta})$ と仮定すると補題2 (b) より、$\mathcal{V}_\varphi[f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}]$ =F...(1) が成り立つ。故に、$(\varphi f_{\alpha\beta})z \neq (\varphi g_{\alpha\beta})z$ となる要素 $z \in \mathcal{D}_\beta$ が存在する。$\psi = (\varphi : x_\beta/z)$ とおく。すると、$\mathcal{V}_\psi[f_{\alpha\beta}x_\beta] = (\psi f_{\alpha\beta})(\psi x_\beta) = (\varphi f_{\alpha\beta})z \neq (\varphi g_{\alpha\beta})z$
$= (\psi g_{\alpha\beta})(\psi x_\beta) = \mathcal{V}_\psi[g_{\alpha\beta}x_\beta]$ が成り立ち、
$\mathcal{V}_\varphi[f_{\alpha\beta}x_\beta = g_{\alpha\beta}x_\beta]$ =F が成り立つので補題2 (g) より $\mathcal{V}_\varphi \forall x_\beta[f_{\alpha\beta}x_\beta = g_{\alpha\beta}x_\beta]$ =F...(2) が成り立つ。(1)、(2)、補題2 (b) より $\models_\varphi$[公理3]。
以上より、公理3が Q_oO の全ての Q_oO のモデルにおいて妥当である事が示される。

公理4 $_1$ $\psi = (\varphi : x_\alpha/\mathcal{V}_\varphi A_\alpha)$ とおくと補題2 (a) より $\mathcal{V}_\varphi[[\lambda x_\alpha B_\beta]A_\alpha] = \mathcal{V}_\psi B_\beta$ が成り立つ。補題1より $\mathcal{V}_\psi B_\beta = \mathcal{V}_\varphi B_\beta$ が成り立つので、$\models$[公理4 $_1$]。

公理4 $_2$ $\psi = (\varphi : x_\alpha/\mathcal{V}_\varphi A_\alpha)$ とおくと 補題2 (a) より $\mathcal{V}_\varphi[[\lambda x_\alpha x_\alpha]A_\alpha] = \mathcal{V}_\psi x_\alpha$ が成り立つ。ψ の定義より $\mathcal{V}_\psi x_\alpha = \psi x_\alpha = \mathcal{V}_\psi A_\alpha$ が成り立つので、$\models$[公理4 $_2$]。

公理4 $_3$ $\psi = (\varphi : x_\alpha/\mathcal{V}_\varphi A_\alpha)$ とおくと 補題2 (a) より $\mathcal{V}_\varphi[[\lambda x_\alpha \bullet [B_{\beta\gamma}C_\gamma]A_\alpha] = \mathcal{V}_\psi[B_{\beta\gamma}C_\gamma]$
$= (\mathcal{V}_\psi B_{\beta\gamma})(\mathcal{V}_\psi C_\gamma) = (\mathcal{V}_\varphi[[\lambda x_\alpha B_{\beta\gamma}]A_\alpha])(\mathcal{V}_\varphi[[\lambda x_\alpha C_\gamma]A_\alpha])$
$= \mathcal{V}_\varphi[[[\lambda x_\alpha B_{\beta\gamma}]A_\alpha][[\lambda x_\alpha C_\gamma]A_\alpha]]$ が成り立つ。故に補題2 (b) より、$\models$[公理4 $_3$]。

公理4 $_4$ $\psi = (\varphi : x_\alpha/\mathcal{V}_\varphi A_\alpha)$ とおくと 補題2 (a) より $\mathcal{V}_\varphi[[\lambda x_\alpha \bullet [\lambda y_\gamma B_\delta]]A_\alpha = \mathcal{V}_\psi[\lambda y_\gamma B_\delta]$ が成り立つ。y を $\mathcal{D}_\gamma$ の任意の元とし、$\varphi' = (\varphi : y_\gamma/y)$ とする。そのとき、y_γ は x_α 及び A_α の全ての変数と異なるため、補題1より $\mathcal{V}_\varphi A_\alpha = \mathcal{V}_{\varphi'} A_\alpha$ が、代入の定義より $(\varphi' : x_\alpha/\mathcal{V}_{\varphi'} A_\alpha) = (\psi : y_\gamma/y)$ が成り立つ。したがって $(\mathcal{V}_\psi[\lambda y_\gamma B_\delta])y = (\mathcal{V}_{(\psi:y_\gamma/y)} B_\delta) = \mathcal{V}_{\varphi'}[[\lambda x_\alpha B_\delta]A_\alpha]$
$= (\mathcal{V}_\varphi[\lambda y_\gamma \bullet [\lambda x_\alpha B_\delta]A_\alpha])y$ が成り立つので、関数 $(\mathcal{V}_\psi[\lambda y_\gamma B_\delta])$ と関数 $(\mathcal{V}_\varphi[\lambda y_\gamma \bullet [\lambda x_\alpha B_\delta]A_\alpha])$ は等しくなり、補題2 (b) より $\models$[公理4 $_4$]。

公理4 $_5$ $\psi = (\varphi : x_\alpha/\mathcal{V}_\varphi A_\alpha)$ とおくと 補題2 (a) より $\mathcal{V}_\varphi[\lambda x_\alpha \bullet [\lambda x_\alpha B_\beta]A_\alpha] = \mathcal{V}_\psi[\lambda x_\alpha B_\beta]$ が成り立つ。x_α は $\lambda x_\alpha B_\beta$ において自由でないため補題1より $\mathcal{V}_\psi[\lambda x_\alpha B_\beta] = \mathcal{V}_\varphi[\lambda x_\alpha B_\beta]$ が成り立つ。
故に $\models$[公理4 $_5$]。

公理5 $\mathcal{V}\iota_{\iota(o\iota)}$ と $\mathcal{V}Q_{o\iota\iota}$ の定義より $\mathcal{V}_\varphi[\iota_{\iota(o\iota)} \bullet Q_{o\iota\iota}y_\iota] = (\mathcal{V}_\varphi \iota_{\iota(o\iota)})((\mathcal{V}_\varphi Q_{o\iota\iota})\mathcal{V}_\varphi y_\iota) = \iota_{\iota(o\iota)}Q_{o\iota\iota}\mathcal{V}_\varphi y_\iota$ が成り立つ。故に $\models$[公理5] が成り立つ。

以上より、健全性定理の (a) が成り立つ。

次に、健全性定理の (b) を証明する。まず、$\mathcal{Y} \vdash \mathcal{A}$ を仮定する。すると、証明とは有限回の手続きから成り立つので、$H^1, ..., H^n \vdash A$ となる $\mathcal{Y}$ の有限部分集合 $\{H^1, ..., H^n\}$ が存在するので、一階述語論理の演繹定理より $\vdash H^1 \supset\bullet ... \supset\bullet H$ が成り立ち、故に健全性定理の (a) より
$\mathcal{M} \models H^1 \supset\bullet ... \supset\bullet H^n \supset A$ ...(1) が成り立つ。$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Y}$ に対するモデルなので $1 \leq i \leq n$ に対して $\mathcal{M} \models H^i$ が成り立つ。このことと (1) と補題2 (f) より $\mathcal{M} \models A$ が成り立つ。 ∎

定義2:
- $\mathcal{Y} \vdash F_o$ の時およびその時にかぎり、論理型の閉整合論理式の集合 $\mathcal{Y}$ は矛盾している。
- $\vdash F_o$ の時およびその時にかぎり Q_o は矛盾している。
- 「無矛盾」は矛盾していないことを表す。
- $\mathcal{Y} \cup \mathcal{B}$ が無矛盾である時およびその時に限り 論理型の閉整合論理式 B は $\mathcal{Y}$ と無矛盾である。 ∎

無矛盾性定理
(a) Q_oO のモデルをもつ論理型の閉整合論理式の任意の集合は無矛盾である。
(b) Q_oO は無矛盾である。

証明
(a) について証明する。もし、$\mathcal{Y}$ がモデル $\mathcal{M}$ をもつ論理型の整合論理式の集合であるが $\mathcal{Y}$ が矛盾していると仮定すると $\mathcal{Y} \vdash F_o$ が成り立つので健全性定理の (b) より $\mathcal{M} \models$F となる。F_o の定義をよく見ると、前式は $\mathcal{M}$ のもとで $\forall x_o$ が常に成り立つ。つまり、$\mathcal{V}^{\mathcal{M}}(\forall x_o x_o)$ =T を表している。しかし、補題2 (d) より $\mathcal{V}^{\mathcal{M}} F_o$ =F なので矛盾が起こる。故に、Q_oO のモデルを持つ論理型の整合論理式の集合は無矛盾である。
(b) について証明する。
$\vdash F_o$ でない事を証明すればよい。空集合を ϕ で表すことにすると $\phi \vdash F_o$ でないことを証明すればよい。任意の整合論理式の集合 X に対して $\phi \in X$ が成り立つので、適当な整合論理式の集合 Y をとれば Y は ϕ のモデルとなる。すると、健全性定理 (b) より $\mathcal{Y} \models$F となり、本定理の (a) で説明したのと同じ理由により矛盾を生じる。故に Q_oO は無矛盾である。 ∎

4 Q_oO の完全性

定義3: $\mathcal{H}$ を Q_oO の文の集合とする。そのとき、
(1) Q_oO の全ての文 A に対し、$\mathcal{H} \vdash A$ または $\mathcal{H} \vdash \sim A$ が成り立つ時及びその時にかぎり、$\mathcal{H}$ は Q_oO で完全であるという。
(2) $[A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}]$ の形式の Q_oO の 各文に対し、$\mathcal{H} \vdash [A_{\alpha\beta}C_\beta = B_{\alpha\beta}C_\beta] \supset\bullet A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ となる Q_oO の閉整合論理式 C_β が存在する時及びその時に限り $\mathcal{H}$ は Q_oO で拡張的に完全であるという。 ∎

拡張補題
$\mathcal{Y}$ を Q_oO の文の任意の無矛盾な集合とし、Q^+_{oO} を Q_oO の拡大とする。そのとき、以下の条件を満たす Q^+_{oO} の文の集合 $\mathcal{H}$ が存在する。
(1) $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{H}$
(2) $\mathcal{H}$ は無矛盾である。
(3) $\mathcal{H}$ は Q^+_{oO} で完全である。

(4) $\mathcal{H}$ は $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ で拡張的に完全である。

(5) $card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_{oO}^{+})) = card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_{oO}))$。($card(X)$ は集合 X の濃度を表す。)

証明

$K = card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_{oO}))$ とし、$\mathcal{C}_\alpha$ を、$\mathcal{Q}_{oO}$ と比較した時 $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ に新しく現れた原始定数のうちタイプ α のものを整列させた順序集合とする。この整列順序集合の濃度は K であるとする。そして $\mathcal{C} = \cup_\alpha \mathcal{C}_\alpha$ とする。$\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ を $\mathcal{C}$ の中の定数を $\mathcal{Q}_{oO}$ の原始定数に加えることによって得られた $\mathcal{Q}_{oO}$ の拡大とする。あきらかに $card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_{oO}^{+})) = K$ となる。

κ を濃度 K の $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ についての順序数とする。$\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ の文を順序づけ、各順序数 $\tau < \kappa$ に対し、S^τ をこの整列順序の下での $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ の τ 番目の文とする。

超限帰納法により、各順序数 $\tau \leq \kappa$ に対して $\sigma \leq \tau$ のときはいつも $\mathcal{Y}_\sigma \subseteq \mathcal{Y}_\tau$ となり、$\mathcal{C}$ からの高々 $n + card(\tau)$ の定数が $\mathcal{Y}_\tau$ の文で生じるような有限の基数 n が存在するような $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ の文の集合 $\mathcal{Y}_\tau$ を定義する。$\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}$ とし、もし τ が極限順序数であるならば、$\mathcal{Y}_\tau = \cup_{\sigma<\tau}\mathcal{Y}_\sigma$ とする。後続順序数 $\mathcal{Y}_{\tau+1}$ を以下のように場合分けて定義する。

(a) もし S_τ が $\mathcal{Y}_\tau$ と無矛盾ならば、$\mathcal{Y}_{\tau+1} = \mathcal{Y}_\tau \cup \{S^\tau\}$。

(b) もし S_τ が $\mathcal{Y}_\tau$ と無矛盾ではなく、S_τ が形式 $[A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}]$ でなければ、$\mathcal{Y}_{\tau+1} = \mathcal{Y}_\tau$。

(c) もし S_τ が $\mathcal{Y}_\tau$ と無矛盾ではなく、S_τ が形式 $[A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}]$ であるならば、c_β が $\mathcal{Y}_\tau$ でも S^τ でも生じない最初の定数であるところで、
$\mathcal{Y}_{\tau+1} = \mathcal{Y}_\tau \cup \{\sim\bullet A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta\}$。

上で定義した $\mathcal{Y}_\tau$ は $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ において無矛盾である事を τ 上の帰納法により証明する。

(1) 背理法を用いて $\mathcal{Y}_0$ が $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ において無矛盾 である事 を証明する。$\mathcal{P}$ が $\mathcal{Y}_0$ のある有限部分集合 T からの $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ における F_o の証明と仮定する。θ を $\mathcal{P}$ で生じる $\mathcal{C}$ からの定数を、$\mathcal{P}$ で生じ ない同じタイプの異なる変数によって置き換える代入とする。$\mathcal{C}$ の どの定数も $\mathcal{Y}_0$ で生じないため、$\theta\mathcal{P}$ は T からの F_o の $\mathcal{Q}_{oO}$ における 証明になる。これは $\mathcal{Q}_{oO}$ における $\mathcal{Y}$ の無矛盾性に反する。 故に $\mathcal{Y}_0$ は $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ において無矛盾である。

(2) $\mathcal{Y}_\tau$ が無矛盾であると仮定し、$\mathcal{Y}_{\tau+1}$ が無矛盾であることを証明する。(a)、(b) の場合は $\mathcal{Y}_{\tau+1}$ の無矛盾性は明白であるので (c) の場合について背理法 を用いて証明する。
$\mathcal{Y}_{\tau+1}$ が (c) によって得られ、$\mathcal{Y}_{\tau+1}$ が 矛盾していると仮定する。$\mathcal{Y}_\tau \cup \sim\{A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta\} \vdash F_o$
演繹定理より $\mathcal{Y}_\tau \vdash \sim \{A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta\} \supset F_o$ ...(1)
述語論理の恒真式として $\vdash F_o \supset \{A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta\}$ ...(2)
(1) と (2) と規則 P より
$\mathcal{Y}_\tau \vdash \sim \{A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta\} \supset \{A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta\}$ ...(3)
述語論理の恒真式として $\vdash \{\sim D \supset D\} = D$ ...(4)
(3)、(4) と規則 P より $\mathcal{Y}_\tau \vdash A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta$ ...(5)
が成り立つ。$\mathcal{P}$ を $\mathcal{Y}_\tau$ の有限部分集合 T からの $A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta$ の証明であり、x_β を $\mathcal{P}$ でも T でも生じないタイプ β の変数とする。c_β が $\mathcal{Y}_\tau$、$A_{\alpha\beta}$、$B_{\alpha\beta}$ で生じないので、$\mathcal{P}$ の中の c_β に対する x_β の代入 $S_{x_\beta}^{c_\beta}\mathcal{P}$ が $A_{\alpha\beta}x_\beta = B_{\alpha\beta}x_\beta$ の T からの証明である。 故に $T \vdash A_{\alpha\beta}x_\beta = B_{\alpha\beta}x_\beta$ が成り立つ。
述語論理での全称一般化則より $T \vdash \forall x_\beta A_{\alpha\beta}x_\beta = B_{\alpha\beta}x_\beta$ が成り立ち、 公理 3 より $T \vdash A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ が成り立つ。 以上より $\mathcal{Y}_\tau \vdash A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ ...(6) が成り立つ。一方、この場合の $\mathcal{Y}_{\tau+1}$ の定義より、
$\mathcal{Y}_\tau$, $[A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}] \vdash F_o$ と (6) より、$\mathcal{Y}$ は矛盾する。
以上より、$\mathcal{Y}_\tau$ が無矛盾なときは $\mathcal{Y}_\tau$ も 無矛盾である。

(3) τ が極限順序数である場合。各 $\sigma < \tau$ に対し $\mathcal{Y}_\sigma$ が無矛盾であるならば、$\mathcal{Y}_\tau$ の各 有限部分集合は $\sigma < \tau$ の $\mathcal{Y}_\sigma$ の部分集合で あるため、$\mathcal{Y}_\tau$ は無矛盾でなければならない。

以上より、$\mathcal{H} = \mathcal{Y}_\kappa$ とおけば、本補題の (1)、(2) を満たす。

次に上のように $\mathcal{H}$ をおいた時、$\mathcal{H}$ は $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ で完全であることを証明する。
S を $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ の任意の文とする。そのとき、S が S^τ となる $\tau < \kappa$ が存在する。もし S が $\mathcal{Y}_\tau$ と無矛盾であれば、(a) より $S \in \mathcal{Y}_{\tau+1} \subseteq \mathcal{H}$ なので $\mathcal{H} \vdash S$ である。もし S が $\mathcal{Y}_\tau$ と矛盾すれば、$\mathcal{Y}_\tau$, $S \vdash F_o$ なので $\mathcal{Y}_\tau \vdash \sim S$ となるので $\mathcal{H} \vdash \sim S$ となる。故に $\mathcal{H}$ は $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ で完全である。

次に上のように $\mathcal{H}$ をおいた時、$\mathcal{H}$ は $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ で拡張的に完全であることを証明する。S が形式 $A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ であると仮定する。$\mathcal{Q}_{oO}$ は一回述語論理を含むので、規則 P (もし、$\mathcal{H} \vdash A^1$, ..., $\mathcal{H} \vdash A^n$ かつ $[\mathcal{H} \vdash A^1 \wedge ... \wedge \mathcal{H} \vdash A^n] \supset B$ が恒真的であれば $\mathcal{H} \vdash B$ である。もし B が恒真的であれば、$\mathcal{H} \vdash B$) が成り立つので、

(1) S が $\mathcal{Y}$ と無矛盾な場合、公理 3 と規則 P より全ての整合論理式 C_β に対して $\mathcal{H} \vdash [A_{\alpha\beta}C_\beta = B_{\alpha\beta}C_\beta] \supset S$ となる。故に、拡張的に完全である。

(2) S が $\mathcal{Y}$ と矛盾する場合 (c) より $\mathcal{H} \vdash \sim [A_{\alpha\beta}c_\beta = B_{\alpha\beta}c_\beta]$ となる $c_\beta \in \mathcal{C}$ が存在するので、規則 P によって $\mathcal{H} \vdash [A_{\alpha\beta}C_\beta = B_{\alpha\beta}C_\beta] \supset \bullet A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$

となり、拡張的に完全であることが成り立つ。

定義 4：

各タイプ記号 α に対して、$card(\mathcal{D}_\alpha) \leq card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_{oO}))$ である時及びその時に限り、$\mathcal{Q}_{oO}$ に対するモデル $< \{\mathcal{D}_\alpha\}_\alpha, \mathcal{G} >$ は素朴である。 ∎

ヘンキンの定理

$\mathcal{Q}_{oO}$ の文のすべての無矛盾な集合は素朴な $\mathcal{Q}_{oO}$ のモデルを持つ。

証明

$\mathcal{Y}$ を $\mathcal{Q}_{oO}$ の文の無矛盾な集合とし、$\mathcal{H}$ と $\mathcal{Q}_{oO}^{+}$ を拡張補題で定義したのと同様におく。以下の四つの条件を満たすある関数 $\mathcal{V}$ とある領域 $\mathcal{D}_\gamma$ が、各タイプ γ に関して定義可能であることを示す。

(1^γ) $\mathcal{D}_\gamma = \{\mathcal{V}A_\gamma \mid A_\gamma$ は タイプ γ の閉整合論理式 $\}$

(2^γ) 全ての閉整合論理式 A_γ と B_γ に対して $\mathcal{H} \vdash A_\gamma = B_\gamma$ の時およびその時に限り $\mathcal{V}A_\gamma = \mathcal{V}B_\gamma$ である。

(3^{OO}) 全ての閉整合論理式 A_O と B_{OO} に対して $\mathcal{H} \vdash Q' A_O B_{OO}$ の時およびその時に限り $Q'\mathcal{V}A_O\mathcal{V}B_{OO}$ である。

(4^{oO}) 全ての閉整合論理式 A_O と B_{oO} に対して $\mathcal{H} \vdash Q'' A_O B$ の時およびその時に限り $Q''\mathcal{V}A_O\mathcal{V}B_{oO}$ である。

関数 $\mathcal{V}$ と領域 $\mathcal{D}_\gamma$ が各タイプに対して定義可能である事を、タイプに関する帰納法で証明する。

(a) まず、一階のタイプ o に付いて (1^o)、(2^o) が定義可能であることを示す。$\mathcal{D}_o = \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ となることは明白である。 各文 A に対して $\mathcal{H} \vdash A$ ならば $\mathcal{V}A = \mathrm{T}$ とし、 そうでなければ $\mathcal{V}A = \mathrm{F}$ と定義すれば、$\mathcal{H}$ は完全かつ無矛盾 なので条件 $\mathcal{H} \vdash A$ または $\mathcal{H} \vdash \sim A$ のどちらか一つが必ず成り立つ。故に (1^o)、(2^o) が成り立つ。

(b) 次に、その他の一階のタイプ ι について (1^ι)、(2^ι) が定義可能であることを示す。 各閉整合論理式 A_ι に対して $\mathcal{V}A_\iota = \{B_\iota \mid B_\iota$ はタイプ ι の 閉整合論理式で

あり、かつ $\mathcal{H} \vdash A_\iota = B_\iota\}$ とし、$\mathcal{D}_\iota = \{\mathcal{V}A_\iota \mid A_\iota$ は閉整合論理式 $\}$ と定義する。明らかに $\mathcal{H} \vdash A_\iota = B_\iota$ の時およびその時に限り $\mathcal{V}A_\iota = \mathcal{V}B_\iota$ である。 故に (1^ι)、(2^ι) が成り立つ。

次に、一回のタイプが既に定義されていると仮定して、高階のタイプについてもタイプに応じた条件 (1) から (4) を満足できることを示す。

(c) 高階のタイプ OO に対して (1^{OO})、(2^{OO})、(3^{OO}) が定義可能 であることを示す。 各閉整合論理式 B_{OO} に対して $\mathcal{V}B_{OO} = \{A_{OO} \mid A_{OO}$ はタイプ O の 閉整合論理式であり、かつ $\mathcal{H} \vdash Q' A_{OO} B_O\}$ とし、$\mathcal{D}_{OO} = \{\mathcal{V}B_{OO} \mid B_{OO}$ は閉整合論理式 $\}$ と定義する。明らかに $\mathcal{H} \vdash Q' A_O B_{OO}$ の時およびその時に限り $Q'\mathcal{V}A_O\mathcal{V}B_{OO}$ である。 故に (1^{OO})、(2^{OO})、(3^{OO}) が成り立つ。

(d) 高階のタイプ oO に対して (1^{oO})、(2^{oO})、(4^{oO}) が定義可能 であることを示す。 各閉整合論理式 B_{oO} に対して $\mathcal{V}B_{oO} = \{A_{oO} \mid A_{oO}$ はタイプ oO の 閉整合論理式であり、かつ $\mathcal{H} \vdash Q'' A_{oO} B_O\}$ とし、$\mathcal{D}_{oO} = \{\mathcal{V}B_{oO} \mid B_{oO}$ は閉整合論理式 $\}$ と定義する。明らかに $\mathcal{H} \vdash Q'' A_O B_{oO}$ の時およびその時に限り $Q''\mathcal{V}A_O\mathcal{V}B_{oO}$ である。 故に (1^{oO})、(2^{oO})、(4^{oO}) が成り立つ。

(e) その他の高階のタイプ $\alpha\beta$ について $(1^{\alpha\beta})$、$(2^{\alpha\beta})$ が定義可能であることを示す。 $A_{\alpha\beta}$ をタイプ $\alpha\beta$ の閉整合論理式と仮定する。 $\mathcal{V}A_{\alpha\beta}$ を任意の引数 $\mathcal{V}C_\beta \in \mathcal{D}_\beta$ に対して値が $\mathcal{V}[A_{\alpha\beta}C_\beta]$ となるような $\mathcal{D}_\beta$ から $\mathcal{D}_\alpha$ への関数とする。 この $\mathcal{V}$ を用いて $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \{\mathcal{V}A_{\alpha\beta} \mid A_{\alpha\beta}$ はタイプ $\alpha\beta$ の閉整合論理式 $\}$ と定義する。

$(2^{\alpha\beta})$ が成り立つ事を示す。 $\mathcal{H} \vdash A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ ならば、公理3より 全ての閉整合論理式 C_β に対し、$\mathcal{H} \vdash A_{\alpha\beta}C_\beta = B_{\alpha\beta}C_\beta$ が成り立つので、全ての閉整合論理式 C_β に対し、 $(\mathcal{V}A_{\alpha\beta})(\mathcal{V}C_\beta) = \mathcal{V}[A_{\alpha\beta}C_\beta]$ $= \mathcal{V}[B_{\alpha\beta}C_\beta] = (\mathcal{V}B_{\alpha\beta})(\mathcal{V}C_\beta)$ が成り立つので、$\mathcal{V}A_{\alpha\beta} = \mathcal{V}B_{\alpha\beta}$ が成り立つ。 逆に $\mathcal{V}A_{\alpha\beta} = \mathcal{V}B_{\alpha\beta}$ が成り立つ と仮定する。$\mathcal{H}$ は拡張的に完全であったから、 $\mathcal{H} \vdash [A_{\alpha\beta}C_\beta = B_{\alpha\beta}C_\beta \supset \bullet A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}]$ ...(1) となる閉整合論理式 c_β が存在する。 また仮定より、$\mathcal{V}[A_{\alpha\beta}C_\beta] = (\mathcal{V}A_{\alpha\beta})(\mathcal{V}C_\beta) = (\mathcal{V}B_{\alpha\beta})(\mathcal{V}C_\beta) = \mathcal{V}[B_{\alpha\beta}C_\beta]$ となり、タイプ α の閉整合論理式については (2^α) が成り立っているので、 $\mathcal{H} \vdash A_{\alpha\beta}C_\beta = B_{\alpha\beta}C_\beta$ ...(2) が成り立つ。 (1)、(2) より $\mathcal{H} \vdash A_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ が成り立つ。

故に $(1^{\alpha\beta})$、$(2^{\alpha\beta})$ が成り立つ。

以上より (1^γ)、(2^γ)、(3^{OO})、(4^{oO}) を満たす関数 $\mathcal{V}$ と領域 $\mathcal{D}_\gamma$ を定義することができる。

次に $\mathcal{M} =< \{\mathcal{D}_\gamma\}, \mathcal{V} >$ が解釈を構成することを示す。

(a) まず、一階のタイプ γ に付いて $\mathcal{V}$ の構成法より明らかに $\mathcal{V}$ はタイプ γ の $\mathcal{Q}^+_{oO}$ の原始定数を $\mathcal{D}_\gamma$ のなかに写像する。

(b) $\mathcal{V}\mathcal{Q}_{o\alpha\alpha}$ が $\mathcal{D}_\alpha$ 上の 恒等的関係である事を示す。
$\mathcal{V}[\mathcal{Q}_{o\alpha\alpha}A_\alpha B_\alpha]$ =T という条件を 同値変形していく。
$(\mathcal{V}\mathcal{Q}^{o\alpha\alpha})(\mathcal{V}A_\alpha)(\mathcal{V}B_\alpha)$ =T
帰納法の証明過程の (e) より $\mathcal{H} \vdash \mathcal{Q}_{o\alpha\alpha}A_\alpha B_\alpha$
故に、 $\mathcal{V}A_\alpha = \mathcal{V}B_\alpha$。 以上より、$\mathcal{V}\mathcal{Q}_{o\alpha\alpha}$ は恒等関係 $\mathcal{Q}_{o\alpha\alpha}$ に等しい。

(c) $\mathcal{V}\iota_{\iota(o\iota)}$ が $\mathcal{D}_\alpha$ の 一要素集合をその唯一の元に写像する事を示す。 $\mathcal{V}A_\iota$ を $\mathcal{D}_\iota$ の任意の元とする。 $\mathcal{V}\mathcal{Q}_{o\iota\iota}$ は $\mathcal{D}_\iota$ 上の恒等関係 なので、 $((\mathcal{V}\mathcal{Q}_{o\iota\iota})\mathcal{V}A_\iota)$ はその単独 の元が $(\mathcal{V}A_\iota)$ であるような一要素集合である。公理5 より $\mathcal{H} \vdash A_\iota = \iota_{\iota(o\iota)}[\mathcal{Q}_{o\iota\iota}A_\iota]$ であるため $\mathcal{V}A_\iota = \mathcal{V}(\iota_{\iota(o\iota)}[\mathcal{Q}_{o\iota\iota}A_\iota]) = (\mathcal{V}\iota_{\iota(o\iota)})((\mathcal{V}\mathcal{Q}_{o\iota\iota})\mathcal{Q}A_\iota)$ が成り立つ。故に $\mathcal{V}\iota_{\iota(o\iota)}$ は $\mathcal{D}_\alpha$ の一要素集合をその唯一の元に写像する。

(d) $\mathcal{V}Q^{oOOO}(= \mathcal{Q}'')$ が $\mathcal{D}_{OO}$ と $\mathcal{D}_O$ 上の恒等的関係である事を示す。 $\mathcal{V}[\mathcal{Q}_{oOOO}A_O B_{OO}]$ =T という条件を同値変形して いく。
$(\mathcal{V}\mathcal{Q}_{oOOO})(\mathcal{V}A_O)(\mathcal{V}B_{OO})$ =T
帰納法の証明過程 (e) より $\mathcal{H} \vdash \mathcal{Q}_{oOOO}A_O B_{OO}$.
$\mathcal{Q}_{oOOO}\mathcal{V}A_O\mathcal{V}B_{OO}$ であるため、$\mathcal{V}\mathcal{Q}_{oOOO}$ は特殊な恒等関係 $\mathcal{Q}''$ に等しい。

同様にして、$\mathcal{V}\mathcal{Q}_{ooOo}$ または $\mathcal{V}\mathcal{Q}_{ooOO}$ が $\mathcal{D}_{oO}$ と $\mathcal{D}_O$ 上の同値関係 $\mathcal{V}\mathcal{Q}'$ であることも証明できる。

このようにして違うタイプ間に跨る特殊な恒等関係のうち文字数が最小のものを 定義できた。これは、対象律、反射律、普通の恒等関係を混ぜた中での推移律 を満たすが、この三つの関係を使うとさらに高階の o と O のみからなる 各タイプについて同様の関係の存在をいうことができる。 ゆえに、(b) と同様にして o と O の高階のタイプについても恒等関係を構成できる。

以上より $\mathcal{M} =< \{\mathcal{D}_\gamma\}_\gamma, \mathcal{V} >$ は解釈を構成する。

次に、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Q}^+_{oO}$ の Q_{oO} のモデルである事を示す。$\mathcal{M}$ の中への割当関数 φ と整合論理式 C_γ に対し $x^1_{\delta_1} \dots x^n_{\delta_n}$ が C_γ の自由変数であり $(1 \leq i \leq n)$ に対して) $E^i_{\delta_i}$ が $\mathcal{Q}^+_{oO}$ の変数を整列させた時初めて $\varphi x^i_{\delta_i} = \varphi E^i_{\delta_i}$ を満たす閉論理式とする。この時、$C^\varphi_\gamma = S^{x^1_{\delta_1} \dots x^n_{\delta_n}}_{E^1_{\delta_1} \dots E^n_{\delta_n}} C_\gamma$ とおき、$\mathcal{V}_\varphi C_\gamma = \mathcal{V}C^\varphi_\gamma$ とおく。明らかに C^φ_γ は閉整合論理式なので、$\mathcal{V}_\varphi C_\gamma \in \mathcal{D}_\gamma$ である。

(a) 任意の変数 x_β に対し、上のように $\varphi x_\delta = \mathcal{V}E_\delta$ となる E_δ を 選ぶ。その時 $\mathcal{V}_\varphi x_\delta = \mathcal{V}x^\varphi_\delta = \mathcal{V}E_\delta = \varphi x_\delta$ が成り立つ。

(b) 各閉整合論理式 C_γ に対し、 $\varphi C_\gamma = \mathcal{V}C^\varphi_\gamma = \mathcal{V}C_\gamma$ が成り立つ。

(c) $\mathcal{V}_\varphi[A_{\alpha\beta}B_\beta] = \mathcal{V}[A^\varphi_{\alpha\beta}B^\varphi_\beta]$ $= (\mathcal{V}A^\varphi_{\alpha\beta})(\mathcal{V}B^\varphi_\beta) = (\mathcal{V}_\varphi A_{\alpha\beta})(\mathcal{V}_\varphi B_\beta)$ が成立する。

(d) $\mathcal{V}E_\delta$ を $\mathcal{D}_\delta$ の任意の元とする。 E_δ を $\mathcal{D}_\delta$ のこの元を表す最初の閉整合論理式と 仮定してよい。割当関数 φ と変数 x_δ が与えられた時、 $\psi = (\varphi : x_\delta/\mathcal{V}E_\delta)$ とする。 λ 変換より $\vdash [\lambda x_\delta B_\beta]^\varphi E_\delta = B^\psi_\beta$ であるので、 $(\mathcal{V}_\varphi[\lambda x_\delta B_\beta])(\mathcal{V}E_\delta) = (\mathcal{V}[\lambda x_\delta B_\beta]^\varphi)(\mathcal{V}E_\delta)$ $= \mathcal{V}([\lambda x_\delta B_\beta]^\varphi)E_\delta) = \mathcal{V}B^\psi_\beta = \mathcal{V}_\psi B = \beta$ が成り立つ。

以上より、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Q}^+_{oO} \supset \mathcal{Q}_{oO}$ のモデルである。また、もし $A \in \mathcal{Y}$ ならば $A \in \mathcal{H}$ であるため $\mathcal{H} \vdash A$。ということは $\mathcal{V}A$ =T かつ $\mathcal{M} \models A$ であるので、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Y}$ に対する Q_{oO} のモデルである。$\mathcal{V}$ は $\mathcal{Q}^+_o$ の閉整合論理式の集合を $\mathcal{D}_\alpha$ の上に写像し、かつ $card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}^+_o)) = card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_o))$ なので、各 $\mathcal{D}_\alpha$ は $card(\mathcal{L}(\mathcal{Q}_o))$ 以下の濃度を持っている。 ∎

ヘンキンの完全性定理

A をタイプ o の閉整合論理式、$\mathcal{Y}$ を文の集合とする。

(a) $\models A$ の時およびその時にかぎり $\vdash A$ である。

(b) A がすべての Q_{oO} のモデルで妥当な時およびその時にかぎり $\mathcal{Y} \vdash A$ である。

(b) A がすべての素朴な Q_{oO} のモデルで妥当な時およびその時にかぎり $\mathcal{Y} \vdash A$ である。

証明

(a) は $\mathcal{Y}=\phi$ の (b) の特別な場合であり、(b) は (c) と健全性定理により導かれるので、(c) のみ証明する。A は $\mathcal{Y}$ の全ての素朴な $\mathcal{Q}_{oO}$ のモデルで妥当であるとする。B を A の全称閉型とする。その時 B は補題 2 (g) より $\mathcal{Y}$ の全ての素朴な $\mathcal{Q}_{oO}$ のモデルで妥当である。$\mathcal{Y}\cup\{\sim B\}$ が無矛盾であると仮定する。そのとき、ヘンキンの定理より、この文の集合は素朴な $\mathcal{Q}_{oO}$ のモデル $\mathcal{M}$ を持っていて、かつ、$\mathcal{M}\models\sim B$ が成り立つ。しかし、$\mathcal{M}$ は $\mathcal{Y}$ の素朴なモデルなので、$\mathcal{M}\models B$ である。この矛盾は $\mathcal{Y}\cup\{\sim B\}$ が矛盾している事を示しており、故に演繹定理と規則 P より $\mathcal{Y}\vdash B$ である。したがって全称実例化より $\mathcal{Y}\vdash A$ である。逆は健全性定理よりいえる。

5 $\mathcal{Q}_{oO}$ のモデル

これまで $\mathcal{Q}_{oO}$ は素朴なモデルについては完全性が成り立つことを述べてきた。しかしながら、論理学や言語理論で良く用いられる標準モデルについては完全性は成り立たない。

ここで標準モデルとは、モデル $\mathcal{M}$ のなかに全ての関数をあらかじめ含んでいて、全ての関数について必要ならば即座に参照する事ができるモデルである [1]。このような標準モデルについて完全性が成り立つとすると、全てのケースについての真偽の判断を $\mathcal{Q}_{oO}$ の体系で実現できる事になる。

ここで関数を別の見方をすると、集合から集合への写像であると考える事ができる。標準モデルにおいては全ての関数を自分の内に含んでいるので、当然、自分を自分自身の真部分集合に対応させる関数全てを含んでいなければいけない事になる。

$\mathcal{Q}_o$ においては、もしモデルの一階の個体定数の数が有限ならば、標準モデルを形成する事ができる。しかし、無限の場合は個体定数全体の集合とその真部分集合全体とが対応する事になり、カントールの定理に矛盾する [1]。

$\mathcal{Q}_{oO}$ については個体領域 O が特殊な恒等関係 Q'' によって oO と一対一に対応するので、標準モデルを作ろうとすると O のなかでさえカントールの定理に矛盾する [15]。そのために $\mathcal{Q}_{oO}$ を元にデータベースを作ると、データのオブジェクトの数が有限だとしても標準モデルは形成できない。

しかし通常のデータベースでは解を求める際、宣言された関数と定数のみについて考慮し、それ以外を超準的な意味で矛盾を起こしても全て偽として切り捨てているので、素朴なモデルを使っていると考えることができる。この見方によれば、データベースのモデルとして素朴な意味での完全性しか持たない $\mathcal{Q}_{oO}$ を用いても通常のデータベースに対しては十分であると思われる。

次章では、オブジェクト指向データベースの記述の例をあげながら、その意味を $\mathcal{Q}_{oO}$ の上で展開する。

6 $\mathcal{Q}_{oO}$ をモデルとするオブジェクト指向データベースの例

ここで仮定するデータベース言語は、F-logic[9] を模したものである。ここで仮定しているデータベース言語ではオブジェクトは全てタイプ O を持つとし、現在のところタイプ O の中にさらに細かいタイプを仮定することはしていない。文法の詳細は [9] を参照されたい。

ここでは簡単な例をあげてその $\mathcal{Q}_o$ 上での意味を見ていく。

式 $empl :: person$ は $\mathcal{Q}_{oO}$ では

$$(empl_O)\subseteq_{o(O)(O)}(person_O)$$

すなわち

$$\subseteq_{oOO}(empl_O)(person_O)$$

を表す。記号 $\subseteq_{oOO}$ は

$$[\lambda x_O \lambda y_O \exists s_{oO} \exists t_{oO} \bullet$$
$$Q'' x_O s_{oO} \wedge Q'' y_O t_{oO} \wedge \subseteq_{o(oO)(oO)} s_{oO} t_{oO}]$$

の意味である。$Q'' a_O a_{oO}$ となる a_{oO} がデフォルトで存在するので、

$$\subseteq_{o(oO)(oO)}(empl_{oO})(person_{oO})$$

が推論されるが、これは $empl$ というオブジェクトが表すクラスが $person$ というオブジェクトが表すクラスに包含されていることを表す。$\mathcal{Q}_{oO}$ での包含関係 $\subseteq_{o(oO)(oO)}$ は

$$[\lambda x_{o\alpha} y_{o\alpha} \forall z_\alpha \bullet x_{o\alpha} z_\alpha \supset y_{o\alpha} z_\alpha]$$

の省略型である。包含関係 $\subseteq_{o(oO)(oO)}$ は基本的には論理における含意の関係に基づいているので、スーパークラスで成り立つ事実はサブクラスに適用可能である。

データベースでの一般的な事実の記述は式

$$bob[name \rightarrow'' Bob'',\ friends \rightarrow \{bob,\ sally\}]$$

というように行なわれる。この式の $\mathcal{Q}_{oO}$ での意味は、

$$\begin{array}{l}[(name_O)(bob_O) ='' Bob''_O] \\ \wedge \\ [(friend_O)(bob_O) \supseteq \{bob_O, sally_O\}]\end{array}$$

である。$(name_O)(bob_O)$ や $(friend_O)(bob_O)$ 等は、推論規則 R より様々なタイプが推論されるが、その中でそれぞれ $(name_{OO})(bob_O)$ および $(friend_{OO})(bob_O)$ というタイプが以後有効なものとして利用されていく。

2 変数以上の引数を受けとるオブジェクトについては $bob[child(sally) \rightarrow \{mary\}]$ というように記述を行なう。$\mathcal{Q}_{oO}$ での意味は

$$\begin{array}{l}[F^2_O = (F^1_O)(sally_O)] \ \wedge \\ [F^3_O = (F^2_O)(bob_O)] \ \wedge \\ [(child_O)(F^3_O) \supseteq sally_O]\end{array}$$

である。ただし、ここで F^1_O、F^2_O、F^3_O はそれ以前にデータベースの事実の記述中に現れなかった新しい定数とする。$\mathcal{Q}_{oO}$ ではタイプ O については一価関数しか定義していなかったが、数学基礎論からは多価関数が定義可能なら一価関数に分解できるので、$\mathcal{Q}_{oO}$ に基づくデータベース言語でも多価関数が扱える。ただし、分解は右から行ない、全てを可能な限りタイプ O に置き換えるとする。

データベースでのルールの記述は式

$$grandparent(X,Y) \Leftarrow parent(X,Z) \wedge parent(Z,Y)$$

で記述できる。上式の $\mathcal{Q}_{oO}$ 中での意味は、

$$\begin{array}{l}[[F^2_O = (F^1_{OO})(X_O)]\wedge \\ [F^3_O = (F^2_{OO})(Z_O)]\wedge \\ [(parent_{oO})(F^3_O)]\wedge \\ [F^5_O = (F^4_{OO})(X_O)]\wedge \\ [F^6_O = (F^5_{OO})(Y_O)]\wedge \\ [(parent_{oO})(F^6_O)]] \supset \bullet \\ [F^8_O = (F^7_{OO})(X_O)]\wedge \\ [F^9_O = (F^8_{OO})(Y_O)]\wedge \\ [(grandparent_{oO})(F^8_O)]\end{array}$$

となる。

ルールと二価関数を用いると複数のオブジェクトから新しいオブジェクトを構成することができる。例えば

$$Samename(X, Y)[name \to Z] \\ \Leftarrow X[name \to Z] \wedge Y[name \to Z]$$

というように記述すれば、attributeである $name$ の valueがともに Z で等しい二つのオブジェクト X と Y から $Samename$ という新しいオブジェクトを生成する。$Samename$ は attributeである $name$ をはじめから持っていて、その valueは Z である。

7 結論

型付高階論理 $\mathcal{Q}_o$ を拡張してオブジェクト指向データベースの基礎理論となる $\mathcal{Q}_{oO}$ を提案した。

$\mathcal{Q}_{oO}$ では、定数でもあり関数でもあるタイプ O を導入し、オブジェクト指向のオブジェクトという概念を忠実に論理の上で実現した。定数と関数とを同一のものとして扱うことができるのでオブジェクト指向データベースの意味を考える時従来より直観的に把握することができる。それゆえ将来の拡張をより簡単に行なえるものと期待したい。

また、$\mathcal{Q}_{oO}$ では自分自身が自分自身に包含される集合の記述を可能としている。このような集合はZFCでは矛盾を引き起こす[15]。オブジェクト指向データベースに多くの事実を記述するとクラスの継承関係が巡回してしまうことが起こりやすいが、$\mathcal{Q}_{oO}$ に基づけばそういった場合でも矛盾を起こさない取り扱いが可能となる。

今後の課題を述べる。

現在の段階では、$\mathcal{Q}_{oO}$ はタイプ O の中にさらに細かいタイプを存在させていない。オブジェクト指向データベースといった時はオブジェクトであるデータについて型を設けることに関する研究も活発に行なわれており [5, 9] そのことについても検討してみたい。

また、$\mathcal{Q}_{oO}$ に基づくデータベースではクラスの継承関係は論理の含意に基づいているので全てモノトニックである。このために、スーパークラスのメソッドは無制限にサブクラスで適用可能である。これを防ぐには、否定を導入してクラス間の継承に関する推論を外から監視して制御することが必要になると思われる。必要とされるのは素論理式に対する否定なので [13, 14] などの手法を適用可能ではないかと期待される。

謝辞

本研究を進めるにあたり日頃御指導頂く情報アーキテクチャ部長太田公広博士に感謝する。また、熱心に御討論頂いた情報ベース研究室の仲間および言語システム研究室高橋孝一氏に感謝する。

参考文献

[1] Peter B. Andrews, "An Introduction to Mathematical Logic and Type Theory : to Truth through Proof",Academic Press Inc., 1989.

[2] Peter B. Andrews, "A Transfinite Type Theory with Type Variables",North-Holland Series on Logic and the Foundations of Mathematics, North-Holland Publishing Company, 1965.

[3] Peter B. Andrews, "General Models, Descriptions, and Choice in Type Theory",J. Symbolic Logic 37,pp 385-394, 1972.

[4] Peter Aczel, "Non-Well-Founded Sets", CSLI Lecture Notes No.14,pp 385-394,CSLI, 1988.

[5] A.Ohori, "A Study of Semantics, Types, and Languages for Databases and Object-Oriented Programming," Ph D Thesis, University of Pensylvania, 1989.

[6] D.Maier : "A Logic for Objects", Proc. of the Workshop on Foundations of Deductive Databases and Logic Programming, pp.6-26, Washington DC, 1986.

[7] M.Kifer and J. Wu : "A Logic for Object-Oriented Logic Programming (Maier's O-Logic Revisited)", Proc. of 8th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems, pp.379-393, 1989.

[8] M.Kifer and G.Lausen : "F-Logic: A Higher-Order Language for Reasoning about Objects, Inheritance, and Scheme", Proc. of the 1989 ACM SIGMOD Int'l Conf. on the Management of the Data, pp.134-146, 1989.

[9] M.Kifer, G.Lausen, J.Wu : "Logical Foundations of Object-Oriented and Frame-Based Languages", Techncial Report 93/06, Department of Computer Science, SUNY at Stony Brook, April 1993.

[10] W. Chen and D.S.Warren : "C-Logic of Complex Objexcts", Proc. of the 1989 ACM SIGMOD Int'l Conf. on the Management of the Data, pp.369-378, 1989.

[11] S. Watari, Y. Honda and M. Tokoro : "Morphe: A Constraint-Based Object-Oriented Language Supporting Situated Knowledge", Proc. of the Int'l Conf. on Fifth Generation Computer Systerms, vol.2, pp.1044-1051, 1992.

[12] H. Yasukawa, H. Tsuda and K. Yokota : "Objects, Properties, and Modules in (Quixote)", Proc. of the Int'l Conf. on Fifth Generation Computer Systerms, vol.1, pp.257-268, 1992.

[13] Edit. Jack Minker : "Foundations of Deductive Databases and Logic Programming", Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1988.

[14] M. Reinfrank, J. de Kleer, M. L. Ginsberg,E. Sandewall : "Non-Monotonic Reasoning", Lecture Notes in Artificial Intelligence (2nd Intl. Workshop Grassau, FRG, June 1988),Springer-Verlag, 1988.

[15] 西村、難波："公理論的集合論",共立講座 現代の数学 2,共立出版,1985.