停止性を保証する汎用様相論理定理証明手続き

櫟 粛之
NTTコミュニケーション科学研究所
619-02 京都府相楽郡精華町光台2-2
araragi@cslab.kecl.ntt.jp

あらまし

本研究では、いくつかの様相論理体系に対して、統一的な立場で、停止性を保証する証明手続きを与える。我々は、[Ara 1]、[Ara 2] において、一階述語論理式で特徴づけられるKripke frame のクラスに対し完全となる正則体系の全体に対して、統一的に適用できる証明手続きを与えた。この手続きは、prefixed tableau法（[Fit]）の考えを一般化したもので、一階述語論理式Σによって特徴づけられる体系S_Σに対して、「$S_\Sigma \vdash \phi \Leftrightarrow$ ある$\mu \in N$があり、$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$」となる一階述語論理式$\Delta(\phi)_\mu$を構成する手続きである。この方法による証明手続きは、体系がdecidableであっても、停止性を保証するとは限らない。それは、$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$かどうかをチェックする一階述語論理の定理証明手続きが停止性を保証しないこと、ϕがS_Σの定理でない場合、全てのμに対して$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$をチェックしなければならないことによる。本研究では、ある種の体系に対して、ϕの形から、$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$の証明探索が有限の範囲に限定でき、またチェックすべき$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$の$\mu$の最大値を評価する手法を与えた。これにより、$S_\Sigma \vdash \phi$か否かのチェックが有限回のステップで終了する証明手続きが得られる。

A Uniform Theorem Proving Method for Modal Logics with Termination

Tadashi Araragi
NTT Communication Science Laboratories
2-2 Hikaridai, Seika-cho, Soraku-gun,
Kyoto 619-02 Japan
araragi@cslab.kecl.ntt.jp

Abstract

In this paper, we propose a new method of giving a theorem proving procedure with termination for some modal logics, from a uniform point of view. In [Ara1] and [Ara2], we gave a uniform theorem proving method for normal systems which are complete for a class of Kripke frames characterized by a first-order formula . This procedure , based on the idea of the prefixed tableau method [Fit] , constructs first order formulas $\Delta(\phi)_\mu$ for each natural number μ with the property: $S_\Sigma \vdash \phi$ iff for some $\mu \in N$, $\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$,where S_Σ is the system characterized by the first-order formula Σ. This proving procedure does not guarantee the termination even for decidable systems. It is because theorem proving of $\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$ in the first-order logic does not terminate in general and, if ϕ is not a theorem of S_Σ , we have to check $\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$ for all μ. In this paper, for some modal logics, we give a uniform method of obtaining the information from a formula ϕ which enables us to reduce the proof search of $\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$ to finite steps and gives an upper bound of μ which ensures that there is no proof for $\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$ for any μ if there is not for any μ below the bound. Hence, we get the theorem proving method with termination for the modal logics.

1．はじめに

様相論理の代表的な証明手続きとして、tableau法[Fit]、prefixed tableau法（[Fit]、[Wal]）、導出原理を用いる方法（[Ohl]）などがある。しかしこれらの方法で手続きの停止性が保証されるのは、analytic（[Fit]）と呼ばれるものやS5など、ごく限られた体系だけである。一方、体系のdecidabilityを証明する代表的な方法としてfiltrationを用いてfinite model property (fmp)を示す方法（[Hug]）がある。しかし効率の面で定理証明手続きの実現には適さず、また、fmpを示すこと自身たやすいことではない。

我々は先に、標準的な体系を含む十分広い体系のクラスに統一的に適用できる汎用の定理証明手続きを提案した（[Ara1]、[Ara2]）。このクラスは、一階術語論理式（Σ）で特徴づけられるKripke frameのクラスに対して完全な体系（S_Σ）からなる。この定理証明手続きは、prefixed tableau法の考えを拡張したもので、与えられた様相論理式ϕと自然数μに対して、次の性質を持つ一階述語論理式$\Delta(\phi)_\mu$を構成する。「$S_\Sigma \vdash \phi \Leftrightarrow$ ある$\mu \in N$があり$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$」。この性質により、この証明手続きは健全かつ完全なものになる。しかし、この手続きはdecidableな体系に対しても、一般に停止性を保証しない。それは、$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$のチェックが停止性を保証しないことと、$\phi$が定理でない場合、$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$のチェックを全ての$\mu$に対して行うことになるからである。

この論文では、抽象的な議論の為、健全かつ完全な抽象的なタブロー法を導入する。そして「そこで生成されるbranchにconnectionがあるなら、ϕで決まるある広がりの中に必ずconnectionがある」ことを仮定して、この場合、ある有限個のμに対して、$\Sigma \vdash_{FOL} \Delta(\phi)_\mu$の、しかも有限の深さの証明探索をすれば十分であることを示す。そして最後に、「生成されるbranchにconnectionがあるなら、ϕで決まるある広がりの中に必ずconnectionがある」という性質を代表的な体系（S4.3、S4.2）に対して示す。ここで示される方法は、他の代表的な体系に対しても同様に適用できる。

2．first-order 定義可能な様相命題論理体系とその汎用定理証明手続き

最初に、様相論理のシンタックスとそのセマンティクスについて必要な事項を述べる。

2.1 様相論理のシンタックス

[定義１] 本論文で扱う様相命題論理の言語 $\mathcal{L}$のアルファベットは以下のものからなる。
論理記号：$\wedge$、$\vee$、$\neg$、$\supset$、L
可算無限個の命題変数：p、q、r、...

[定義２] 言語 $\mathcal{L}$の様相命題論理の整式（あるいは単に式）は以下のように帰納的に定義される。
1) $\mathcal{L}$の命題変数は整式である。
2) ϕ、ψが整式のとき、$\phi \wedge \psi$、$\phi \vee \psi$、$\phi \supset \psi$は整式である。
3) ϕが整式のとき、$\neg \phi$、Lϕは整式である。

通常どおり、整式における部分式の区切りをはっきりさせるため、補助記号の左括弧（、右括弧 ）は自由に使うものとする。

2.2 様相論理のセマンティクス

[定義３] Wを任意の空でない集合、RをW上の2項関係（即ち$R \subset W \times W$）とするとき、対<W,R>を frame と呼ぶ。Wを世界の集合、Rを世界間の到達関係と呼ぶ。

VをWから言語 $\mathcal{L}$の命題変数全体の集合(PVと書く）の部分集合全体（2^{PV}）への関数（V：W->2^{PV}）とする。

3対<W,R,V>を言語 $\mathcal{L}$のKripke structure 、Vをframe <W,R> の付値と呼ぶ。以下にKripke structureを使ってモデルを定義する。

まず、MをKripke structure <W,R,V>、wをWの元、ϕを整式とするとき、M、w、ϕの間の関係M,w $\models \phi$をϕの構造に関する帰納法により以下のように定める。
1) pが命題変数のとき、M,w $\models$ p iff p$\in$V(w)。
2) M,w $\models \phi \vee \psi$ iff M,w $\models \phi$またはM,w $\models \psi$。
3) M,w $\models \phi \wedge \psi$ iff M,w $\models \phi$かつ M,w $\models \psi$。
4) M,w $\models \phi \supset \psi$ iff M,w $\models \phi$でない（これをM,w $\not\models \phi$と書く）、またはM,w $\models \psi$。
5) M,w $\models \neg \phi$ iff M,w $\not\models \phi$。
6) M,w $\models$ Lϕ iff R(w,v)が成り立つすべてのvに対しM,v $\models \phi$。

すべてのw$\in$Wに対してM,w $\models \phi$のとき、M $\models \phi$と書き、このとき、Kripke structure Mをϕの(Kripke) モデルと呼ぶ。

便宜上、以下で$M,w \models \phi$、$M,w \not\models \phi$を各々、$M,w \models T\phi$、$M,w \models F\phi$と書くことがある。Tはtrue、Fはfalseを意味する。

2.3 first-order 定義可能な体系

Kripke structureからなる、ある集合Sがあって、体系の定理全体の集合が$\{\phi \mid$ 任意の$\langle W,R,V\rangle \in S$に対して$\langle W,R,V\rangle \models \phi\}$と一致するとき、この体系は**正則体系**と呼ばれる。また、frameからなる、ある集合Cがあって、体系の定理全体の集合が$\{\phi \mid$ 任意の$\langle W,R\rangle \in C$、任意の$\langle W,R\rangle$の付値Vに対して$\langle W,R,V\rangle \models \phi\}$と一致するとき、この体系は**完全正則体系**と呼ばれる。本論文で対象とする様相論理の体系はCがelementaryである完全正則体系である。正確には次のように定義される。

[定義4] ΣをRと=のみを述語として含む一階述語論理の閉整式とし、frameのクラスC(Σ)を次のように定める。$C(\Sigma)=\{\text{frame } \langle W,R\rangle \mid \langle W,R\rangle \Vdash \Sigma\}$。ここで記号⊩は今後、一階述語論理における充足関係を表すものとする。体系の定理全体の集合が$\{\phi \mid$ 任意の$\langle W,R\rangle \in C(\Sigma)$、任意の$\langle W,R\rangle$の付値Vに対して$\langle W,R,V\rangle \models \phi\}$と一致するとき、この体系を**Σによって定義される完全正則体系**(略して**Σ-体系**)と呼ぶ。ある整式によって定義される完全正則体系を**first-order 定義可能な体系**と呼ぶ。

注) 正則体系の定義としては、このようにセマンティクスに基づくもの以外に、公理と推論規則を設けて定義するシンタックスに基づくものもある。詳しくは[Hug]を参照。
注) 今後、特に混乱のないかぎり、W上の2関係Rと一階述語言語の述語RをともにRで表す。

first-order定義可能な体系のクラスは、以下の例でも見られるように、有名な体系のほとんどを含む十分に広いクラスである。
まず、prefix付き式を定義する。

[定義5] **prefix**とは変数と関数記号から構成される項のリストを言う。**符号**とは記号TまたはFのことを言う。**prefix 付き式**とはprefixと符号と整式の3要素がこの順に並ぶ列と定義する。

2.4 汎用定理証明手続き

次に、prefix付き式を用いて定理証明手続きを述べる。その前に必要な定義をしておく。

[定義6] **中間式**とは以下の条件で定義される式とする。
1) prefix付き式は中間式である。
2) ϕ、ψが中間式のとき、$\phi \times \psi$、$\phi + \psi$はともに中間式である。

中間式Eがprefix式ϕ_1、...、ϕ_2から×と+で構成されるとき、ϕ_1、...、ϕ_2を**中間式Eに属するprefix 付き式**と呼ぶ。

[証明手続き]
入力として、整式θと自然数μが与えられたとき、以下の手続きを実行する。

[step 1]
E=prefix付き式 $[0]F\theta$ とする。

[step 2]
while：Eに属するあるprefix付き式に対して、以下の変換ルールの中で、あるルールrがあり、その左辺がそのprefix付き式にマッチする。
do：そのルールrに従って、マッチするEのprefix付き式をルールrの右辺と置き換える。そしてその結果をあらためてEとする。

<α-変換>
$sT\phi \wedge \psi \rightarrow sT\phi \times sT\psi$ (sはprefixを表すものとする。)
$sF\phi \vee \psi \rightarrow sF\phi \times sF\psi$
$sF\phi \supset \psi \rightarrow sT\phi \times sF\psi$
$sT\neg\phi \rightarrow sF\phi$
$sF\neg\phi \rightarrow sT\phi$

<β-変換>
$sT\phi \vee \psi \rightarrow (sT\phi + sT\psi)$
$sF\phi \wedge \psi \rightarrow (sF\phi + sF\psi)$
$sT\phi \supset \psi \rightarrow (sF\phi + sT\psi)$

<ν-変換>
$sTL\phi \rightarrow s*[x_1]T\phi \times \ldots \times s*[x_\mu]T\phi$
ここで、x_1、...、x_μは今までに使われていないμ個の新しい変数(μは入力で与えられた数)で、*はリストの結合を表す。

<π-変換>

sFL ϕ → s*[f($x_1,\ldots,x_\mu$)]F ϕ

ここで、fは今までに使われていない新しい関数記号で、x_1、. . . . 、x_μ はsに現われる全ての変数とする。

[step 3]

while：Eのある部分式に対して以下の変換ルールの中で、あるルールrがあって、その左辺がEの部分式にマッチする。

do：そのルールrに従って、その部分式をルールrの右辺と置き換える。そしてその結果をあらためてEとする。

$$S\times(P+Q) \rightarrow (S\times P+S\times Q)$$
$$(P+Q)\times S \rightarrow (P\times S+Q\times S)$$

[step 4]

[記号] [step 3]で得られたEは括弧を取り除いて$E = S_{1,1}\times\ldots\times S_{1,k1}+\ldots+S_{n,1}\times\ldots\times S_{n,kn}$と表される。ここで$S_{i,j}$はprefix付き式で、その整式部分は命題変数になっている。このEに対して、各$S_{j,1}\times\ldots\times S_{j,kj}$を$\theta$のbranchと呼び、tab($\theta$)$_\mu$を$\theta$のbranch全体の集合$\{S_{1,1}\times\ldots\times S_{1,k1}, \ldots, S_{n,1}\times\ldots\times S_{n,kn}\}$と定める。同じ整式を持ち、逆の符号を持つprefix付き式の対をconnectionと呼ぶ。connection coが$<[g_1,\ldots,g_m]Tp,\ [h_1,\ldots,h_n]Fp>$ という形をしていたとする。このとき、rel(co) を $\mathrm{rel(co)} = R(g_1,g_2)\wedge\ldots\wedge R(g_{m-1},g_m)\wedge R(h_1,h_2)\wedge\ldots\wedge R(h_{n-1},h_n)\wedge(g_m=h_n)$ と定義する。

tab(θ)$_\mu$ = $\{br_1,\ldots,br_n\}$ だったとする。ここでbr_iはEのbranchとする。br_iに含まれるconnectionの全てを co(i,1),...,co(i,k_i)とする。このとき$\nu(\theta)_\mu = \wedge_{i=1\,\mathrm{to}\,n} \vee_{j=1\,\mathrm{to}\,ki}\ \mathrm{rel(co(i,j))}$とする。

また、π-set(θ)$_\mu$ =

$\{R(g_1,g_2)\wedge\ldots\wedge R(g_{p-2},g_{p-1})\supset R(g_{p-1},g_p)$ |
tab(θ)$_\mu$ 内にあるbranch br_iがあり、
br_i内にあるprefix付き式
$[g_1,\ldots,g_p,\ldots,g_l]S\phi$があり、
g_pが変数でない項$\}$ とし、

$\pi(\theta)_\mu$ = π-set(θ)$_\mu$ の全ての元の連言とする。

$\Delta(\theta)_\mu = \exists x_1\ldots\exists x_n\,[\pi(\theta)_\mu\supset\nu(\theta)_\mu]$ とする。

ここで$\{x_1,\ldots,x_n\}$は$\pi(\theta)_\mu\supset\nu(\theta)_\mu$に現われる変数全体とする。 □

$\Delta(\theta)_\mu$ は$\forall x_1\ldots\forall x_n\,\pi(\theta)_\mu\supset\exists x_1\ldots\exists x_n\,\nu(\theta)_\mu$ とも書ける。また以下では、$\forall x_1\ldots\forall x_p\,\pi(\theta)_\mu$ を $\forall x\,\pi(\theta)_\mu$ などと略記することもある。

[定理] θがΣ-体系の定理である。

⇔ $\Sigma\supset\Delta(\theta)_\mu$がある$\mu$に対して一階述語論理の定理である。

証明は[Ara2]参照

3. 抽象的タブロー法

まず、Σを連言標準に変換して、それをΣ^*とする。Σ^*は、$R(a_1,a_2)\wedge\ldots\wedge R(a_{m-1},a_m)\wedge(b_1=b_2)\wedge\ldots\wedge(b_{n-1}=b_n)\supset R(c_1,c_2)\vee\ldots\vee R(c_{p-1},c_p)\vee(d_1=d_2)\vee\ldots\vee(d_{q-1}=d_q)$の形の式の連言になる（a1、... b1、...、c1、....d1、...は項）。ここで以下、これらの式のhead部に現れる項で、R(c,c')の形のアトムのc'の位置に現れるもの以外は全て、必ずそのbody部に出現するというΣに対する制限を設ける。

次に、式ϕに対するS_Σの抽象的タブロー法の手続きを与える。この手続きでは複数の有向グラフが生成され、各グラフのノードには複数の符号付き式が置かれてる。

[抽象的タブロー手続き]

入力式をϕとする。

[step 1] ノードoにFϕを置く。

[step 2] 各グラフの各ノード内にある各式に対し、次のα-操作、β-操作を、適用できるものがなくなるまで繰り返し適用する。

α-操作： α式があったらα分解し（この場合、prefixに関する部分は無視する。以下同様）もとのα式と、生成されたα部分式α1、α2の2つとを置き換える。

β-操作： β式があったら、そのグラフのコピーを作り、各々の2つのグラフの対応するノードで、そのβ式とそれをβ-変換して生成されたβ部分式β1、β2を1つずつ置き換える。

[step 3] 各グラフの各ノードに対し、次の操作を適用できるものがなくなるまで繰り返し適用する。

π-操作： ノード内に*印のついていないπ式があったら、そのπ式に*印を付け、新しいノードを作り、

もとのノードから新しいノードへ、辺を付け加え、新しいノードにそのπ式をπ-変換して得られるπ部分式$\pi^{\cdot}$を入れる。

[step 4] 各グラフに対して、ノードaからbに辺があるとき、$R(a,b)$と解釈してΣ^{*}の節を高々一度だけ適用する。即ち、Σ^{*}のある節 $R(a_1,a_2) \wedge \ldots \wedge (b_1=b_2) \wedge \ldots \supset R(c_1,c_2) \vee \ldots \vee (d_1=d_2) \vee \ldots$のあるインスタンスのbody部が充足されたなら、そのインスタンスのhead部の各アトムに応じてその数だけグラフのコピーを作り、$R(c,c')$に対応するグラフにはcからc'に辺を加える。もしc'に対応するノードがなければそれも生成する。$(d=d')$に対応するグラフでは、ノードdとd'を同一のものとする。以上の操作を**Σ-操作**と呼び、$R(c,c')$に対する処理を∃-導出、$(d=d')$に対する処理を=-導出と呼ぶことにする。

[step 5] 各グラフの各ノードに対し、次の操作を適用できるものがなくなるまで繰り返し適用する。
ν-操作：ν式があれば、そのノードから出ている全ての辺の終点ノードに、そのν式をν-変換して生成されるν部分式$\nu^{\cdot}$を入れる。

[step 6] [step 2]から[step 5]で、なんらかの操作が行われたら[step 2]に戻る。そうでなかったら処理を終了する。 □

S_Σの抽象タブローの手続きで、入力ϕに対して、有限回のステップで、全てのグラフがconnectionを含む、即ち、各グラフにあるノードがあって、ある命題変数pに対してTp、Fpの両方を含む時、abst_tab$(\Sigma) \vdash \phi$と書く。また、式ϕがS_Σにおいて、2章で述べた汎用の定理証明手続きで証明されることを$TP(\Sigma) \vdash \phi$と書く。

[補題１] $S_\Sigma \vdash \phi \Rightarrow$ abst_tab$(\Sigma) \vdash \phi$
証明：S_Σの抽象タブローの手続きで、入力ϕに対して、有限回のステップでは、いつもconnectionを持たないグラフがあるとき、$F\phi$を満たすS_Σのモデルがあることを示せばよい。抽象タブロー手続きでは、最初一つのグラフから出発して、グラフから有限個のグラフを生成する処理が続けられる。即ち、グラフをノードとする無限木が生成される（安定した無限木になる場合もある）。今、あるグラフにconnectionがない時、その親ノードにもconnectionがないことは明らかである。従って、有限回のステップでは「全てのノードがconnectionを持つ」ことがない時にはKönigの補題より、connectionを持たないグラフからなる無限のパスが存在する。このパスをG1、G2、G3、．．．と書く。明らかに、$i<j$ならGiはGjの部分グラフで、Giの各ノードに含まれる式はGjの対応するノードにも含まれている。今、このG1、G2、G3、．．．をもとにモデル<W,R,V>を次のように定義する。

・$W = \cup_{i=1}^{\infty}$ {Giのノード}
・$R(e1,e2)$ ⇔ 「あるnがあって、e1、e2∈Gnかつ、Gnでe1からe2への辺がある」
・$V(p) = \{e \mid e \ni Tp\}$

このとき<W,R,V>はS_Σのモデルで、任意の式θに対して、次の事実が成り立つことが簡単に示せる。
$\langle W,R,V\rangle, e \models P \Leftrightarrow P \in e$ （Pは符号付き式）
特に、$F\phi \in 0$より、$\langle W,R,V\rangle, 0 \models F\phi$となる。□

abst_tab$(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$ とは、論理式全体から自然数への計算可能な関数b_1、b_2があって次が成り立つこととする。abst_tab$(\Sigma) \vdash \phi$の時、抽象的タブロー法の手続き中に、各ノードから出る辺の数の最大数が$b_1(\phi)$以下で、各グラフのノードの総数の最大数が$b_2(\phi)$以下で、しかも全ての木がconnectionを持つ状態がある。

$TP(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$ とは、論理式全体から自然数への計算可能な関数d_1、d_2があって次が成り立つこととする。Σをスコレム化したものをΣ'とする。Σ'及び$\Delta_{d1(\phi)}$に現れるスコレム関数から作られるエルブラン空間で、深さ$d_2(\phi)$以下の項のみをΣ'及び$\Delta_{d1(\phi)}$の全称束縛の変数に代入した基礎例全体を$\Sigma(\phi)$及び$\Delta_{d1(\phi)}(\phi)$とする。この時、
$\Sigma(\phi) \vdash \Delta_{d1(\phi)}(\phi)$ が成り立つ。

[補題２] abst_tab$(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi \Rightarrow TP(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$
証明：abst_tab$(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$を仮定する。抽象タブロー生成手続きにおいて、各グラフGに付随するインデックスIを次のように構成する。

最初の、ノード0のみからなるグラフを考える。このノードには式$F\phi$が入っているが、このグラフのインデックスを$[0]F\phi$とし、$[0]F\phi$を式$F\phi$の表現とする。

今、あるノードに、ある式θがあって、この式に、ある操作が施されるとする。また式θの表現をS_1、．

. . .、S_n とする。

操作がα-操作で、式$\alpha 1$、$\alpha 2$が生成されたとき、θの表現S_1、. . . .、S_n及びそれに対応するインデックス中の各々も、$\alpha 1^1 \times \alpha 1^2$、. . . .、$\alpha n^1 \times \alpha n^2$に$\alpha$-変換し、各々を入れ替える。そして、$\alpha 1$の表現を$\alpha 1^1$、. . . .、$\alpha n^1$とし、$\alpha 2$の表現を$\alpha 1^2$、. . . .、$\alpha n^2$とする。

操作がβ-操作で、式$\beta 1$、$\beta 2$が生成されたとき、S_1、. . . .、S_nを各々、$\beta 1^1 + \beta 1^2$、. . . .、$\beta n^1 + \beta n^2$にβ-変換し、$\beta 1$を入れるグラフのインデックスについては、IでS_1、. . . .、S_nの部分を消去したものをI'とし、$\{\beta 1^{i_1} \times . . . , \beta n^{i_n} \mid i_1 = ... = i_n = 2$ではない$\}$ の元を一個ずつとりI'と×で結んだもの全体を＋で結んだものを新しいインデックスとし、$\beta 1^1$、. . . .、βn^1を$\beta 1$の表現とする。もう一つのグラフに対しても、$\{\beta 1^{i_1} \times . . . , \beta n^{i_n} \mid i_1 = ... = i_n = 1$ではない$\}$ を利用して同様の操作を行う。

操作がν-操作で、式θ が今まで、分配されたことのないノードv_1、. . . .、v_mに分配されるとし、そこに至る辺のインデックスを各々u_1、. . . .、u_mとする（インデックスが複数ある辺は適当に一つ選ぶ）。θの表現を以下のように書く。

$$s_1{*}[w_1]P \times . . \times s_1{*}[w_k]P \times s_1{*}[x^1_{k+1}]P \times . . \times s_1{*}[x^1_{\mu}]P$$
$$\vdots$$
$$s_r{*}[w_1]P \times . . \times s_r{*}[w_k]P \times s_r{*}[x^r_{k+1}]P \times . . \times s_r{*}[x^r_{\mu}]P$$

（Pは符号付き式、w_k は項、x^j_{k+i} は変数）

ここで、全てのj（$1 \leqq j \leqq r$）に対し、x^j_{k+1}、. . . .、x^j_{k+m} にu_1、. . . .、u_mを代入したものを新しいインデックスとし、また、θ からv-操作によって式をν^-としたとき、ノードv_iに置かれるν^-の表現を、$s_1{*}[u_i]P$、. . . .、$s_r{*}[u_i]P$とする。

操作がπ-操作で、式π^- が生成されたとき、対応する式S_1、. . . .、S_n を各々、$s_1{*}[t_1]P$、. . . .、$s_n{*}[t_n]P$にπ-変換し（ただし、変数はこれまでの操作でインスタンシエートされているものとする）、変換前のものと入れ替える。そして、$s_1{*}[t_1]P$、. . . .、$s_n{*}[t_n]P$をπ^-の表現とする。さらに新しくできた辺に、複数のインデックスt_1、. . . .、t_nを全て付ける。

操作がΣ-操作の時、生成されるグラフのインデックスは変わらない。∃-導出 が施される場合は、新しくできた辺に、∃-導出 のR(c,c')の項c'をインデックス付けする。

以上の操作で、新しくν-式が現れたときは、その表現s_1TLP、. . . .、s_rTLPを、$s_1{*}[x^1_1]P \times ... \times s_1{*}[x^1_{\mu}]P$、. . . .、$s_r{*}[x^r_1]P \times . . . \times s_r{*}[x^r_{\mu}]P$に書き換える。

以上の処理が終わったとき、ν式の表現で、部分的に変数がインスタンシエートされているものに対しては、残りの変数も、その最後のインスタンシエートの項を代入する。

以上の操作から、グラフのインデックス全体は、μに対して汎用定理証明で生成されるbranchを全て覆っていることがわかる。そして、$\nu(\phi)_\mu$ の任意のconjunct Cに対して、そのbranchをカバーするグラフのconnectionが、$\Gamma \vdash \sigma C$を与える。ここで、Γはこのグラフの生成時に、Σで利用されたホーン節の集合であり、σは上記の操作で行われた変数への項の代入を集めたものである。Γの元はΣの元のインスタンスではないが、Σ-操作でインデックスは変わらないから、例えばΓの元が$A1 \wedge ... \wedge An \supset B1$で、これが$\Sigma$の元のインスタンシエーション$A1 \wedge ... \wedge An \supset B1 \vee B2$を使っているとき、同じインデックスのグラフで、$A1 \wedge ... \wedge An \supset B2$を用いて$\sigma C$を導くものがある。これらの対を張り合わせることにより、$\Sigma^{**} = \{$上記の操作で使われたΣのインスタンス全体$\}$、$\pi(\phi)_\mu{}^{**} = \{$上記の操作で現れる項による$\pi(\phi)_\mu$ のインスタンス全体$\}$とすると、$\Sigma^{**}, \pi(\phi)_\mu{}^{**} \vdash \sigma C$ がいえ、これが任意のconjunct Cに対して成り立つから、$\Sigma^{**}, \pi(\phi)_\mu{}^{**} \vdash \sigma\ \nu(\phi)_\mu$、よって、$TP(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$ が成り立つ。 □

$TP(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$ か否かは明らかに有限回のステップで判定できる。今、$TP(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi \Rightarrow TP(\Sigma) \vdash \phi$ は明らかで、また、$TP(\Sigma) \vdash \phi \Leftrightarrow S_\Sigma \vdash \phi$ が[Ara2]で示されている。従って、これらと補題１、補題２より、

abst_tab(Σ) $\vdash \phi \Rightarrow$ abst_tab(Σ)$_{\leq} \vdash \phi$ --(1)

ならば、$TP(\Sigma) \vdash \phi \Rightarrow TP(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$ がいえる。即ち、(1)の時、S_Σ には停止性を保証する証明手続きがある。

４．証明手続きの停止性

以下に、代表的な例S4.3、S4.2に対して
$\mathrm{abst\_tab}(\Sigma) \vdash \phi \;\Rightarrow\; \mathrm{abst\_tab}(\Sigma)_{\leq} \vdash \phi$
の示し方を説明する。同様の議論がK、D、T、B、S4、B4、S5などの代表的な体系に対しても行える。

[S4.3 の場合]

S4.3 を特徴付けるΣは次の3式の連言である。

$\forall x R(x,x)$ --- (1)

$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))$ --- (2)

$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z) \supset R(y,z) \vee R(z,y))$ --- (3)

今、抽象タブロー法のグラフで、図１のようなconnectionができたとする。左の実線部は、式Fϕが分解されて式Tpが導かれるまでそのTpのオカレンスを含む部分式がたどった経路を示す。右側の実線部もFpに対する同様の経路とする。実線部の各辺に付随する□や◇は、部分式が各々ν-操作、π-操作で、その辺の始点の世界から終点の世界に導かれたことを表す。この経路を合流させる為には、(1)、(2)、(3)が使われるが、これらの式の形から、合流の為の導出に使う世界は、実線上の世界で十分である。また、実線上の□の部分は(1)の適用によってできる辺に置き換えることができる。以上の考察から、グラフにconnectionがある場合、深さ$l_{\Diamond}(\phi)$（$l_{\Diamond}(\phi)$はFϕのπ型の部分式のnestの最大数）までのグラフで見つかり、一点からでる辺の数は深さ$l_{\Diamond}(\phi)$までのグラフのグラフ全体の辺の数で押さえられる。一点から、π-操作で生成される点の数は高々$m_{\Diamond}(\phi)$（$m_{\Diamond}(\phi)$はFϕのπ型の部分式のオカレンスの総数）であるから、上記の点の数は、深さ$l_{\Diamond}(\phi)$、各ノードからでる枝の数が$m_{\Diamond}(\phi)$の木の総ノード数$\Sigma_{i=0}^{l_{\Diamond}(\phi)} m_{\Diamond}(\phi)^i$で押さえられる。

[S4.2 の場合]

S4.2を特徴づけるΣは次の3式の連言である。

$\forall x R(x,x)$ --- (1)

$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \supset R(x,z))$ --- (2)

$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(x,z) \supset \exists w R(y,w) \vee R(z,w))$ --- (3)

今、前と同様、図２のように二つの経路がconnectionを与えていたとする。(1)、(2)は同じ経路上にしか辺を張ることができない。従って、二つの経路を合流させるには（必要なら）いくつかの中間の経路を使って(3)を用いなければならない。従って、各々この二つの実線の経路には、(3)の起点（即ち、(3)式のy,zにインスタンシエートされる点）が少なくとも一つある。このような起点のうち、合流点に一番近いものを各々a、bとし、各々を起点として、(3)により生成された辺をl、mとする。明らかにl、m各々を通り、合流点に達する経路P1、P2がある（図３）。今、aから合流点までの実線の経路で、◇の付随する辺があったなら、この経路がP1と合流するためにもう一度(3)を使わなければならない。しかしこれは、aのとり方に反する。従って、aから合流点までの実線の経路には□のみが付随する。bに関しても同様である。よってこのグラフを図４のように書き換えてもconnectionの生成には影響しない。また、実線の経路上の別の□の辺に対しても、(1)で生成された辺で置き換えることにより、このconnectionの導出を他の経路に依存しないようにできる。従って、S4.3の場合のような評価ができる。ただし、一点から生成される世界は、π-操作以外に、(3)で作られるものもあり、相手の辺を考えるとこの数は　$m_{\Diamond}(\phi) + \Sigma_{i=0}^{l_{\Diamond}(\phi)} m_{\Diamond}(\phi)^i$　（＝Mとする）で押さえられ、μは$\Sigma_{i=0}^{l_{\Diamond}(\phi)} M^i$で押さえられる。

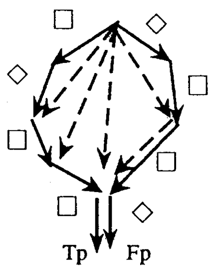

図　1

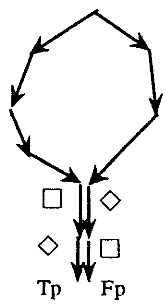

図　2

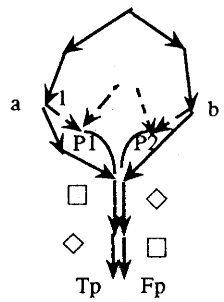

図　3

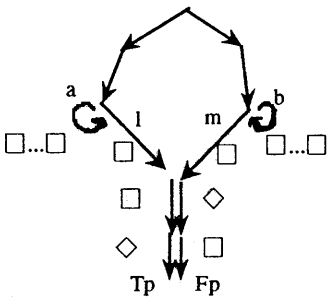

図　4

おわりに

本論文で与えた方法は、もちろん任意のS_Σ体系に応用できるわけではない。実際、Σで与えられる体系でdecidableでないものもある（[Kra]）。一方、この方法は、∀限定のみのΣ式や、∀∃限定のΣ式に対しても適用できる。しかし、∀∃∀∃などのタイプのΣに対しては、ここで述べたようなグラフの幾何学的な議論だけでは評価式は得られず、組合せ的な、より精緻な議論が必要と思われる。

謝辞

本研究の機会を与えてくださったNTTコミュニケーション科学研究所の松田晃一所長ならびに中野良平主幹研究員に感謝します。また、この研究を温かく見守ってくださったNTTコミュニケーション科学研究所前所長（現、同志社大学工学部教授）河岡司氏にも感謝の意を表します。

参考文献

[Ara1] T.Araragi: A Uniform Prefixed Tableau Method for Positive First-Order Definable Systems, Workshop of Theorem Proving with Analytic Tableaux and Related Methods, pp.4-6, 1992.

[Ara2] 櫟　粛之: First-order定義可能な様相命題論理体系に対する自動定理証明, 人工知能学会論文誌　投稿中.

[Fit] M.C.Fitting: Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics, volume 169 of Synthese library, Dordrecht, Reidel, 1983.

[Hug] G.H.Hughes and M.J.Cresswell: A Companion to Modal Logic, London, Methuen, 1984.

[Kra] M.Kracht: Highway to the Danger Zone, Journal of Logic and Computation, vol 5, pp.93-109, 1995.

[Ohl] H.J.Ohlbach: Semantic-based Translation Methods for Modal Logics, Journal of Logic and Computation, vol 1, pp.691-746, 1991.

[Wal] L.Wallen: Automated Proof Search in Non-Classical Logics, The MIT Press, 1989.