連立１次方程式の解が含む誤差

平野菅保，布広永示（日大・生産工）

§１　まえがき

多元連立１次方程式の数値解を電子計算機を用いて求める場合．丸め誤差が近似解に入ることをできるだけ防ぐため．高精度演算を用いて計算している。しかし．入力時に用いる係数，定数は一般に誤差を含んでいるので．これらの誤差による誤差が必ず近似解に入る。一方．係数，定数に含まれるそれぞれの誤差は．それぞれすべて．完全に独立している誤差ではなく．しばしば恒等的に等しい誤差を含んでいる場合がある。したがって．係数，定数に含まれるそれぞれの誤差を．それぞれすべて．完全に独立している誤差とすると．近似解に含まれる誤差を過大に評価する場合がある。そこで．与えられる多元連立１次方程式のそれぞれ誤差を含む係数，定数をそのまま用いて．高精度演算により消去法で近似解を求め．次いで．求められた近似解を用いて．係数，定数に含まれる．互いに独立した誤差によって近似解に入るそれぞれの誤差を、誤差としては十分正確に、求めることができた。

§２　係数，定数が含む誤差

n元連立１次方程式

$$\sum_{i=1}^{n} a_{Tij} x_j = b_{Ti} \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{1}$$

を浮動小数点演算を用いて数値計算によって解く場合．係数 a_{Tij}，定数 b_{Ti} をそれぞれ．一般には有限桁の数値に丸めた数値を用いて計算し．

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,2,\cdots\cdots,n \tag{2}$$

で与えられる。n元連立１次方程式（1）と（2）の係数，定数はそれぞれ

$$a_{ij} = a_{Tij} + \Delta a_{ij} \qquad b_i = b_{Ti} + \Delta b_i \tag{3}$$
$$i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots, n$$

なる関係が既知であり．係数 a_{ij}，定数 b_i がそれぞれ含む誤差 Δa_{ij}，Δb_i は．一般には未知である。しかし．誤差 Δa_{ij}，Δb_i は、互いに独立した m 個の誤差

$$|\varepsilon_k| \leqq 1.0 \qquad k=1,2,\cdots\cdots,m \tag{4}$$

によって．ε_k（4）に関して２次以上の項を無視できるとすると．

$$\Delta a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \Delta a_{ijk}\, \varepsilon_k \qquad \Delta b_i = \sum_{k=1}^{m} \Delta b_{ik}\, \varepsilon_k \tag{5}$$
$$i,\ j = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

のように表わされる。

§３　近似解が含む誤差

n元連立１次方程式（2）を、丸め誤差を無視できるように、高精度な浮動小数点演算を用いて解くと．n元連立１次方程式（1）の近似解

$$\bar{x}_j \qquad j=1,2,\cdots\cdots,n \tag{6}$$

が得られ．これらの近似解 $\bar{x}_j$（6）をn元連立１次方程式（2）に代入すると

$$\left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j \right| \ll \left| \sum_{j=1}^{n} \Delta a_{ij}\bar{x}_j \right| + |\Delta b_i| \tag{7}$$

となる。

互いに独立したm個の誤差ε_k (4)によって近似解$\bar{x}_j$ (6)に入るそれぞれの誤差($w_{kj}\varepsilon_k$)は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(w_{kj}\varepsilon_k) = \left(-\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ijk}x_{Tj} + \Delta b_{ik}\right)\varepsilon_k \qquad (8)$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

ただし、x_{Tj} ($j = 1, 2, \cdots\cdots, n$)は$n$元連立1次方程式(1)の解である。

から求められる。そこで

$$\left(-\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ijk}x_{Tj} + \Delta b_{ik}\right) \fallingdotseq \left(-\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ijk}\bar{x}_j + \Delta b_{ik}\right) \qquad (9)$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

がなりたつとすると、n元連立1次方程式(8)の代りに、近似的になりたつ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(w_{kj}\varepsilon_k) = f_{ki}\varepsilon_k \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n \qquad (10)$$

ただし、 $f_{ki} = \left(-\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ijk}\bar{x}_j + \Delta b_{ik}\right)$

から、誤差ε_k (4)によって近似解$\bar{x}_j$ (6)に入る誤差($w_{kj}\varepsilon_k$)を求めることができる。したがって、近似解$\bar{x}_j$ (6)が含む誤差w_jは

$$w_j = \sum_{k=1}^{m} w_{kj}\varepsilon_k \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, n \qquad (11)$$

で求められる。

注1　$x_{Tj} \fallingdotseq \bar{x}_j$ を満足していても、条件(9)を満足しない場合は、n元連立1次方程式(8)の代りに、(10)を用いることはできない。

注2　下記①，②の場合、n元連立1次方程式(2)を消去法で解く計算途中で誤差の消失が起きている。

① n元連立1次方程式(10)の右辺f_{ki}を計算する時、桁落ちが起こる場合、特に大きく桁落ちが起こり、

$$\left|\left(-\sum_{j=1}^{n}\Delta a_{ijk}\bar{x}_j + \Delta b_{ik}\right)\right| \ll \max_{j=1,2,\cdots,n}\left(\left|\Delta a_{ijk}\bar{x}_j\right|, \left|\Delta b_{ik}\right|\right)$$

である場合

② n元連立1次方程式(10)を解くとき、定数項の消去計算途中で桁落ちが起こる場合

§4　最大誤差

n元連立1次方程式(2)を解いて得られる、n元連立1次方程式(1)の近似解$\bar{x}_j$ (6)が含む誤差w_j (11)の絶対値最大の値、すなわち、最大誤差$w_{max\,j}$は、互いに独立している誤差ε_k (4)がそれぞれ条件(4)を満足しなければならないので

$$w_{max\,j} = \sum_{k=1}^{m}\left|w_{kj}\varepsilon_k\right| = \sum_{k=1}^{m}\left|w_{kj}\right| \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, n \qquad (12)$$

で求められる。すなわち、w_{kj}が正か負かにより、誤差ε_k (4)の値を1または−1にすればよい。したがって、任意の近似解$\bar{x}_j$ (6)が最大誤差$\varepsilon_{max\,j}$ (12)を含むように誤差ε_k (4)を決めると、ε_k (4)が1または−1に決まるので、近似解$\bar{x}_j$ (6)以外の近似解$\bar{x}_{j'}$ (6)の誤差$w_{j'}$ (11)は決まってしまい、近似

解 $\bar{x}_j$ (6) が最大誤差 $w_{max\,j}$ を含むとはかぎらない。

§5 例1 係数行列が悪条件である場合

誤差を含まぬ係数 a_{Tij} と真の解 x_{Tj} とを用いて、倍精度演算で定数項 b_{Ti} を計算し、しかる後、係数 a_{Tij}, 定数 b_{Ti} それぞれの9桁目を4捨5入して、8桁の係数 a_{ij}, 定数 b_i を与えた。実際の計算では、係数 a_{ij}, 定数 b_i の9桁目以下に0を加え、ガウスの消去法を用いて、倍精度で計算解を求めた。

① 真の解 x_{Tj} が係数行列の絶対値最小の固有値に対応する固有ベクトルである場合.

a_{ij}

j=1		j=2		j=3		j=4	
3.098822700000000D	0	2.236068000000000D	0	1.732050800000000D	0	1.414213600000000D	0
2.236068000000000D	0	3.098822700000000D	0	2.718281800000000D	0	2.828427100000000D	0
1.732050800000000D	0	2.718281800000000D	0	2.407829700000000D	0	2.645751300000000D	0
1.414213600000000D	0	2.828427100000000D	0	2.645751300000000D	0	2.407829700000000D	0

b_i		真の解				係数行列の固有値			
-8.980965100000000D	-5	xT1	=	1.403710153801282D	-1	λ1	=	9.623618098265684D	0
4.807087700000000D	-4	xT2	=	-7.513399442148851D	-1	λ2	=	1.694731710953316D	0
-4.075426700000000D	-4	xT3	=	6.369825357452139D	-1	λ3	=	-3.044052410977773D	-1
-6.410009600000000D	-5	xT4	=	1.001874015229526D	-1	λ4	=	-6.397681212268087D	-4

計算解				計算解の誤差 絶対値最小の固有値の固有ベクトル		
$\bar{x}$1	=	1.403784600929528D	-1	(xT1 − $\bar{x}$1) / vmin 1	= -5.303596903115662D	-5
$\bar{x}$2	=	-7.513797102682162D	-1	(xT2 − $\bar{x}$2) / vmin 2	= -5.292684574712394D	-5
$\bar{x}$3	=	6.370161752465768D	-1	(xT3 − $\bar{x}$3) / vmin 3	= -5.281071218627698D	-5
$\bar{x}$4	=	1.001927726145258D	-1	(xT4 − $\bar{x}$4) / vmin 4	= -5.361044893393337D	-5

係数が含む誤差 $(\delta_1 = 5.0 \times 10^{-8})$

$\Delta a_{11} = \Delta a_{22} = \delta_1 \varepsilon_1$ $\quad \Delta a_{12} = \Delta a_{21} = \delta_1 \varepsilon_2$ $\quad \Delta a_{13} = \Delta a_{31} = \delta_1 \varepsilon_3$ $\quad \Delta a_{14} = \Delta a_{41} = \delta_1 \varepsilon_4$

$\Delta a_{23} = \Delta a_{32} = \delta_1 \varepsilon_5$ $\quad \Delta a_{24} = \Delta a_{42} = \delta_1 \varepsilon_6$ $\quad \Delta a_{33} = \Delta a_{44} = \delta_1 \varepsilon_7$ $\quad \Delta a_{34} = \Delta a_{43} = \delta_1 \varepsilon_8$

定数が含む誤差 $(\delta_2 = 5.0 \times 10^{-12},\ \delta_3 = 5.0 \times 10^{-13})$

$\Delta b_1 = \delta_3 \varepsilon_9$ $\quad \Delta b_2 = \delta_2 \varepsilon_{10}$ $\quad \Delta b_3 = \delta_2 \varepsilon_{11}$ $\quad \Delta b_4 = \delta_3 \varepsilon_{12}$

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k $(k = 1, 2, \cdots, 8)$ (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=1		k=2		k=3		k=4	
7.018923004647637D	-9	-3.756898551341081D	-8	3.185080876232884D	-8	5.009638630726287D	-9
-3.756898551341081D	-8	7.018923004647637D	-9	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	7.018923004647637D	-9	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	7.018923004647637D	-9

k=5		k=6		k=7		k=8	
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
3.185080876232884D	-8	5.009638630726287D	-9	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
-3.756898551341081D	-8	0.000000000000000D	0	3.185080876232884D	-8	5.009638630726287D	-9
0.000000000000000D	0	-3.756898551341081D	-8	5.009638630726287D	-9	3.185080876232884D	-8

定数が含む、互いに独立した誤差 $\varepsilon_9, \varepsilon_{10}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}$ (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=9		k=10		k=11		k=12	
5.000000000000000D	-13	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-12	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-12	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-13

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k ($k=1, 2, \cdots, 8$)（4）により計算解に入るそれぞれの誤差

w_{kj}

k=1		k=2		k=3		k=4	
-6.412072213738757D	-6	2.300640065541626D	-6	-1.948398349210947D	-6	-3.107994270162306D	-7
3.431883665833530D	-5	-1.239395470434443D	-5	1.050218744561639D	-5	1.658411535660343D	-6
-2.906464425010269D	-5	1.049108924684617D	-5	-8.903438971839271D	-6	-1.389401745487055D	-6
-4.610985406198316D	-6	1.679931051306133D	-6	-1.409125779358512D	-6	-2.359506390782011D	-7

k=5		k=6		k=7		k=8	
1.049920445105616D	-5	1.674627245753724D	-6	-4.558969908005028D	-6	-1.418261192290553D	-6
-5.619845107952411D	-5	-8.874366170860612D	-6	2.440397910876985D	-5	7.519828098427866D	-6
4.766944733833003D	-5	7.438941521188016D	-6	-2.072028203893456D	-5	-6.313225191391216D	-6
7.468801477869435D	-6	1.251358832100687D	-6	-3.219412001471084D	-6	-1.050110291590368D	-6

定数が含む、互いに独立した誤差 ε_9, ε_{10}, ε_{11}, ε_{12}（4）により計算解に入るそれぞれの誤差

w_{kj}

k=9		k=10		k=11		k=12	
-1.520627861449414D	-11	8.249635612280998D	-10	-6.979231744587608D	-10	-1.128688157412485D	-11
8.249635612280989D	-11	-4.413316604319554D	-9	3.737778657230482D	-9	5.925821312297895D	-11
-6.979231744587605D	-11	3.737778657230484D	-9	-3.175384212642720D	-9	-4.916232631562795D	-11
-1.128688157412480D	-11	5.925821312297877D	-10	-4.916232631562779D	-10	-8.752357241168542D	-12

最大誤差

wmax 1	=	2.912452223250891D	-5
wmax 2	=	1.558783076513697D	-4
wmax 3	=	1.319975024216327D	-4
wmax 4	=	2.092677972360594D	-5

眞の誤差

xT1 − $\bar{x}$1	=	-7.444712824572485D	-6
xT2 − $\bar{x}$2	=	3.976605333111394D	-5
xT3 − $\bar{x}$3	=	-3.363950136292537D	-5
xT4 − $\bar{x}$4	=	-5.371091573169728D	-6

最大誤差は係数に含まれる誤差 ε_k ($k=1, 2, \cdots, 8$)（4）によってほぼ決まり、定数に含まれる誤差 ε_9, ε_{10}, ε_{11}, ε_{12}（4）は最大誤差にほとんど影響しない。

② 眞の解 x_{Tj} が係数行列の絶対値最大の固有値に対応する固有ベクトルである場合

b_i

-4.171231100000000D	0
-5.472867000000000D	0
-4.793750100000000D	0
-4.720438900000000D	0

眞の解

xT1	=	-4.334368944962817D	-1
xT2	=	-5.686912046835045D	-1
xT3	=	-4.981234787577122D	-1
xT4	=	-4.905056290353438D	-1

計算解

$\bar{x}$1	=	-4.334383902788541D	-1
$\bar{x}$2	=	-5.686828414717848D	-1
$\bar{x}$3	=	-4.981306611238368D	-1
$\bar{x}$4	=	-4.905067120583672D	-1

計算解の誤差

絶対値最小の固有値の固有ベクトル

(xT1 − $\bar{x}$1)／vmin 1	=	1.065592186754264D	-5
(xT2 − $\bar{x}$2)／vmin 2	=	1.113106228958413D	-5
(xT3 − $\bar{x}$3)／vmin 3	=	1.127560917532351D	-5
(xT4 − $\bar{x}$4)／vmin 4	=	1.080997218179387D	-5

定数が含む誤差 （ $\delta = 5.0 \times 10^{-8}$ ）

$\Delta b_1 = \delta \varepsilon_9$ 　　 $\Delta b_2 = \delta \varepsilon_{10}$ 　　 $\Delta b_3 = \delta \varepsilon_{11}$ 　　 $\Delta b_4 = \delta \varepsilon_{12}$

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k （ $k = 1, 2, \cdots, 8$ ） (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=1		k=2		k=3		k=4	
-2.167191951394270D	-8	-2.843414207358924D	-8	-2.490653305619184D	-8	-2.452533560291836D	-8
-2.843414207358924D	-8	-2.167191951394270D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	-2.167191951394270D	-8	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	-2.167191951394270D	-8

k=5		k=6		k=7		k=8	
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
-2.490653305619184D	-8	-2.452533560291836D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
-2.843414207358924D	-8	0.000000000000000D	0	-2.490653305619184D	-8	-2.452533560291836D	-8
0.000000000000000D	0	-2.843414207358924D	-8	-2.452533560291836D	-8	-2.490653305619184D	-8

定数が含む、互いに独立した誤差 ε_9, ε_{10}, ε_{11}, ε_{12} (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=9		k=10		k=11		k=12	
5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k （ $k = 1, 2, \cdots, 8$ ） (4) により計算解に入るそれぞれの誤差

w_{kj}

k=1		k=2		k=3		k=4	
-4.032327728618972D	-6	-2.710953807103967D	-6	3.782538334704253D	-6	1.235094950659571D	-6
2.152206548841633D	-5	1.443758222657327D	-5	-2.031036408566265D	-5	-6.614980090542087D	-6
-1.823103890310711D	-5	-1.223199830428421D	-5	1.723990353951537D	-5	5.554243973791999D	-6
-2.880696123855946D	-6	-1.926612862189636D	-6	2.693118136115470D	-6	9.329898804073689D	-7

k=5		k=6		k=7		k=8	
-1.404271017741180D	-7	-3.404636051366680D	-6	4.030198440099506D	-6	3.985594193785575D	-6
7.279773027208158D	-7	1.827770126664218D	-5	-2.152567666474851D	-5	-2.128588848359730D	-5
-5.611563685047923D	-7	-1.553827805334719D	-5	1.822900747548104D	-5	1.802439890765324D	-5
-1.560561457432327D	-7	-2.408923589592242D	-6	2.878235208311529D	-6	2.847426853715441D	-6

定数が含む、互いに独立した誤差 ε_9, ε_{10}, ε_{11}, ε_{12} (4) により計算解に入るそれぞれの誤差

w_{kj}

k=9		k=10		k=11		k=12	
-1.520627861449414D	-6	8.249635612280989D	-6	-6.979231744587605D	-6	-1.128688157412484D	-6
8.249635612280989D	-6	-4.413316604319551D	-5	3.737778657230482D	-5	5.925821312297894D	-6
-6.979231744587605D	-6	3.737778657230483D	-5	-3.175384212642720D	-5	-4.916232631562795D	-6
-1.128688157412480D	-6	5.925821312297877D	-6	-4.916232631562779D	-6	-8.752357241168542D	-7

最大誤差				真の誤差			
wmax 1	=	4.119995398384313D	-5	$x_{T1} - \bar{x}_1$	=	1.495782572358273D	-6
wmax 2	=	2.203886451489824D	-4	$x_{T2} - \bar{x}_2$	=	-8.363211719708550D	-6
wmax 3	=	1.866371186005674D	-4	$x_{T3} - \bar{x}_3$	=	7.182366124569572D	-6
wmax 4	=	2.957003662532085D	-5	$x_{T4} - \bar{x}_4$	=	1.083023023429330D	-6

係数に含まれる誤差 ε_k ($k=1,2,\cdots\cdots,8$) (4) と定数に含まれる誤差 ε_9, ε_{10}, ε_{11}, ε_{12} (4) は最大誤差に同程度影響している。

§6 例2 独立した誤差 ε_k (4) によって計算解に入る誤差を求める時, 定数ベクトルの成分 f_{ki} (10) を計算する時桁落ちが起こる場合

§5の例1と同様にして、係数行列, 定数ベクトルを求めた。

a_{ij}

j=1		j=2		j=3		j=4	
1.414213600000000D	0	0.000000000000000D	0	1.732050800000000D	-1	2.236068000000000D	-2
0.000000000000000D	0	1.414213600000000D	0	1.732050800000000D	-1	2.236068000000000D	-2
1.732050800000000D	-1	1.732050800000000D	-1	2.449489700000000D	1	2.645751300000000D	-3
2.236068000000000D	-2	2.236068000000000D	-2	2.645751300000000D	-3	2.828427100000000D	-4

b_i		真の解					係数行列の固有値				
3.745842900000000D	1	x_{T1}	=	3.141592653589793D	1		λ_1	=	-4.243794248672827D	-4
-5.139923000000000D	1	x_{T2}	=	-3.141592653589793D	1		λ_2	=	1.412321175688965D	0
6.864111700000000D	0	x_{T3}	=	3.141592653589793D	-1		λ_3	=	1.414213600000001D	0
-8.802647100000000D	-2	x_{T4}	=	-3.141592653589793D	2		λ_4	=	2.449749664644591D	1

計算解

$\bar{x}_1$	=	3.141592562120036D	1
$\bar{x}_2$	=	-3.141592594634219D	1
$\bar{x}_3$	=	3.141592706417995D	-1
$\bar{x}_4$	=	-3.141592407607578D	2

係数が含む誤差 ($\delta_i = 5.0 \times 10^{-i}$)

$$\Delta a_{11} = \Delta a_{22} = \delta_8 \varepsilon_1 \qquad \Delta a_{13} = \Delta a_{23} = \Delta a_{31} = \Delta a_{32} = \delta_9 \varepsilon_2$$

$$\Delta a_{14} = \Delta a_{24} = \Delta a_{41} = \Delta a_{42} = \delta_{10} \varepsilon_3 \qquad \Delta a_{33} = \delta_7 \varepsilon_4$$

$$\Delta a_{34} = \Delta a_{43} = \delta_{11} \varepsilon_5 \qquad \Delta a_{44} = \delta_{12} \varepsilon_6$$

定数が含む誤差

$$\Delta b_1 = \delta_7 \varepsilon_7 \qquad \Delta b_2 = \delta_7 \varepsilon_8 \qquad \Delta b_3 = \delta_8 \varepsilon_9 \qquad \Delta b_4 = \delta_{10} \varepsilon_{10}$$

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k ($k=1,2,\cdots\cdots,6$) (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{23} , f_{34} を計算する時, 計算解 $\bar{x}_1$ と $\bar{x}_2$ とは符号が異なり, 絶対値がほぼ一致するため、ε_2 , ε_3 による

$$f_{23} = \Delta a_{31} \bar{x}_1 + \Delta a_{32} \bar{x}_2 \qquad f_{34} = \Delta a_{41} \bar{x}_1 + \Delta a_{42} \bar{x}_2$$

の計算で桁落ちが起こる。

f_{ki}

k=1		k=2		k=3		k=4	
1.570796281060018D	-6	1.570796353208998D	-9	-1.570796203803789D	-7	0.000000000000000D	0
-1.570796297317110D	-6	1.570796353208998D	-9	-1.570796203803789D	-7	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	-1.625709144525097D	-15	0.000000000000000D	0	1.570796353208997D	-7
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	-1.625709144525097D	-16	0.000000000000000D	0

k=5		k=6	
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
-1.570796203803789D	-8	0.000000000000000D	0
1.570796353208998D	-11	-1.570796203803788D	-9

定数が含む、互いに独立した誤差 ε_7, ε_8, ε_9, ε_{10} (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=7		k=8		k=9		k=10	
5.000000000000000D	-7	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-7	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-10

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k ($k=1,2,\cdots\cdots,6$) (4) により計算解に入るそれぞれの誤差

w_{kj}

k=1		k=2		k=3		k=4	
1.110720682227440D	-6	-7.404435878293461D	-10	7.404434579346007D	-8	-1.088113529801530D	-10
-1.110720674564156D	-6	-7.404435878293461D	-10	7.404434579346007D	-8	-1.088113529801530D	-10
1.126152471071297D	-17	-2.176293492717172D	-12	2.176227295977279D	-10	6.418915322366353D	-9
-6.059411805799398D	-13	1.170947703843784D	-7	-1.170947549747515D	-5	-4.283886924300857D	-8

k=5		k=6	
5.963549839681330D	-10	-5.854737940181288D	-8
5.963549839681330D	-10	-5.854737940181288D	-8
-6.461753581078669D	-10	4.283886516841916D	-10
-3.271154876150519D	-8	3.699543175955185D	-6

定数が含む、互いに独立した誤差 ε_7, ε_8, ε_9, ε_{10} (4) により計算解に入るそれぞれの誤差

w_{kj}

k=7		k=8		k=9		k=10	
5.893143531195777D	-8	-2.946219458745900D	-7	-3.463572880019140D	-11	1.863621113293898D	-8
-2.946219458745900D	-7	5.893143531195777D	-8	-3.463572880019140D	-11	1.863621113293898D	-8
-3.463572880019140D	-10	-3.463572880019140D	-10	2.043204171327836D	-9	-1.363603536368434D	-10
1.863621113293898D	-5	1.863621113293898D	-5	-1.363603536368434D	-8	-1.177601259474811D	-6

最大誤差				真の誤差					
wmax 1	=	1.616982245395778D	-6	xT1	−	$\bar{x}$1	=	9.146975656904031D	-7
wmax 2	=	1.616982237732494D	-6	xT2	−	$\bar{x}$2	=	-5.895557357860070D	-7
wmax 3	=	1.058555746747889D	-8	xT3	−	$\bar{x}$3	=	-5.282820181307100D	-9
wmax 4	=	5.406532402847686D	-5	xT4	−	$\bar{x}$4	=	-2.459822155742586D	-5

f_{23}, f_{34} の計算で、それぞれ桁落ちをしているので、4元連立1次方程式（例2）の誤差 ε_2 によって第3式に入る誤差，誤差 ε_3 によって第4式に入る誤差、それぞれが小さくなっている。すなわち、誤差が消失している。

w_{kj} ($k=1,2,\cdots\cdots,10$; $j=1,2,3,4$) を求める計算でも、桁落ちする場合があり、これも、計算解 $\bar{x}_j$ を求める消去法で誤差の消失が起きている。

計算解 $\bar{x}_j$ の誤差に、いずれの誤差がどの程度影響するかを w_{kj} の絶対値により知ることができる。すなわち、解の精度を良くするためには、どの係数を、どの程度良くすべきかがわかる。

§7　例3　悪条件である係数行列を持つため、計算解の精度が極端に悪い場合

§5の例1と同様にして、係数行列，定数ベクトルを求めた。

a_{ij}

j=1		j=2		j=3		j=4	
3.0994625000000000D	0	2.2360680000000000D	0	1.7320508000000000D	0	1.4142136000000000D	0
2.2360680000000000D	0	3.0994625000000000D	0	2.7182818000000000D	0	2.8284271000000000D	0
1.7320508000000000D	0	2.7182818000000000D	0	2.4084695000000000D	0	2.6457513000000000D	0
1.4142136000000000D	0	2.8284271000000000D	0	2.6457513000000000D	0	2.4084695000000000D	0

b_i		眞の解				係数行列の固有値	
3.9517166000000000D	0	×T1　=	1.414213562373095D	0	λ1　=	3.187877350132879D	-8
2.3335854000000000D	0	×T2　=	-1.732050807568877D	0	λ2　=	-3.037654410977761D	-1
1.5660603000000000D	0	×T3　=	3.141592653589793D	0	λ3　=	1.695371510953316D	0
2.0068031000000000D	0	×T4　=	-1.414213562373095D	0	λ4　=	9.624257898265684D	0

計算解

$\bar{x}$1	=	1.288717392657740D	0
$\bar{x}$2	=	-1.060328496197190D	0
$\bar{x}$3	=	2.572109292201244D	0
$\bar{x}$4	=	-1.503784130664831D	0

係数が含む誤差　（$\delta = 5.0 \times 10^{-8}$）

$$\Delta a_{11}=\Delta a_{22}=\delta\varepsilon_1 \quad \Delta a_{12}=\Delta a_{21}=\delta\varepsilon_2 \quad \Delta a_{13}=\Delta a_{31}=\delta\varepsilon_3 \quad \Delta a_{14}=\Delta a_{41}=\delta\varepsilon_4$$

$$\Delta a_{23}=\Delta a_{32}=\delta\varepsilon_5 \quad \Delta a_{24}=\Delta a_{42}=\delta\varepsilon_6 \quad \Delta a_{33}=\Delta a_{44}=\delta\varepsilon_7 \quad \Delta a_{34}=\Delta a_{43}=\delta\varepsilon_8$$

定数が含む誤差

$$\Delta b_1=\delta\varepsilon_9 \qquad \Delta b_2=\delta\varepsilon_{10} \qquad \Delta b_3=\delta\varepsilon_{11} \qquad \Delta b_4=\delta\varepsilon_{12}$$

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k（$k=1,2,\cdots,8$）(4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=1		k=2		k=3		k=4	
6.443586963288701D	-8	-5.301642480985949D	-8	1.286054646100622D	-7	-7.518920653324152D	-8
-5.301642480985949D	-8	6.443586963288701D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	6.443586963288701D	-8	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	6.443586963288701D	-8

k=5		k=6		k=7		k=8	
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
1.286054646100622D	-7	-7.518920653324152D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
-5.301642480985949D	-8	0.000000000000000D	0	1.286054646100622D	-7	-7.518920653324152D	-8
0.000000000000000D	0	-5.301642480985949D	-8	-7.518920653324152D	-8	1.286054646100622D	-7

定数が含む、互いに独立した誤差 ε_9, ε_{10}, ε_{11}, ε_{12} (4) 毎に f_{ki} を計算する。

f_{ki}

k=9		k=10		k=11		k=12	
5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8	0.000000000000000D	0
0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	0.000000000000000D	0	5.000000000000000D	-8

係数が含む、互いに独立した誤差 ε_k ($k=1,2,\cdots\cdots,8$) (4) により計算解に入るそれぞれの誤差

$$w_{kj}$$

k=1		k=2		k=3		k=4	
2.152246089646324D	-1	-2.459459332991244D	-1	2.602204686429829D	-1	-1.804786133566348D	-2
-1.151995738544649D	0	1.316432533510422D	0	-1.392837166536930D	0	9.660137740874610D	-2
9.766566142817460D	-1	-1.116065358959898D	0	1.180840735595028D	0	-8.189807550523038D	-2
1.536128607990284D	-1	-1.755396923287194D	-1	1.857279698470272D	-1	-1.288138323407657D	-2

k=5		k=6		k=7		k=8	
-5.741737835971306D	-1	2.253644133875450D	-1	3.275439616245852D	-1	-1.541568017289497D	-1
3.073281585062281D	0	-1.206269360766920D	0	-1.753188164809019D	0	8.251283470699439D	-1
-2.605513664203324D	0	1.022669418735143D	0	1.486344328532610D	0	-6.995395460000165D	-1
-4.098068849785655D	-1	1.608500894111259D	-1	2.337792847141071D	-1	-1.100271107675779D	-1

定数が含む、互いに独立した誤差 $\varepsilon_9,\ \varepsilon_{10},\ \varepsilon_{11},\ \varepsilon_{12}$ (4) により計算解に入るそれぞれの誤差

$$w_{kj}$$

k=9		k=10		k=11		k=12	
3.090463927528061D	-2	-1.654178525294919D	-1	1.402404901342904D	-1	2.205762483875624D	-2
-1.654178525294921D	-1	8.854037954283239D	-1	-7.506412006707219D	-1	-1.180641815037316D	-1
1.402404901342904D	-1	-7.506412006707220D	-1	6.363900048608820D	-1	1.000943641874410D	-1
2.205762483875626D	-2	-1.180641815037316D	-1	1.000943641874410D	-1	1.574319014719136D	-2

最大誤差				真の誤差					
wmax 1	=	2.379298439358433D	0	xT1	−	x̄1	=	1.254961697153552D	-1
wmax 2	=	1.273526130384118D	1	xT2	−	x̄2	=	-6.717223113716870D	-1
wmax 3	=	1.079689380166633D	1	xT3	−	x̄3	=	5.694833613885492D	-1
wmax 4	=	1.698184636757348D	0	xT4	−	x̄4	=	8.957056829173517D	-2

係数行列(例3)の絶対値最小の固有値 λ_1 の絶対値は、係数 a_{ij}, 定数 b_i のいずれの誤差 $\Delta a_{ij}=\delta$, $\Delta b_i=\delta$ よりも小さい。

$$|\lambda_1| = 3.1878773\cdots \times 10^{-8}, \qquad \delta = 5.0\times 10^{-8}$$

したがって、一般には、計算解 $\bar{x}_j$ (6) は有効桁を持たないが、この例3では、本来は未知である真の解 x_{Tj} (8) からわかるように、計算解 $\bar{x}_j$ (6) の有効桁はほぼ1桁である。しかし、真の解 $\bar{x}_{Tj}$ (8) が未知である場合、計算解 $\bar{x}_j$ と最大誤差 w_{maxj} とを比較すると、計算解 $\bar{x}_j$ (6) は有効桁を持たないことになる。

§8　あとがき

ここで述べた、計算解が含む誤差を求める方法は、係数，定数が含む、独立した誤差の数だけ多元連立1次方程式を解かなければならないので、ガウスの消去法で計算解を求める時に得られるLDU行列を用いても、計算機の使用時間が多くなる。しかし、多元連立1次方程式の係数，定数が含むそれぞれの誤差と、計算解が含むそれぞれの誤差との関係を簡単な式で表わしているので、独立した誤差が少ない場合，多元連立1次方程式の元数が小さい場合には有効な方法であると思う。

今後、この方法を用いて、各分野で用いられている、いろいろの実例について、多元連立1次方程式の係数，定数が含むそれぞれの誤差が、計算解が含む誤差にどのように影響しているかを調べることを課題としていきたい。