数　値　解　析 19－2
（1986. 12. 5）

境界条件を満たす最良近似多項式について

井上　秀彦，　柴田　幸夫，　宮崎　晴夫

群馬大学工学部情報工学科

有限要素法における関数近似では、重みつき残差法がよく用いられる。しかし、重みつき残差法による関数近似では、近似式の誤差がきわめて大きくなることがある。従って、本論文では誤差の最大値に着目し、それを最小とする近似（ミニマックス近似）を行う。一方、ミニマックス近似を有限要素法に用いると、最良近似多項式が境界において不連続となる。境界での連続性を保つ必要性から、境界条件を満たす最良近似多項式を求めることを目的とする。そのため、局所完全一次独立性の概念を導入し、基底関数の一つを境界条件を満たすように定め、残りの基底関数を境界において０となるように選んだ結果、偶（奇）関数および境界において関数値が０となる関数に対して境界条件を満たす最良近似多項式がえられた。

On the best approximate polynomials satisfying boundary conditions.

Hidehiko Inoue, Yukio Shibata and Haruo Miyazaki
Department of Computer Science, Gunma University
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma, 376 Japan

In the finite element method, the weighted residual method is often used to obtain an approximate function of the given function. When we adopt the criterion minimizing the summation of signed errors multiplied by weighted functions, the absolute error becomes sometimes very large. To avoid this defect, the minimax approximation method is adopted in this paper. Nevertheless, the minimax approximation method has a defect such that on the boundary between neighbouring intervals, the best approximate polynomial is discontinuous. Therefore, in this paper, our purpose is to obtain the best approximate polynomial which is continuous on them. To this end, by introducing the notion of locally perfect linear independency, we can choose one of basic functions so as to satisfy boundary conditions and others so as to be zero on them and we could obtain the best approximate polynomials which satisfy boundary conditions for even (or odd) functions and functions with value zero on boundaries.

1 問題の所在と研究目的

1．1 有限要素法における重みつき残差法の問題点

有限要素法における関数近似は、各要素上での区分的な近似式を求めなければならないことから重みつき残差法がよく用いられる。重みつき残差法は、被近似関数ϕの近似式$\hat{\phi}$を

$$\phi \simeq \hat{\phi} = \psi + \Sigma a_m N_m \tag{1}$$

ただし、M：要素数　　　ψ：部分変域の境界条件を満たす関数

N_m：部分変域 Ω^eごとに異なる式を使って区分的に定義される関数

として与えられる。この方法では、

$$R_\Omega = (\phi - \hat{\phi})$$

によって近似式の誤差を定義したとき、全変域にわたって全体的に誤差を減少せしめることをねらいとして、いくつかの重み関数$\{w_j : j=1,2,\cdot\cdot\cdot\}$を用いて

$$\int_\Omega W_j(\phi-\hat{\phi})d\Omega = \int_\Omega W_j R_\Omega d\Omega = \sum_{e=1}^{E} \int_{\Omega^e} W_j R_\Omega d\Omega \tag{2}$$

の条件を満たす式(1)の未知係数a_mを求めるものである。

しかし、誤差関数は変域内でしばしば正負の符号を変える。このため重みつき残差法における重み関数を用いた符号付きの誤差の総和は見かけ上小さな値をとることがあり、特にこの誤差の総和をできるだけ小さくするように近似式を作るこの方法では、区間内で被近似関数の変化が急激である場合，誤差がある一点の近傍で急激に大きくなる場合等においては、求められた近似式の誤差がきわめて大きくなることがある。

従って本論文では、符号付きの誤差の総和を最小にする基準に従って関数近似を行う方法はとらず、誤差の最大値に着目してこれを最小にする近似式（ミニマックス近似）を求めようとするものである。ここでは、局所完全一次独立性の概念を導入することにより偶（奇）関数，および定義域の端において関数値が0となる関数に対して境界条件を満たす最良近似多項式を求める方法について考察する。

1．2 ミニマックス近似とその問題点

ここではWeierstrassの定理より多項式近似を行うことにする。また、一般に誤差は一様な確率で現れるとは限らないため、現れ方に偏りがある場合も考慮して最大誤差に着目し、その最大誤差を最小とする近似，すなわちここではミニマックス近似を用いる。ところで、このようなミニマックス近似を有限要素法に適用する場合、以下に示すような問題点が生じる。

閉区間[a,b]において、ある関数f(x)に対するミニマックス近似式g(x)を求める場合、端点a，bが偏差点となる場合が多く、このとき$f(a) \fallingdotseq g(a), f(b) \fallingdotseq g(b)$となる。また、近似式により偏差点における誤差が一意的に定まるので、近似式が異なれば偏差点での誤差も異なる。従って、有限要素法において、ミニマックス近似を用いた場合近似式が要素の境界で不連続となる。

従って、境界において連続性を保つ近似を行うため、要素の境界で誤差が0となるようなミニマックス近似式を求めることにより境界において連続性を保つ近似法を求めることが目的である。

2． 完全一次独立性と最良近似多項式

2．1 完全一次独立性

区間[a,b]上に定まった基底関数$\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_n(x)$が与えられたときの最良近似式を$g(x)=\Sigma a_i\psi_i(x)$とする。そのとき、相異なるn個の点$x_1,x_2,\cdots,x_n$において指定された値$y_1,y_2,\cdots,y_n$をとる$g(X)$がただ1つ決まるためには、

$$\det(\psi_j(x_i))\fallingdotseq 0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

でなければならない。従って、完全一次独立性に着目する。

［定義1］区間[a,b]上に定まった基底関数

$$\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_n(x) \tag{3}$$

があり、区間[a,b]はn個以上の点を含むものとする。このとき、区間[a,b]の任意のn個のすべて相異なる点$x_1,x_2,\cdots,x_n$に対して、行列式がつねに

$$\det(\psi_i(x_j))\fallingdotseq 0 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

となるとき、関数系(3)は完全一次独立であるという。

このとき、「近似式（一松　信）」より次の定理が成り立つ。

［定理2．1］関数系(3)が完全一次独立ならば、ミニマックス近似はつねに一意的である。

［定理2．2］区間[a,b]で連続なすべての関数に対して、つねにミニマックス近似が一意的ならば関数系(3)は完全一次独立である。

よって、これらの定理より最良近似式がつねに一意的であるための必要十分条件は関数系(3)が完全一次独立であるということになる。

2．2　最良近似多項式の性質とその問題点

有限次元の有界な閉区間[a,b]上に定まった基底関数

$$\psi_1(x),\psi_2(x),\cdots,\psi_n(x) \tag{4}$$

の一次結合；

$$g(x)=\Sigma a_j\psi_j(x) \tag{5}$$

が与えられた連続関数f(x)に対し

$$M(f,g)=\max|f-g| \tag{6}$$

を最小とするときg(x)をf(x)の最良近似式という。ただし、関数系(4)は一次独立であるとする。特に、$\psi_j(x)=x^{j-1}$の場合がいわゆる最良近似多項式となる。

ここで、$\psi_j(x)$が完全一次独立であるとき$g(x)$が最良近似多項式となるための条件は、

(1)　g(x)が区間[a,b]において、(n+1)個の偏差点$x_0,x_1,\cdots,x_n$をもつ。

(2)　$\phi(x)=f(x)-g(x)$とすると

$$|\phi(x_j)|=\mu \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

$$\phi(x_j)\phi(x_{j+1})<0 \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

$$x\in E\text{において}\qquad |\phi(x)|\leq\mu$$

である。

そこで、基底関数が完全一次独立であるときn次の最良近似式の未知数は、g(x)の係数n個と偏差点$x_0,x_1,\cdots,x_n$のn+1個の合計2n+1個である。これに対して条件は$x=x_i$（$i=0,1,\cdots,n$）でf-gが極値をとるから

$$f'(x_i)-g'(x_i)=0 \quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{7}$$

のn+1個と

$$\{f(x_j)-g(x_j)\}+\{f(x_{j+1})-g(x_{j+1})\}=0 \quad (j=0,1,\cdots,n-1) \tag{8}$$

の n 個と g(x)が境界条件を満たすようにするため

$$f(x)-g(x)=0 \qquad (x=a,\ b) \tag{9}$$

の2個の合計2n+3個である。しかし、方程式系(7),(8),(9)は非線形連立方程式系であるから、直接解くことはできない。そこで第一近似式を求め、その係数および偏差点を修正して(1),(2)を満たす解を求める。

[命題1] 最良近似多項式の第一近似式は、式(8),(9)を満たす解を持たない。

(証明) 第一近似式より偏差点の近似を求めることができるので偏差点$x_0, x_1, \cdot \cdot \cdot, x_n$を既知とする。すると、式(8),(9)より未知数の係数の作る(n+2)*n行列A

$$A=(a_{ij})$$

$$a_{i1}=2 \ (i=1,2,\cdots,n),\quad 1 \ (i=n+1,n+2)$$

$$a_{ij}=\begin{cases} x_{i-1}^{j-1}+x_i^{j-1} & (i=1,2,\cdots,n) \\ a^{j-1}\ (i=n+1), & b^{j-1}\ (i=n+2) \end{cases}$$

を(n+2)次の正則行列Xを用いて次のように変形できる。

$$XA=\begin{bmatrix} 2 & a^{(0)}_{12} & a^{(0)}_{13} & \cdots & a^{(0)}_{1j} & \cdots & a^{(0)}_{1n} \\ 0 & a^{(0)}_{22} & a^{(0)}_{23} & \cdots & a^{(0)}_{2j} & \cdots & a^{(0)}_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & a^{(j-2)}_{jj} & \cdots & a^{(j-2)}_{jn} \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & a^{(n-2)}_{nn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ただし、$a^{(0)}_{1j}=(x_0^{j-1}+x_1^{j-1}) \quad (j=2,3,\cdots,n)$

$$a^{(0)}_{ij}=(x_{i-1}^{j-1}+x_i^{j-1})-(x_0^{j-1}-x_1^{j-1}) \quad (i,j=2,\cdots,n)$$

$$a^{(0)}_{ij}=\begin{cases} a^{j-1}-(x_0^{j-1}+x_1^{j-1}) & (i=n+1;\ j=2,\cdots,n) \\ b^{j-1}-(x_0^{j-1}+x_1^{j-1}) & (i=n+2;\ j=2,\cdots,n) \end{cases}$$

$$a^{(k)}_{i+k-1,j+k-1}=a^{(k-1)}_{i+k-1,j+k-1}-a^{(k-1)}_{i+k-1,j+k-1}\,a^{(k-1)}_{i+k-2,j+k-1}\,/\,a^{(k-1)}_{i+k-2,j+k-2}$$

$$(i,j=3,4,\cdots,n\ ;\ k=1,2,\cdots,n-2)$$

$$X=(x_{ij})$$

$$x_{ij}=\begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i<j) \end{cases} \qquad x_{i1}=\begin{cases} -1 & (i=2,3,\cdots,n) \\ -1/2 & (i=n+1,n+2) \end{cases}$$

$$x_{ij}=\begin{cases} a^{(j-2)}_{ij}/a^{(j-2)}_{jj} & (j=3,4,\cdots,n+2;\ j=2,3,\cdots,n-2) \\ 0 & (i=n+2;\ j=n+19) \end{cases}$$

次に方程式系の係数と定数による(n+2)*(n+1)行列

$$B=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & (x_0+x_1) & \cdots & (x_0^{n-1}+x_1^{n-1}) & f_0+f_1 \\ & & \cdots & & \\ 2 & (x_{n-1}+x_n) & \cdots & (x_{n-1}^{n-1}+x_n^{n-1}) & f_{n-1}+f_n \\ 1 & a & \cdots & a^{n-1} & f_a \\ 1 & b & \cdots & b^{n-1} & f_b \end{array}\right]$$

ただし、$f(x_i)=f_i \ (i=0,1,\cdots,n) \qquad f(a)=f_a,\ f(b)=f_b$

を(n+2)次の正則行列Yを用いて次の形に変形できる。

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 2 & b^{(0)}_{12} & b^{(0)}_{13} & \cdots & b^{(0)}_{1j} & \cdots & b^{(0)}_{1n} & b^{(0)}_{1\,n+1} \\ 0 & b^{(0)}_{22} & b^{(0)}_{23} & \cdots & b^{(0)}_{2j} & \cdots & b^{(0)}_{2n} & b^{(0)}_{2\,n+1} \\ & & & \cdots & & & & \end{array}\right.$$

$$
YB = \left[\begin{array}{cccccccc|c}
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(j-2)}_{jj} & \cdots & b^{(j-2)}_{jn} & b^{(j-2)}_{j\,n+1} \\
 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b^{(n-2)}_{nn} & b^{(n-2)}_{n\,n+1} \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & b^{(n-1)}_{n+1\,n+1} \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

ただし、

$$b^{(0)}_{1j} = (x_0^{j-1} + x_1^{j-1}) \quad (j = 2, 3, \cdots, n), \quad f_0 + f_1 \quad (j = n+1)$$

$$b^{(0)}_{ij} = \begin{cases} (x_{i-1}^{j-1} + x_i^{j-1}) - (x_0^{j-1} + x_1^{j-1}) & (i, j = 2, \cdots, n) \\ (f_{i-1} + f_i) - (f_0 - f_1) & (i = 2, \cdots, n;\ j = n+1) \end{cases}$$

$$b^{(0)}_{ij} = \begin{cases} a^{j-1} - (x_0^{j-1} + x_1^{j-1})/2 & (i = n+1;\ j = 2, \cdots, n) \\ b^{j-1} - (x_0^{j-1} + x_1^{j-1})/2 & (i = n+2;\ j = 2, \cdots, n) \\ f_a - (f_0 + f_1)/2 & (i = n+1;\ j = n+1) \\ f_b - (f_0 + f_1)/2 & (i = n+2;\ j = n+1) \end{cases}$$

$$b^{(k)}_{i+k-1\,j+k-1} = b^{(k-1)}_{i+k-1\,j+k-1} - b^{(k-1)}_{i+k-1\,j+k-1}\, b^{(k-1)}_{i+k-2\,j+k-1} / b^{(k-1)}_{i+k-2\,j+k-2}$$

$$(i, j = 3, 4, \cdots, n+1;\ k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$Y = (y_{ij})$$

$$y_{ij} = 1 \quad (i = j), \quad 0 \quad (i < j)$$

$$y_{i1} = -1 \quad (i = 2, 3, \cdots, n), \quad -1/2 \quad (i = n+1, n+2)$$

$$y_{ij} = -a_{ij}/a_{jj} \quad (i = 3, 4, \cdots, n+1;\ j = 2, 3, \cdots, n-2)$$

$$b_{i\,n+1} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n+1)$$

よって、Aの階数とBの階数が等しくないので、方程式系は解をもたない。

従って、完全一次独立な基底関数を用いる場合境界条件を満たす最良近似多項式を求めることができない。そこで、方程式系の係数行列と係数と定数による行列の階数を等しくする必要がある。そのために、局所完全一次独立性の概念を導入する。

3. 局所完全一次独立性と境界条件を満たす最良近似多項式

3.1 局所完全一次独立性

完全一次独立な基底関数からなる最良近似多項式が境界条件を満たすための制約条件を加えると方程式系が解をもたないため境界条件を満たす最良近似式を求めることができない。そこで、境界条件に関する制約条件をなくし、あらかじめ基底関数の一つを境界条件を満たすように定め、残りの基底関数を境界において0になるように選ぶ。このとき、最良近似式が境界条件を満たしつつ区間(a,b)の相異なるn個の点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ において指定された値 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ をとる最良近似式がただ一つ決まるためには、

$$\det(\phi_j(x_i)) \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

でなければならない。

［定義2］区間[a,b]上に定まった基底関数

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \cdots, \psi_n(x) \tag{10}$$

があり、区間[a,b]は少なくともn+2個以上の点を含むものとする。区間[a,b]のa, bを含む任意のn個のすべて相異なる点 $x_1 (= a), \cdots, x_n (= b)$ に対して、行列式が

$$\det(\psi_i(x_j)) = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

となるが、開区間(a,b)の任意のn個のすべて相異なる点$x_1, x_2, \cdots, x_n$に対して、行列式がつねに

$$\det(\psi_i(x_j)) \neq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{11}$$

となるとき、関数系(10)は局所完全一次独立であるという。

3．2　局所完全一次独立性の条件のもとにおける最良近似多項式とその性質

［定義３］有限次元の有界な閉区間[a,b]上に定まった局所完全一次独立な基底関数系(10)の一次結合

$$g(x) = \Sigma a_j \psi_j(x)$$

が与えられた連続関数f(x)に対し

$$M(f-g) = \max|f-g|$$

を最小にするならばg(x)を局所完全一次独立性の条件のもとにおける最良近似多項式という。

定義で述べた境界条件を満たす最良近似多項式を求めるために次の性質を述べる。

［定理３．１］関数系(10)が局所完全一次独立ならば、境界条件を満たす最良近似多項式はつねに一意的である。

（証明）かりに高々n次の２つの最良近似多項式$g_1(x), g_2(x)$があったとすれば、両者の平均；

$$g(x) = [g_1(x)+g_2(x)]/2$$

も最良近似多項式であり、少なくともn+1個の偏差点xをもつ。そこでは

$$f(x) - g_1(x) = f(x) - g_2(x) = \pm\mu$$

となる。何故なら、xが正偏差点の場合

$$\mu = f(x) - g(x) = f(x) - [g_1(x)+g_2(x)]/2 = \Sigma[f(x) - g_i(x)]/2 \leqq 2\mu/2 = \mu$$

であるから $\Sigma[f(x) - g_i(x)]/2 = \mu$ となる。よって

$$f(x) - g_1(x) = f(x) - g_2(x) = \mu$$

である。同様にxが負偏差点ならば

$$f(x) - g_1(x) = f(x) - g_2(x) = -\mu$$

となるからである。従って、$g_1(x), g_2(x)$は少なくともn+1個の点で一致する。$g_1(x) - g_2(x)$は少なくともn+1個の零点をもつことになる。ゆえに、$g_1(x) = g_2(x)$である。

［系３．２］関数系(10)が局所完全一次独立ならば、境界条件を満たす最良近似多項式は開区間(a,b)で少なくともn+1個の偏差点をもつ。

（証明）開区間(a,b)において、かりに偏差点がn個$x_1, x_2, \cdots, x_n$しかなかったとする。順序を変えて$x_1, x_2, \cdots, x_r$を正偏差点集合A，$x_{r+1}, \cdots, x_n$を負偏差点集合Bとする。このとき(a,b)において式(11)が成立すれば

$$\Sigma a_i \psi_i(x_k) = b_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

は任意のb_kに対して必ず一意的に解（$a_1, a_2, \cdots, a_n$）をもつ。ゆえに、$b_1, \cdots, b_r > 0$；$b_{r+1}, \cdots, b_n < 0$と与えれば、関数系(10)の一次結合g(x)で、Aにおいて$g(x) > 0$，Bにおいて$g(x) < 0$を満たすものが作られる。これは、g(x)が最良近似式であるときAにおいて$g(x) > 0$，Bにおいて$g(x) < 0$となることはけっしてないということに矛盾する。

［定理3．3］$g(x)$を区間$[a,b]$の端において$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$となる高々n次の多項式とする。そのとき、$\phi(x)=f(x)-g(x)$とすると

$$|\phi(x_j)|=\mu \quad (j=0,1,\cdots,n)$$
$$\phi(x_j)\phi(x_{j+1})<0 \quad (j=0,1,\cdots,n-1) \qquad (12)$$
$$a\leqq x\leqq b \text{ でつねに } \quad |\phi(x)|\leqq\mu$$

となる$g(x)$はn次の局所完全一次独立の条件のもとにおける最良近似多項式である。

（証明）$p(a)=f(a)$, $p(b)=f(b)$となるn次の局所完全一次独立という意味での最良近似多項式$p(x)$をとり、$M(f,p)<\mu$であるとする。このとき、$p-g=(f-g)-(f-p)$とすると、$|f-p|<\mu$より$\phi(x_j)=\mu$ならば$p(x_j)-g(x_j)>0$，$\phi(x_j)=-\mu$ならば$p(x_j)-g(x_j)<0$。従って、$p-g$は区間(x_j,x_{j+1})の内部に必ず零点をもつ。これが$j=0,1,\cdots,n-1$についてそれぞれ成立し、また$x=a$，bにおいて$p-g=0$より高々n次の多項式$p-g$が少なくとも$n+1$個の零点をもつことになり$p(x)=g(x)$である。

以上の性質によって、基底関数が局所完全一次独立ならば局所完全一次独立という条件のもとにおける最良近似多項式が一意的に存在し、偏差点はn項で近似したとき開区間(a,b)において少なくとも$n+1$個あり、正，負の偏差点がともに存在する。さらに偏差点を順次ならべたとき，$f-g$の符号の変化は少なくともn回ある。何故なら、もし$n-1$回以下なら正偏差点で正，負偏差点で負となる高々$n-1$次の最良近似式が作られるからである。従って、符号は交互に正負であって、正偏差点と負偏差点とが交互に並び、誤差曲線は図1のようになることがわかる。

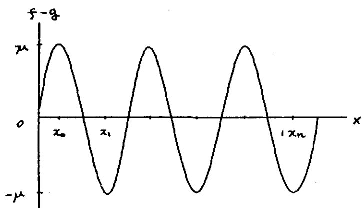


図1　誤差曲線

また以上の性質は、境界条件を満たす最良近似多項式を実際に求める手がかりを与える。ここで、境界条件を満たす最良近似多項式は、

$$g(x)=\Sigma\, a_i\psi_i(x)$$

のn個の係数$a_1,\cdots,a_n$を求めることにより決定される。この他に$n+1$個の偏差点$x_0,x_1,\cdots,x_n$と合計$2n+1$個の未知数がある。これに対して以上の性質よりn個の条件式

$$f(x_k)-\Sigma\, a_i\psi_i(x_k)+f(x_{k+1})-\Sigma\, a_i\psi_i(x_{k+1})=0$$
$$(k=0,1,\cdots,n-1) \qquad (13)$$

および$f(x)$が微分可能ならば、$x=x_k$で$f-g$が極値をとることより$n+1$個の条件式

$$f'(x_k)-\Sigma\, a_i\psi_i(x_k)=0 \qquad (14)$$

と合計$2n+1$個の条件式が得られる。そこで、式(13)より未知係数の作る$n*n$行列Aをn次の正則行列Xを用いて次のように変形できる。

$$XA=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a^{(0)}_{22} & a^{(0)}_{23} & \cdots & a^{(0)}_{2j} & \cdots & a^{(0)}_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\ 0 & a^{(j-2)}_{jj} & \cdots & a^{(j-2)}_{jn} \\ & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & a^{(n-2)}_{nn} \end{bmatrix}$$

ただし、$a^{(0)}_{ij}=a_{ij}-a_{i1}*a_{1j}/a_{11} \quad (i,j=3,4,\cdots,n)$

$$a^{(k)}_{i+k-1,\,j+k-1} = a^{(k-1)}_{i+k-1,\,j+k-1} - a^{(k-1)}_{i+k-1,\,j+k-1}\, a^{(k-1)}_{i+k-2,\,j+k-1} / a^{(k-1)}_{i+k-2,\,j+k-2}$$
$$(i, j = 3, 4, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, n-2)$$

次に方程式系の係数と定数による$n*(n+1)$行列Bを n 次の正則行列 Y を用いて次の形に変形する。

$$YB = \left[\begin{array}{cccccccc|c} b_{11} & b_{12} & \cdots & & b_{1j} & \cdots & b_{1n} & & b_{1\,n+1} \\ 0 & b^{(0)}_{22} & \cdots & & b^{(0)}_{2j} & \cdots & b^{(0)}_{2n} & & b^{(0)}_{2\,n+1} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(j-2)}_{jj} & \cdots & b^{(j-2)}_{jn} & & b^{(j-2)}_{j\,n+1} \\ & & \cdot\ \cdot\ \cdot & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & b^{(n-2)}_{nn} & & b^{(n-2)}_{n\,n+1} \end{array}\right]$$

ただし、

$$b_{1j} = \psi_j(x_0) + \psi_j(x_1) \quad (j = 1, \cdots, n), \quad f_0 + f_1 \quad (j = n+1)$$

$$b^{(0)}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - a_{i1} * a_{1j} / a_{11} & (i, j = 2, \cdots, n) \\ f_{i-1} + f_i - a_{i1} * [f_0 + f_1] / a_{11} & (i = 2, \cdots, n;\ j = n+1) \end{cases}$$

$$b^{(k)}_{i+k-1\,j+k-1} = b^{(k-1)}_{i+k-1\,j+k-1} - b^{(k-1)}_{i+k-1\,j+k-1}\, b^{(k-1)}_{i+k-2\,j+k-1} / b^{(k-1)}_{i+k-2\,j+k-2}$$
$$(i, j = 3, 4, \cdots, n;\ k = 1, \cdots, n-2)$$

行列Aの階数と行列Bの階数が等しいので、式(13),(14)は解をもつ。このとき、$rank(A) = n$ となるので行列Aは正則である。従って、$det(A) \fallingdotseq 0$ となるのでa_1, ・・・,a_nが一意的に決定される。

4. 特定の関数に対する境界条件を満たす最良近似多項式の求め方

4.1 偶(奇)関数の境界条件を満たす最良近似多項式

従来、最良近似多項式を求める場合基底関数$\psi_j(x)$を$\psi_j(x) = x^{j-1}$としたが、ここでは$\psi_j(x)$を

$$\psi_1(x) = \alpha x + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ は } f(a) = \psi_1(a), f(b) = \psi_1(b))$$

$$\psi_j(x) = (a-x)(b-x)x^{j-2} \quad (j = 2, \cdots, n) \qquad (15)$$

とする。すると、$\psi_j(x)$は局所完全一次独立となるので境界条件を満たす最良近似多項式$g(x)$が一意的に存在し、n 項近似したとき偏差点が少なくとも$n+1$個あり、正偏差点と負偏差点とが交互に並ぶ。そこで、境界条件を満たす最良近似多項式$g(x)$を

$$g(x) = \Sigma\, a_j \psi_j(x) \qquad (16)$$

とする。すると、$n+1$個の偏差点$x_0, x_1, \cdots, x_n$と$g(x)$の n 個の係数$a_1, a_2, \cdots, a_n$が未知数として残る。ここで、正負の偏差点が交互に並ぶという条件より

$$\{f(x_i) - g(x_i)\} + \{f(x_{i+1}) - g(x_{i+1})\} = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1) \qquad (17)$$

という式が成り立つ。また、すべての偏差点に対して

$$f'(x_i) - g'(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \qquad (18)$$

が成り立つ。従って、式(17),(18)を解くことにより$a_1, \cdots, a_n$を求めることができる。しかし、式(17),(18)は非線形連立方程式であるから、直接解くことはごく特別のとき以外にはできない。しかし、ある程度よい第一近似式が得られれば、それを修正することにより最良近似多項式にちかずけることができる。そこで、最良近似多項式の第一近似式として$f(x)$のChebychev展開を有限項で打ち切ったものを用い、次のような繰り返し法を用いて境界条件を満たす最良近似多項式を求める。

＜アルゴリズム＞

(1)　$f(x)$のChebychev展開を求める。

(2)　$g(x)$を既知として

$$f'(x)-g'(x)=0$$

となる偏差点x_i（$i=1,\cdots,n+1$）を求める。

(3)　$\psi_j(x)$を(15)とし

$$\{f(x_j)-g(x_j)\}+\{f(x_{j+1})-g(x_{j+1})\}=0 \qquad (j=1,2,\cdots,n+1)$$

が成り立つように未知係数a_jを求める。

4．2　計算例

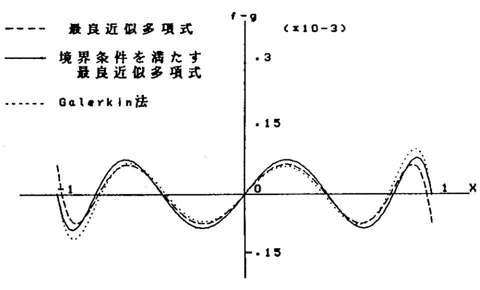
周期的な偶関数をミニマックス近似した場合誤差曲線は区間[a,b]の中心線に対して線対称となり、境界が偏差点となるため完全一次独立な基底関数を用いた場合でも境界において連続性を保つ。一方、周期的な奇関数の場合誤差曲線は、区間[a,b]の中点に対して点対称となり境界が偏差点となる。よって、完全一次独立な基底関数を用いた場合境界において不連続となる。しかし、局所完全一次独立な基底関数を用いると境界において連続性を保つ。従って、ここでは周期的な奇関数と偶関数および奇関数を(1)～(3)を用いて近似した場合の誤差曲線を示す。図2に$f(x)=\sin(\pi x/2)(-1\leqq x\leqq 1)$を5項近似した場合の誤差曲線を示す。図3に$f(x)=x^6(-1\leqq x\leqq 1)$を4項近似した場合の誤差曲線を示す。図4に$f(x)=\tan^{-1}x\ (-1\leqq x\leqq 1)$を5項近似した場合の誤差曲線を示す。$f(x)=\cos(\pi x/2)(-5\leqq x\leqq 5)$に対して定義域[-5,5]を区間$[-5+2(n-1),-3+2(n-1)]$（$n=1,\cdots,5$）に分割し各区間ごとに最良近似多項式を用いて4項近似した場合の誤差曲線と局所完全一次独立性の条件のもとにおける最良近似多項式を用いて4項近似した場合の誤差曲線を図5に示す。以上の結果より新しい方法では境界での誤差は0となるが、境界での誤差を0にすることによりその影響が偏差点の誤差に及ぶため、これまでの方法と比べると区間[a,b]内の偏差点での誤差が多少大きくなっている。しかし、新しい方法の最大誤差は最良近似多項式の最大誤差と同程度であると考えられる。

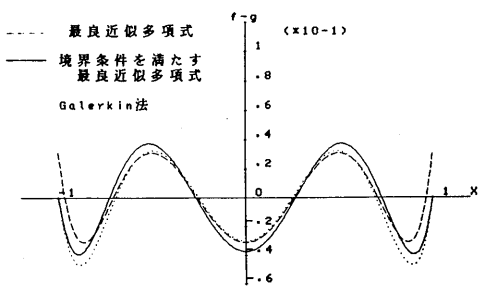
4．4　境界において0となる関数の境界条件を満たす最良近似多項式

$\psi_j(x)$を

$$\psi_j(x)=(a-x)(b-x)x^{j-2} \quad (j=2,\cdots,n)$$

とする。すると、$\psi_j(x)$は局所完全一次独立となるので境界条件を満たす最良近似多項式$g(x)$が一意的に存在し、式(12)の条件を満たす。そこで、$g(x)$を4．1の(1)～(3)を用いて求める。



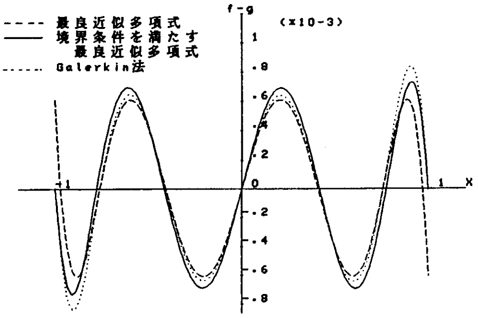


最大誤差　8.4E-5

図 2　$f(x)=\sin(\pi x/2)$

最大誤差　4.0E-2

図 3　$f(x)=x^6$



最大誤差　7.3E-4

図 4　$f(x)=\tan^{-1}x$

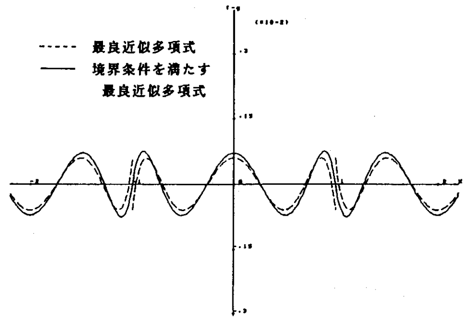


図 5　$\cos(\pi x/2)$を最良近似多項式と局所完全一次独立性の条件のもとにおける最良近似多項式で近似したときの誤差曲線

5．結論

符号付きの誤差の総和を最小にする基準に従って関数を近似するのではなく、誤差の最大値に着目してこれを最小にするように関数を近似するため、ミニマックス近似を用いた。しかし、有限要素法における関数近似にミニマックス近似を用いた場合、要素の境界で最良近似多項式が不連続になってしまう。そこで、”局所完全一次独立性”を定義することにより偶関数，奇関数，境界において関数値が０となる関数に対して境界条件を満たす最良近似多項式が得られた。

計算例より境界条件を満たす最良近似多項式の最大誤差は、最良近似多項式の最大誤差と同程度であることが予想される。

6．参考文献

1)　一松　信：近似式，竹内書店（1972）

2)　一松　信：数値解析，税務経理協会（1971）

3)　O.C.Zienkiewicz,K.Morgan:有限要素と近似，啓学出版（1984）

4)　一松　信，宇野利夫，山内二郎：電子計算機のための数値計算法Ⅲ，倍風館（1975）

5)　佐竹一郎：線形代数学，裳華房（1985）

6)　F.B.Gantmacher:Matrix Theory(vol Ⅰ,Ⅱ),Chelsea Pub.Co.(1960)

7)　C.Charalambous,A.R.Con:An Efficient Method to solve the Minimax Problem directly, J.Numer.Anal,15,162/187(1978)

8)　Martin H.Gutknecht,Lloyd N.Trefethen:Real Polynomial Chebyshev Approximation by the Caratheodory-Fejer Method, J.Numer.Anal,19,358/493(1982)

9)　A.J.W.Dduijvestijn,A.J.Dekkers:Chebyshev Approximations of Some Transcendential Functions for Use in Digital Computing,Philips Res. Repts,16,145/174(1961)