

## 粒子法による非圧縮性粘性流れの解析

梅垣菊男 高橋俊 三木一克

(株)日立製作所 エネルギー研究所

これまでにオイラー系の手法を用いた解析は種々の流れを捉えることに成功したが、大変形を伴う移動境界問題を扱うことは困難であった。このような問題を扱うためにラグランジュ系の手法やALE(Arbitrary Lagrangean-Eulerian)法が開発されたが、十分な解析精度で大変形問題を扱うことはできなかった。そこで、粒子法に基づく非圧縮性流体解析手法を新たに開発した。この方法では、流体塊を粒子として捉え、粒子に質量と運動量を与えて移動させるので、界面挙動や移動境界を解く際にオイラー系の手法で生じる数値的な拡散誤差を大幅に低減した高精度な計算が可能である。ここでは、非圧縮性流体を数値的に安定に解析するため、粒子の個数密度一定という新たな考え方に基づく非圧縮条件を用いた。開発した手法を用いて、ケルビン・ヘルムホルツ不安定性やレイリー・テイラー不安定性の成長過程を再現すると共に、典型的な移動境界問題が解けることを示した。

### NUMERICAL SIMULATION OF INCOMPRESSIBLE VISCIOUS FLOW USING PARTICLE METHOD

Kikuo Umegaki Shun Takahashi Kazuyoshi Miki

Energy Research Laboratory, Hitachi Ltd.

1168 Moriyamacho, Hitachi, Ibaraki 316, Japan

Although Eulerian method has succeeded to simulate various fluid flows, it has not been able to treat large deformation problems without numerical dissipations. Alternative approaches such as Lagrangean and ALE(Arbitrary Lagrangean-Eulerian) methods have been developed for solving these moving boundary problems. However, these methods can not follow large deformation of boundaries with sufficient numerical accuracy. Here, we have developed a modified PIC(particle in cell) method for incompressible viscous flow. In this method, fluid particles are moved by flow with their mass and momentum. It makes possible to reduce numerical dissipations and treat highly distorted flow, contact discontinuities and microscopic surface motion. We have introduced a new incompressible condition, i.e. constant particle number density, to avoid numerical instability for calculating incompressible flow. We have successfully simulated Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instabilities and typical moving boundary problems.

## 1. 緒言

近年、計算物理学あるいは計算力学といった言葉のもとに、物理現象をコンピュータを用いてシミュレーションする技術が急速に発展しつつある。物理現象を表す微分方程式、例えば運動方程式を数値的に解くためには空間的、時間的に離散化することが必要になる。ここで離散化に、連続体を対象にしたオイラー系のモデルを用いるか、粒子系を対象としたラグランジュ系のモデルを用いるかで、その解析手法は大きく異なる。これまでにオイラー系の手法もラグランジュ系の手法もそれぞれの解析対象のもとに大きく発展してきた。特にオイラー系の手法では、差分法(Finite Difference Method)、有限要素法(Finite Element Method)等の有力な解析手法が流体解析を中心に種々の分野で確立されている。ラグランジュ系の手法では、モンテカルロ法(Monte-Carlo Method)がその代表格で中性子の輸送や希薄流体の流れ解析の分野で応用されてきた。しかし、この2つの系の間位置するような手法というのは、まだ実用的に確立されているわけではない。この中間に位置するような解析対象というのは、プラズマ、MHD、半導体デバイス、そして体系の大変形や異相間の界面変形を含む流体の問題等であり、解析をオイラー系で扱うかラグランジュ系で扱うかを決定するのが難しく、また問題に応じて手法を使い分ける必要が生じてくる領域となる。つまり、この中間領域の問題は、モンテカルロ法のような手法を適用するには問題が複雑過ぎ、差分法や有限要素法を適用するには粒子的な挙動や微細な界面変形挙動が無視できない。このような領域の問題を解く手法として粒子モデルを用いた手法(Particle Method, Particle in Cell Method)<sup>1)2)3)</sup>は大変有効である。

ここでは、対象を非圧縮性流体に絞り、粒子モデルを用いた解析手法について検討する。流体の解析では、移動境界や自由表面を持つ体系の解析にPIC法(Particle in Cell Method)と呼ばれる粒子モデルを基本としたラグランジュ系の手法<sup>4)5)</sup>が用いら

れてきた。この手法は、今日までに大きく改良が加えられ、かつ計算機能力の発展に伴って、精度の高い数値解法として確立されつつある。そして、従来の解析手法では扱うことが困難であった異相界面挙動や大変形移動境界問題を扱える新たな手法として発展していくと期待できる。

## 2 粒子法の概要

差分法、有限要素法等で広く応用されている座標格子を用いたオイラー系の方法では、全ての情報を格子点に保持している。格子点上で物理量の微分が評価され流体の時間発展方程式が解かれる。このため非線形な移流項の計算において、よく知られている数値拡散誤差の発生が避けられない。また、境界の変化が大きい問題を解くことも困難である。移動境界問題を解くためにいわゆるラグランジュ法<sup>6)7)8)</sup>が考えられている。この方法では、移流項以外の項を格子点上で解いた後、格子点が移動することにより移流項を解く。すなわち流体塊をラグランジュ的に移動させて解く方法で、メッシュの面積が一定であることが非圧縮性の条件となる。比較的小さな変形に対しては、この方法で移動境界問題を解くことも可能であるが、変形が大きくなると、時間発展を解くに従ってメッシュの歪みが大きくなり、それによる精度の悪化が生じて事実上計算は不可能となる。

このような問題を解決すべく、オイラー法とラグランジュ法の中間の手法としてALE法(Arbitrary Lagrangian and Eulerian Method)<sup>9)</sup>が考えられた。しかし、ALE法ではオイラー法の持つ数値拡散誤差を完全に除去することはできず、しかも大変形移動境界を含む流れを扱うことは依然として困難であった。一方、異相界面現象を扱うための手法として粒子を用いたMAC法<sup>10)</sup>がある。しかし、MAC法における粒子は、界面のマーカーであって、オイラー法の数値拡散誤差はそのまま残る。

そこで、移流が重要となる衝撃波を移流計算による散逸を抑えて計算するために粒子法を用いた

解析手法<sup>11)</sup>が考えられた。ラグランジュ的に流体の時間発展微分方程式を解きながら、なおメッシュが歪んで計算精度が保てなくなることをないように物理量を粒子に持たせる計算手法である。概略を図1に示す。移流項は粒子にすべての物理量を持たせて移動することによって解く。メッシュを時間毎に再生成できるので格子が歪むことなく計算を続けることができる。

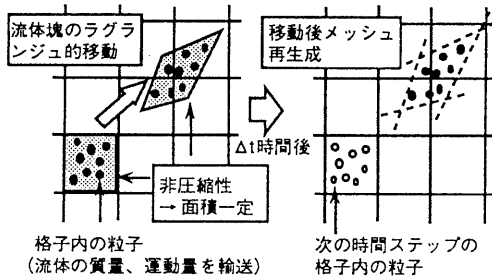


図1 粒子法の概要

この手法では、流体を多数の流体素片の集まりとして扱い、流体素片を粒子であると考え、その粒子間の相互作用は解かず、座標格子上で連続の式、運動方程式などを解き、これに従って、粒子の持つ物理量を変化させ、粒子を移動させる。どれだけの物理量を粒子に与え、どのように粒子を動かすかにより、いくつかの技法<sup>12)13)14)</sup>がある。ここではBrackbillとRuppelが圧縮性流体を対象に開発したPIC法(FILIP法)<sup>11)</sup>をもとに非圧縮粘性流体に適用できる粒子法を新たに開発した<sup>15)</sup>。

### 3. 粒子法による非圧縮粘性流体解析手法

#### 3.1 基礎方程式

以下に本研究で対象とする非圧縮粘性流体の基礎方程式を示す。

連続の式：

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (1)$$

ナビエ・ストークスの式：

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \left( \nabla \times \frac{\mu}{\rho} (\nabla \times \mathbf{U}) \right) + \frac{\mathbf{F}}{\rho} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ は流速、 $p$ は圧力、 $\rho$ は密度、 $\mu$ は粘性係数である。 $\mathbf{F}$ は外力項を表し、 $d/dt$ はラグランジュ時間微分を表す。

#### 3.2 粒子法の計算手順

計算手順を図2に示す。粒子が質量及び運動量を保有する。座標格子点上の密度及び流速は、過去の座標格子点上の物理量とは関係なく、各時刻ごとに粒子から情報を受け取って生成する(a)。その格子点上の物理量を用いて、ナビエ・ストークスの式を格子点上で解く(b,c)。次に、運動量の変化を粒子に戻す(d)。粒子はその運動量と質量を持って、非圧縮性を満たす流体の速度で動く(e)。座標格子系は履歴を持たなくてよいので、各時刻に前時刻と関係なく生成できる。以下でこれらの計算手順を詳細に示す。

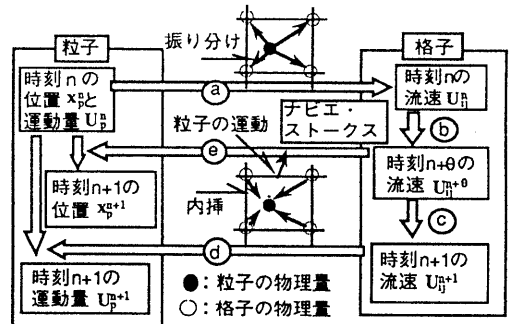


図2 粒子法の計算手順

#### (1) 格子系での物理量の定義

密度 $\rho$ と流速 $\mathbf{U}$ は格子点上 $(i,j)$ に、圧力 $p$ と粘性係数 $\mu$ と $(\nabla \times \mathbf{U})$ は半格子点上 $(i+1/2, j+1/2)$ にとる。

#### (2) 時刻 $n$ の格子点上の物理量の算出 (図2 a)

粒子の重み関数 $S$ 、質量 $m_p$ を周囲の格子点に振り分け、格子点 $ij$ の粒子個数密度 $n_{ij}$ 及び密度 $\rho_{ij}$ を算出する。 $J$ はヤコビアン、 $x_{ij}$ 、 $x_p$ はそれぞれ格子点及び粒子の位置である。

$$n_{ij}^n = \sum_p S(x_{ij} - x_p^n) / J \quad (3)$$

$$\rho_{ij}^n = \sum_p m_p S(x_{ij} - x_p^n) / J \quad (4)$$

同様に格子点ijの流速を算出する。

$$U_{ij}^n = \frac{\sum_p m_p U_p^n S(x_{ij} - x_p^n)}{\sum_p m_p S(x_{ij} - x_p^n)} \quad (5)$$

(3) ナビエ・ストークス式の計算 (図2b)

まず、ナビエ・ストークスの式における粘性項の部分を格子点上で時刻n+θにおいて算出する。

$$\tilde{U}_{ij}^{n+\theta} = U_{ij}^n - (\nabla \times \frac{\mu}{\rho_0} (\nabla \times U_{ij}^n)) \theta \Delta t + \frac{F}{\rho_0} \theta \Delta t \quad (6)$$

次に時刻n+θの流速U<sub>ij</sub>を求める。

$$U_{ij}^{n+\theta} = \tilde{U}_{ij}^{n+\theta} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p \theta \Delta t \quad (7)$$

これを解くためには、時刻n+θにおいて圧力pを求めなければならない。そのために、次式に示すpについてのポアソン方程式を解く。

$$\frac{n^0 - n^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (n_0^0 \tilde{U}_{ij}^{n+\theta}) = \nabla \cdot \left( \frac{n_0^0}{\rho_0} \nabla p \right) \theta \Delta t \quad (8)$$

ここで、n<sup>0</sup>は非圧縮性の条件から決まる正しい粒子の個数密度である。(8)式は一般に非圧縮性流体で解かれるポアソン方程式とは異なっている。これは、PIC法とオイラー系の解法で数値的に満たすべき非圧縮条件が異なるため、その理由については3.4節で述べる。(8)式で得られたpを用いて時刻n+θの流速を(7)式から求める。

(4) 時刻n+1の流速U<sup>n+1</sup>の算出 (図3c)

時刻nの速度U<sup>n</sup>と時刻n+θの速度U<sup>n+θ</sup>から線形内挿により時刻n+1の速度U<sup>n+1</sup>を求める。

$$U_{ij}^{n+1} = (U_{ij}^{n+\theta} - (1 - \theta)U_{ij}^n) / \theta \quad (9)$$

(5) 時刻n+1の粒子の速度U<sub>p</sub>と位置x<sub>p</sub>の算出

すなわち移流項を計算する。運動量の変化は

$$U_p^{n+1} = U_p^n + \sum_j (U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n) S(x_{ij} - x_p^n) \quad (10)$$

により算出する (図3d)。

粒子の位置は非圧縮性を保持するように格子点上の流速から重み関数によって内挿された速度で粒子を動かすことで算出する (図3e)。

$$x_p^{n+1} = x_p^n + \sum_j U_{ij}^{n+1} S(x_{ij} - x_p^n) \Delta t \quad (11)$$

### 3.3 粒子と格子点の重み関数

粒子法では、粒子の持つ情報を2次元の場合近傍の4点あるいは9点の座標格子点に振り分ける。この振り分け方を定めるのが粒子から格子点への重み関数である。同様に、粒子が近傍の4点もしくは9点から情報を受け取る時の重みを定めるのが格子点から粒子への重み関数である。粒子から格子、格子から粒子への重み関数は同じものでなければならない。重み関数が異なると、粒子と格子の情報交換によって、質量や運動量が保存されなくなるからである。

まず、線形重み関数を用いた内挿について示す。粒子の実空間上の位置をx、座標格子空間上の位置を(ξ,η)、座標格子空間上の格子点を(i,j)これに対応する実空間上の位置をx<sub>ij</sub>とすると、実空間上の位置は、

$$x_p = \xi'((1-\eta')x_{i+1,j} + \eta'x_{i+1,j+1}) + (1-\xi')((1-\eta')x_{i,j} + \eta'x_{i,j+1})$$

$$\xi' = \xi - i, \quad \eta' = \eta - j \quad 0 \leq \xi', \eta' \leq 1 \quad (12)$$

のように表される。これを重み関数Sを用いて書き直すと、

$$x_p = \sum_v x_v S(\xi', \eta') \quad (13)$$

ただし、x<sub>v</sub>は格子点の実空間上座標である。重み関数は、

$$\int S(x - x_p) dx = 1 \quad (14)$$

を満たす範囲で線形から高次のものまで任意に設定することができる。ただし、この重み関数は安定性と数値拡散に密接に結び付いている。

本研究では一次と二次の関数を用いた。

### 3.4 境界条件

今回の解析では、すべり壁(ノイマン条件)、粘着壁(ディリクレ条件)及び周期境界条件を用いた。すべり壁では、

$$U_{\perp}^{n+0} = U_{\perp}^{\text{Boundary}} \quad (15)$$

一方、粘着壁では以下のように流速を設定する。

$$U^{n+0} = U^{\text{Boundary}} \quad (16)$$

ここで注意すべきことは $U^{n+0}$ のみが境界条件を満たすということである。これは、粒子は非圧縮条件を満たす $U^{n+0}$ で運ばれるからである。(8)式の圧力の境界条件は、壁上で次式となる。

$$\nabla_{\perp} p = 0 \quad (17)$$

従って(7)式より $\tilde{U}_1^{n+0} = U_1^{n+0}$ つまり $\tilde{U}_1 = U_1^{\text{Boundary}}$ となる。

### 3. 4 非圧縮性の条件

オイラー系的手法で解く場合、一般に質量保存則を満たすための圧力ポアソン方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_i^0} \nabla p \right) \theta \Delta t = \nabla \cdot \tilde{U}_{ij}^{n+0} \quad (18)$$

しかし、(18)式の条件を粒子法に適用することは困難である。これは、(1)式に示した質量保存則は、密度がラグランジュ的に完全に保存されることを前提にしているのに対して、粒子法で粒子を動かした場合には、粒子の個数によって決まる密度に数値誤差を生じるからである。(1)(18)式では、一旦生じた数値誤差を消すことはできず、誤差は次々に重ねられていく。この例は4.1節で実際に示す。ここでは、新たな非圧縮条件として(8)式を用い、この問題を解決した。この方程式は粒子の個数密度に着目したもので、非圧縮性を満たす所望の個数密度 $n^0$ になるように圧力ポアソン方程式を解く。

## 4. 解析手法の評価

### 4. 1 Kelvin-Helmholtz不安定性の解析

上下2層の流速が境界面で平行方向に異なるときに、境界面にはKelvin-Helmholtz不安定性による渦ができる。このような現象は、一般に密度成層、温度成層界面で発生する。解析条件を図3に示す。Re数は1000である。1つの格子あたりの粒子数は16とした。粒子の流速の初期値は次式で与えた。

$$(U_p)_x = \begin{cases} 1 & (y_p > 5) \\ -1 & (y_p < 5) \end{cases} \quad (19)$$

$$(U_p)_y = 0.01 \sin \left( \frac{2\pi x}{10} \right) \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi y}{10} \right) \right) \quad (20)$$

Re=1000  
メッシュ $10 \times 10$   
上下の壁面速度： $\pm 1$   
上下の壁面：粘着条件  
左右の境界：周期条件

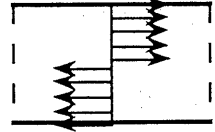
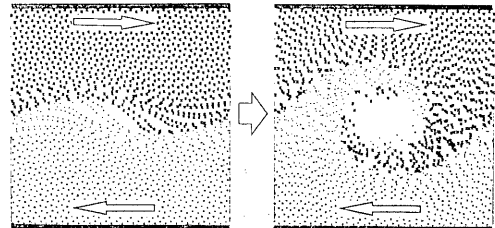
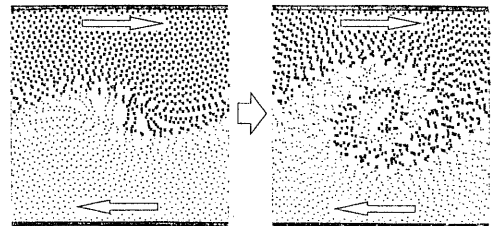


図3 Kelvin-Helmholtz 不安定性の解析条件

図4(a)に(18)式を用いて渦の成長を解析した結果を示す。メッシュ数 $10 \times 10$ である。渦の中心から粒子が掃き出され、消滅しているようすがわかる。これは渦が数値的には粒子を掃き出す流れになっているからである。しかも、 $\nabla \cdot U = 0$ を満たすアルゴリズムでは数値誤差で生じた密度変化をそのまま次の時刻へ保存しようとするため、減少し始めた密度を補償できないのである。



(a)  $\nabla \cdot U = 0$ を非圧縮条件とした場合の渦による粒子の掃き出し例



(b) 数密度一定を非圧縮条件とした場合の粒子の掃き出し抑制例

図4 非圧縮条件の違いによる粒子分布の比較

粒子法では、非圧縮性流体でありながら、粒子を動かすことでラグランジュ部分を解いているために、数値誤差により密度が変化する。従って、上述の方法ではこれを補償し元の密度へ戻すことができない。そこで、粒子法における非圧縮性を定義し直す必要がある。粒子法では密度を粒子固

有の質量で表現し、粒子数で表現するわけではない。すなわち、非圧縮の場合、座標格子系における粒子数が一定であるべきと考えることができる。従って、圧力のポアソン方程式を解くときに、連続の式ではなく、粒子の数密度の連続の式を用いた(8)式を用いる。これにより、数値的に変化した数密度は補償されて一定値に近付くようになる。

図4(b)に(8)式を用いた場合の解析結果を示す。粒子は渦の中心から掃き出されることなく、密度揺らぎは10%程度に収まっている。図5に20x20のメッシュを用い、渦の成長過程を解析した結果を示す。成長率は、せん断領域の厚さを0とした時の理論値よりも小さく、2メッシュ分とした時よりも大きな値となった。これは、粒子の持つ運動量は、粒子の分解能に対応して与えられるのに対して、粒子を動かす速度の分解能はメッシュ間隔に依存するからである。

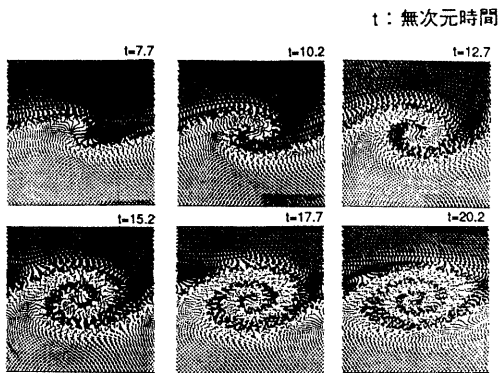


図5 Kelvin-Helmholtz不安定性における渦の成長過程

#### 4.2 Rayleigh-Taylor不安定性の解析

重力下で上下2層の流体があり、上の層の流体の方が密度が大きいときに起こるRayleigh-Taylor不安定性を解析した。このような現象は、膨張している物質が膨張速度が減速したときにもその界面で生じる。図6に解析体系を示す。上下2層の密度比は10:1とし、規格化した重力を0.4とした。Re数は1000である。流速の初期条件は以下のように

設定した。

$$(U_p)_x = 0 \quad (21)$$

$$(U_p)_y = 0.01 \sin\left(\frac{2\pi x}{10}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi y}{10}\right)\right) \quad (22)$$

Re=1000  
密度比10  
メッシュ20×40  
上下と左右の壁  
: スリップ条件

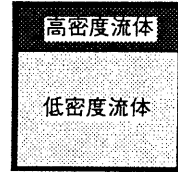


図6 Rayleigh-Taylor不安定性の解析条件

図7に、解析結果を示す。メッシュ数は20x40で1つの格子に16個の粒子を配置した。Rayleigh-Taylor不安定の成長過程は、BrackbillとRuppel(1)が解析した圧縮性流体における成長過程(5)と定性的に一致した。初期の成長率は、理論値より小さく、半分程度であった。これも粒子の分解能と格子の分解能の違いによって生じた差と言える。

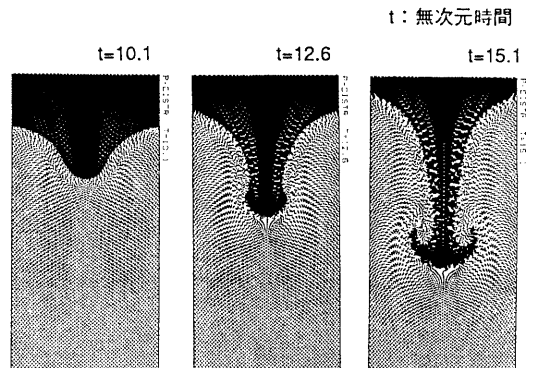


図7 Rayleigh-Taylor不安定性の成長過程

#### 4.3 移動境界問題の解析

図8に示すように、周期系において、突起を有する上下2つの壁が逆方向に動くことによって形成される渦を含むせん断流れを計算した。このような移動境界問題は、格子を固定した従来のオイラー系の解法では解析が困難であり、格子を変形するラグランジュ解法でも扱えない。粒子に情報を持たせる粒子法により取り扱うことができる。



図8 移動境界問題の解析条件

境界条件としては、側壁及び移動壁を共にすべり壁とし、水平方向には周期条件を課した。メッシュ数は $40 \times 20$ 、 $Re$ 数は1000、移動する壁の速度 $+1$ 及び $-1$ 、粒子数は16個/格子とした。各時間ステップ毎に格子を再生成して解いた結果を図9に示す。壁が時刻0に突然動き始め、それにより流体が動き始めると、移動する壁近傍（壁の進行方向に向かって後ろ側）に渦が発生する。図中のこれらの二つの渦は壁のすれ違いによって、交換され、壁の進行方向側に位置するようになる。しかし、壁の進行と共に壁の後ろ側へと移動している。これらの流れのパターンは、検証するには至っていないが、定性的には妥当だと判断できる。

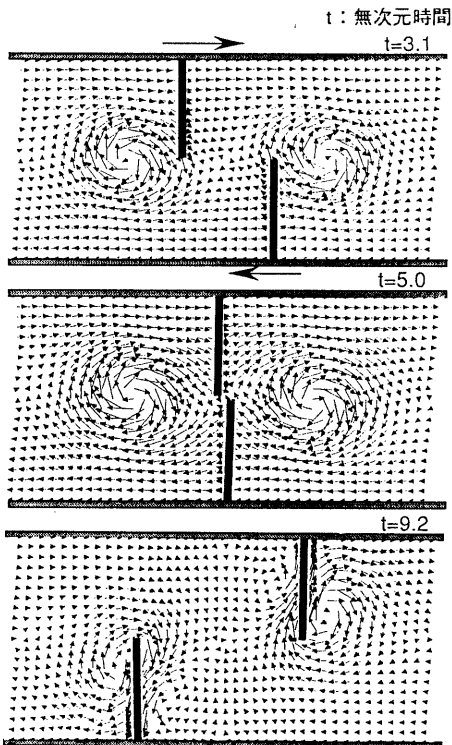


図9 突起物のすれちがいで生じる流れの解析例

## 5. 結言

BrackbillとRuppel<sup>11)</sup>が圧縮性流体を対象に開発したPIC法(FLIP法)をもとに粒子法による非圧縮性粘性流体解析手法を開発し、二次元問題でその妥当性を評価した。

### (1) 解析手法の概要

質量と運動量を粒子にもたせ、これを座標格子に振り分けて密度、流速、圧力等の連続体量を求め、これらの量を逆に内挿して運動量変化を算出すると共に粒子を移動する。非圧縮性の条件として、新たに粒子の個数密度一定という考え方をを用いた。これにより、オイラー系の流体解析手法で問題であった移流計算に伴う数値拡散を低減し、異相界面の微細構造を捉えることが可能になった。また、座標格子を時間ステップごとに再生成することにより、大変形移動境界問題を扱うことも可能となった。

### (2) 解析手法の評価

界面の微細構造を捉えるため、Kelvin-Helmholtz不安定性及びRayleigh-Taylor不安定性の解析を行った。その結果、前者では速度せん断流れの界面にできる渦の成長過程を再現し、後者では重力により上層の密度の大きい流体が下層の密度の小さい流体へ管入する不安定性の成長過程を再現することができた。さらに、移動境界問題の解析として、すれ違う二つの壁によって誘起される流れを解析し、壁近傍での渦の挙動を解析できることを示した。

以上のように、粒子法はオイラー系の手法では困難であった異相界面挙動や複雑な移動境界問題の解析を可能にするポテンシャルを持っている。

## 謝辞

本研究にあたり、米国Los Alamos National Lab.のBrackbill博士、University of Texas at AustinのTajima教授に貴重な助言をいただきました。また、日立製作所エネルギー研究所の土井所長、竹田技師長に助力をいただいたことに感謝致します。

## 参考文献

- 1) Hockney, R.W. and Eastwood, J.W., Computer Simulation Using Particles, McGraw-Hill, New York, 1981.
- 2) Birdsall, C.K. and Langdon, A.B., Plasma Physics via Computer Simulation, McGraw-Hill, New York, 1985.
- 3) Tajima, T., Computational Plasma Physics: With Application to Fusion and Astrophysics, Addison-Wesley, Redwood City USA, 1989.
- 4) Harlow, F.H., "The Particle-in-Cell Method for Numerical Solution of Problems in Fluid Dynamics," Proc. Symp. Applied Mathematics, 15 (1963) 269.
- 5) Harlow, F.H., "The Particle-in-Cell Method for Fluid Dynamics," Meth. Comput. Phys., 3, (1964) 319.
- 6) Fritts, M.J. and Boris, J.P., "The Lagrangian Solution of Transient Problems in Hydrodynamics using Triangular Mesh," J. Comput. Phys., 31, (1979) 173.
- 7) Dukowicz, J.K. et al., "General Topology Godunov Method," J. Comput. Phys., 82, (1989) 29.
- 8) Hirt, C.W., Cook, J.L. and Butler T.D., "A Lagrangian Method for Calculating the Dynamics of an Incompressible Fluid with Free Surface," J. Comput. Phys., 5, (1970) 103.
- 9) Hirt, C.W., Amsden, A.A. and Cook, J.L., "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds," J. Comput. Phys., 14, (1974) 227.
- 10) Harlow, F.H. and Welch, J.E., "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow," Phys. Fluids, 8, (1965) 2182.
- 11) Brackbill, J.U. and H.M. Ruppel, FLIP: A method for adaptively zoned Particle-in-cell calculations of fluid flows in two dimensions, J. Comput. Phys., 65, 314-343, 1986.
- 12) Takewaki, H., Nishiguchi, A. and Yabe, T., "Cubic Interpolated Pseudo-Particle Method (CIP) for Solving Hyperbolic-Type Equations," J. Comput. Phys., 61, (1985) 261.
- 13) Brunel, F. et al., "Magnetohydrodynamic Particle Code: Lax-Wendroff Algorithm with Finer Grid Interpolations," J. Comput. Phys., 43, (1981) 268.
- 14) Brackbill, J.U. and Monaghan, J.J. (Ed.), Particle Methods in Fluid Dynamics and Plasma Physics, Comput. Phys. Comm., 48 (1988)
- 15) Takahashi, S. and Umegaki, K, A PIC Method to Simulate Incompressible Viscous Fluid with Moving Boundaries, to be published on J. Comput. Phys.