ハイパフォーマンス
コンピューティング　74－2
（1998．12．11）

ドイツ語と英語が合成された学術用語 "Eigenvalue" に関する数理的考察

[1]藤野清次 [2]Garry J. Tee [3]Rüdiger Weiss
広島市立大学[1] オークランド大学[2] カールスルーエ大学[3]

学術用語 "eigenvalue" は，固有値問題などに現れる「固有値」に対する用語として現在英語圏でよく使われている．しかし，"eigen" という冠頭の言葉は，もともとドイツ語で「固有の」または「特有の」という意味を表す言葉である．そこで,「固有値」に対する学術用語として "eigenvalue" が現在英語圏で何故使われているかを入手資料を元に考察する．

Review on a composite nomenclature of "eigenvalue" with German "eigen" and English "value"

[1]Seiji Fujino [2]Garry J. Tee [3]Rüdiger Weiss
Hiroshima City Univ.[1] Univ. of Auckland[2] Karlsruhe Univ.[3]

As you know well, in English the word of 'eigenvalue' is often used in the eigenvalue problem as compared with the other words, e.g. 'proper value' and 'characteristic value'. Then we become to have the following questions from this tendency. Who used first the word of 'eigenvalue' ? Who influenced greatly to the spread of 'eigenvalue' ? In this article, one answer will be shown based upon consideration from a number of references.

1 はじめに

英語圏では,「固有値」に対する学術用語として，以前よく使われていた "proper value" や "characteristic value(root)" という用語は近年余り見かけなくなった．それに代わって "eigenvalue" という用語が最近よく使用される．では，何故，このようなドイツ語と英語が合成された "eigenvalue" という学術用語が工学の分野および数学や数値計算の分野でよく使用されるのであろうか？この素朴な疑問の解明を以下試みてみたい．

2 'Nature' の Eddington の論文

英語圏の人が，"eigenvalue" という言葉に初めて接したのは，一般向け科学雑誌 "Nature" に掲載された1927年7月23日付けの論文とされる [16]．それは，イギリスの天文学者 A.S. Eddigton(1882.12.28 – 1944.11.22) による "Eigenvalues and Whittaker's Function" * という題目の小文である [Edd27-e]．この論文は，E. Schrödinger 博士 (1887.8.12–1961.1.4) が発表した水素原子の固有値 (エネルギーに相当する) と固有関数を決める波動方程式に関するドイツ語で書かれた原著論文の一部を，英語圏の一般の人にもわかるように英語に書き直したものである [Sch26-G] [5]．

「Among those who are trying to acquire a general acquaintance with Schrödinger's wave-mechanics there must be many who find their mathematical –to determine the **eigenvalus** and **eigenfunctions** for the hydrogen atom. I do not think it is generally realised that Schrödinger's differential equation for this problem is one which is fully treated in a standard text-book, Whittaker and Watson's "Modern Analysis", chapter XVI. (I quote from the second edition). It would seem that advantage may be taken of this to make the treatment easier for English readers.」

この文章を書いた A.S. Eddignton 博士は2つの世界大戦間のイギリスを代表する天文学者であった．博士の功績の一つに，アインシュタイン (1879.3.14–1955.4.18) の一般相対性理論を1919年の皆既日食の観測で確かめたことがあげられる．文献 ([18], p.166) にそのときの様子が紹介されている [13]．

「その翌年1915に終り近く，彼(=アインシュタイン) は大きな努力の末に一般相対性理論を完成した．この研究の中で，遠くの星からくる光が太陽の近く

*Sir **Whittaker, Edmond T.** (1873 – 1956.3.24) イギリスの数学·物理学者．1912年から1946年エディンバラ大学の数学教授．ポテンシャル論，微分方程式に多数の業績あり．相対性理論にも大きな興味を持っていた．

を通るときに曲げられることを予言している．（中略）　これに魅せられたエディントンは政府の支持のもとに，予言された光の湾曲を観測によって確かめようとした．このためには皆既日食のときに太陽のふちをすれすれに通る星の光が見える方向を写真に撮る必要がある．戦争がドイツの敗戦に終った翌年の 1919 年の皆既日食におこなわれた観測はアインシュタインの予言通りに太陽の近くの光の湾曲を証明した.」

アインシュタインが広く世間に知られるようになったのはこの時以来のことであった．また，エディントンは次の有名なことばを残している ([15], p.438 より)．

「アインシュタインの理論を理解できるのは世界で 1000 人もいないし，それを学問的に議論できるのは 100 人もいない.」
(Less than a thousand people in the world can understand Einstein's theory and less than a hundred can discuss it intelligently.)

エディントンを通して，英語圏の人々はアインシュタインの一般相対性理論を目にしたと言っても過言ではない．エディントンは専門家向けの著書と共に，このように一般向けの本も多数著している [13]．Fig.1 に A.S. Eddington(左) と E. Schrödinger が一緒に写っている珍しい写真 (1942 年) を示す ([15], p.375)．

Fig. 1 Eddington(左) と Schrödinger(右) の写真．

なお，文献 ([12], p.278) に彼に関する次の記述がある．

「In addition, Eddington was the first interpreter of Einstein's relavility theory in English, and made his own contributions to its development; ... 」

3　Dirac の 1930 年の著書

量子力学の分野で "eigenvalue" という用語を最初に使ったのは，イギリスの物理学者 P.A.M. Dirac (1902.8.8–1984.10.20) である．彼が 1930 年に著した本 "The Principles of Quantum Mechanics" [2] の第 3 章: "Eigenvalues and eigenstates" にその用語が見える [16]．彼はその著書の中で電子にとって負のエネルギー状態がなければならないことを予見した．これはまもなく劇的に検証された．

「In the present chapter we shall consider some of the properties of real observable. If we have any real observable α we can write down the equation

$$\alpha\psi \;=\; a\psi \tag{3.1}$$

where a is a number, and consider it as an equation for the two unknowns a and ψ. If a and ψ are any solution, we call them respectively an **eigenvalue** and *eigen-ψ* of the observable a.」

1926 年に発表された Schrödinger[Sch26-G] の方程式では，波動関数 ψ にある物理量 Q が作用して得られる関係式

$$Q\psi \;=\; \lambda\psi \tag{3.2}$$

をもって固有方程式としている．一方，W.K. Heisenberg (1901.12.5 – 1976.2.2:ドイツの物理学者) が 1925 年に発表した行列力学では，この固有方程式は以下のようにベクトル表現される．

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u} \;=\; \lambda\boldsymbol{u} \tag{3.3}$$

すなわち，ベクトル $\boldsymbol{u}$ に物理量 $\boldsymbol{Q}$ が作用して，得られた固有値 λ が観測にかかる量であるとされる．波動関数とベクトル，微分演算子と行列というように，数学的には両者は別ものであるが，みかけの形こそ違え帰するところは同じである，ことを明らかにしたのは P.A.M. Dirac である．

その後，1958 年に大幅に改訂された [2](第 4 版, p.30) ではもっと統一した表記法で

$$\xi|\xi'> \;=\; \xi'|\xi'> \tag{3.4}$$

のように表された．この式は前述の二つの式 (3.2), (3.3) に対応するものであるが，もっと一般に ξ をマトリックス，$|\xi>$ をベクトルと考え，ξ をオブザーバルと呼んだ．そうして ξ を測定したときに得られる確定値が ξ' とした．さらに，同ページの脚注に次の文章が付け加えられた．

「The word 'proper' is sometimes used instead of 'eigen', but this is not satisfactory as the words 'proper' and 'improper' are often used with other meanings. For example, in §§ 15 and 46 the words 'improper function' and 'proper-energy' are used.」

[訳](朝永振一郎 他共訳 [2], p.39)
「'eigen'(固有) という代わりに 'proper' ということばが用いられることがあるが，これは感心しない．'proper' および 'improper' ということばが別の意味で用いられることが多いからである．たとえば §15 および §46 では'improper function' (広い意味での関数) 'proper energy' (本来のエネルギー) ということばが用いられている.」

4 固有値に対応する用語の変遷

表1は，1964年に刊行されたA. Householerの著書[8]に掲載された参考文献を対象にした調査結果のまとめである．ここでは参考文献の題目の中に「固有値」に対応する用語がある論文の数を集計した．同様に，ドイツ語で書かれた論文の題目の中に固有値“Eigenwert”が含まれる論文の数も集計した．なお，同書に収録された論文のうち最も新しいものは1962年の論文であった．

表1 A. Householderの著書[8]の参考文献の題目中に使われた「固有値」に対応する用語．

Year	charac-teristic	eigen-value	latent (proper)	Eigen-wert
– 1934	1	–	2 (–)	3
35–39	–	1	2 (–)	1
40–44	2	–	– (–)	3
45–49	8	5	2 (1)	3
50–54	5	17	5 (–)	8
55–59	9	23	1 (3)	14
60–61	6	4	– (1)	4
Total	31	50	12 (5)	36

この表から以下のことがわかる．

- “proper value” よりも “characteristic value (root)” の方がよく使われていたこと．
- 1945年を過ぎてから “eigenvalue” が急に使われ始めた．特に，Fan [Fan49-e], Kato [Kat49-e], Lohman [Loh49-e], Walker [Wal49-e], Weyl [Wey49-e] の5編の論文と他にもLanczos [Lan49-e] が1949年に発表されたことが特徴的である．この事実から，これらの論文に強い影響を及ぼした文献があったことが推測される．

5 行列理論と Fredholm 積分 Eq.

[行列理論における固有値と固有ベクトル]
n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対してあるベクトル $\boldsymbol{x}$ とスカラー λ が存在して，方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \;=\; \lambda \boldsymbol{x} \tag{5.1}$$

を満たすとき，λ を $\boldsymbol{A}$ の**固有値**，$\boldsymbol{x}$ を λ に対応する**固有ベクトル**と呼ぶ．

[Fredholmの考え方における固有値と固有関数]
次の積分方程式 (D. Hilbertにより第2種Fredholm型積分方程式と名づけられた) を考える．

$$f(x) + \mu \int_a^b K(x,t)f(t)dt \;=\; \varphi(x) \tag{5.2}$$

ここで，$\varphi(x)$ は区間 $[a,b]$ で連続，積分方程式の核 $K(x,t)$ は $[a,b]\times[a,b]$ で連続な関数であってあらかじめ与えられているとする．このとき，未知関数 $f(x)$ を求めたい．この問題に対してE.I. Fredholmは，1903年Cramerの公式 (1750) を利用した**Fredholmの小行列式**と呼ばれる行列式で解を表現することに成功した[1]．このFredholmの理論と固有値問題とは次のような関係がある．いま，

$$\widehat{K}f \;=\; \int_a^b K(x,t)f(t)dt \tag{5.3}$$

を積分作用素と考えると，Fredholmの積分方程式は

$$(I+\mu\widehat{K})f \;=\; \varphi \tag{5.4}$$

と表せる．ただし，I は恒等写像．ここで，$(I+\mu\widehat{K})$ が1対1ならば，解は $f=(I+\mu\widehat{K})^{-1}\varphi$ と表される．また，固有値の定義はFredholmの小行列式を使わずに，次のように行うことができる．

[固有値の定義]

$$\mu\int_a^b K(x,t)f(t)dt \;=\; f(x) \tag{5.5}$$

を満たす $f(x)\neq 0$ が存在するとき，μ を積分方程式 (5.2) の**固有値**という．μ が固有値のとき，(5.5) 式の解 $f(x)$ を固有値 μ に属する**固有関数**と呼ぶ．

[積分方程式の固有値の定義の逆数とは!]
さて，$\widehat{K}f=\int_a^b K(x,t)f(t)dt$ をHilbert空間における積分作用素と考えると，$\widehat{K}f=\frac{1}{\mu}f$ と表され，$1/\mu$ を固有値と言う方が整合性がとれる．つまり，行列理論における固有値は，積分方程式における固有値の逆数になっている[9]．これについては，数理物理学の古典的名著であるCourant・Hilbertの著書[3](1924年第1版) に次の記述がある．

[1931年第2版 [3], p.18)]
「Vielfach ist es vorteilhaft, statt des Parameters λ den reziproken Wert $\kappa=1/\lambda$ einzuführen. Man betrachtet dann zweckmässigerweise die Form $\kappa E-T$, mit der Determinante . . . 」

[訳]([3] 斉藤, 丸山 邦訳, p.18)]
「パラメーター λ のかわりにその逆数 $\kappa=1/\lambda$ を使う方が便利なことも多い．そのときには形式 $\kappa E-T$ を考える方がよい．(注) ここでは，上の λ は μ に，κ が通常の固有値 λ に各々対応する．」

ところが，R. Courant† による1953年の英語版 ([4], p.17) では，次のように書き改められている．

「In many problems the system of equation of a linear transformation takes the form

$$x_i - \lambda\sum_{k=1}^{n} t_{ik}x_k \;=\; y_i \quad (i=1,\cdots,n) \tag{5.6}$$

†**Courant, Richard**(1888.1.8 – 1972.1.27) ドイツの数学者．Göttingen大学のHilbertのもとで研究した後，ナチスを逃れて1933年渡米．1934年からニューヨーク大学教授．クーラン研究所を創設する．

where λ is a parameter (in general complex). ...
Let us consider the zeros of the determinant $|E-\lambda T|$ or, equivalently, for $\kappa = 1/\lambda \neq 0$, ...
These values κ_i are known as the "*characteristic values*," "*proper values*," or "*eigenvalues*" of T with respect to the unit matrix E ; they form the so-called "*spectrum*" of the matrix T.」

また，行列式 (Cramer の公式) を使って連立 1 次方程式を解くのは，元数 n が多いとき Gauss の消去法に比べて不利なことはよく知られている．例えば，後者の演算量が $O(n^3/3)$ に対して前者のそれは $O(n^4)$ と見積られる．

さらに，1912 年 D. Hilbert は「線形積分方程式の一般論概要」と題する 280 頁ほどの本を出版した．ここで，20 世紀の数学の大きな本流となる Hilbert 空間の概念を発表した．これによって，最終的には，Fredholm の拠って立っていた "行列式" という基盤を取り除き，"行列式なし" のもっと展望の広い積分方程式論が確立されるに至った．そのため Fredholm の考え方はその後衰退していった [17].

また，行列の「固有値」に対して，A.C. Aitken は 1948 年に "latent roots" という用語を使っていた．同様に，Olga Taussky は 1954 年まで "characteristic roots" を，そして 1958 年以降は "eigenvalues" を使っている．さらに，J.H. Wilkinson は 1954 年までは "latent roots" を使っていたが，1958 年以降は "eigenvalues" を使うようになった．これらの移り変わりが参考文献の論文リストの題目から読みとれる．また，スイスの H. Rutishauser は，ドイツ語 (Eigenwert) で 1955，58，61 年に，英語 (eigenvalue) で 1958 年に，そしてフランス語 (valeurs propres) で 1955 年 (2 編) 論文を書いている．

また，ドイツ人 Zurmühl の著書 [9] の 142 頁 (邦訳書) の脚注には次のコメントが載っている．
「マトリクスの固有値問題と積分方程式のそれとの間の完全な類推ができるようにするために，" 固有値" という用語を固有数 μ_i の逆数 $1/\mu_i$ を表すものとしてとっておこうという提案は，比較的最近のマトリクスの文献でも確立していない.」

参考までに，用語'eigenfunction' は以下が初出である．

"A set of independent solutions, which may be called eigenfunctions. " (1926, Proc. R. Soc. A. CXII. 661 [16] より)

一方，行列関係の用語では，determinant (Cayley(1843), Silvester(1853)), matrix (Cayley, 1858), latent root (Silvester, 1883), characteristic function (Thomson, 1879), proper value (Ruark & Urey, 1930) などが生まれていた [16]．一方，"determinant" という用語の起源については文献 ([7]) ([6], p.1) に，"The term 'determinant' occurs for the first time in Gauss's *Disquisitiones arithmeticae*(1801)"，また "latent root" という用語については文献 ([Lan56-e], p.50) にも次の記述が見られる．

「This phase of the theory was developed by **Silvester(1851)** – originator of the term "**latent root**" – and later by **Weierstrass(1868)**. The most complete algebraic theory of the characteristic equation was finally given by **Frobenius(1879)**. 」

6 学術用語 'eigenvalue' の定着

世界大戦直後の 1946 年，イギリス人 H. Jeffreys [‡] と B.S. Jeffreys は，数理物理学の大著 (p.708) を著した [Jef46-e]．ここでは「固有値」を，

([Jef46-e], 1946(1st), 1950(2nd ed.), p.127)
「Then $\lambda x_k = a_{ik}x_k$ can be written in matrix form

$$\lambda \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{6.7}$$

and the λ are variously called the *latent roots, characteristic values, proper values*, and *eigenvalues* of the matrix $\boldsymbol{A}$. 」

と定義し，同頁の脚注に前述の Courant・Hilbert の著書の「固有値」の定義と逆であることを明記した．これはその後に少なからず影響を与えたと思われる．また，C. Lanczos は 1950 年論文 [Lan50-e] の 256 頁で "eigenvalue" と "characteristic number"(固有数) という二つの用語を次のように区別して使った．

「We shall use the term "eigenvalue" for the numbers λ_i defined by $\boldsymbol{A}u_i = \lambda u_i$, whereas the reciprocals of the eigenvalues: $\mu_i = 1/\lambda_i$ shall be called "characteristic numbers". 」

また，1980 年に刊行されたイギリス人 W. Ledermann 編による著書 ([11], p.196) の第 3 章には，次の ('ugly':見苦しい，'regrettably' という感情表現の言葉がついた) コメントが書かれている．文章中の quantum physicists とは誰を指しているのだろうか？

「 'Eigen' is a german word for 'proper' (in the sense of propery), so that 'eigenvalue of **A**' means a value that belongs to **A**. The ugly hybrid word was introduced into the scientific literature by quantum physicists who were perhaps unaware that English algebraists had coined the term '*latent root*' half-a-century before the advent of quantum theory. Other authors, mainly American, use 'characteristic root'. But, regrettably, it seems that 'eigenvalue' is now firmly established in the mathematical literature. 」

1960 年代以降は，'eigenvalue' の定着についてはイギリスの J.H. Wilkinson (1965 年 [10]) の影響がアメリカでも大きいようである．

[‡] Sir **Jeffreys, Harold** (1891.4.22 – 1989.3.18)
イギリスの天文·地球物理学者．Cambridge に学び，同大学の天文学と実験哲学のプルミアン教授職に選任された．1953 年ナイトの叙勲を受ける．

7 おわりに

"eigenvalue" という学術用語のその誕生から定着するまでの過程を文献を元に追跡した．また，類似のものに null point (零点) (1809 年, Coleridge) や null space (零空間) (1884 年, A. Buchheim) がある．

謝辞

本研究の遂行にご協力と有益なるご助言・情報を頂いた Professors N. Higham, H. Stetter, E. Hairer そして会津大学池辺八洲彦教授に感謝の意を表する．

補記

以下の参考文献の中で題目中に「固有値」に相当する用語が含まれる論文については，[Sch26-G] のように最初の 3 文字は著者の頭文字, 1900 年代の下 2 桁,「固有値」に対応する用語の頭文字 (-c, -e, -p または German:-G) で表した．

参考文献

[~ 1934]

[1] Fredholm, E.I., Sur une classe d'equation fonctionelles, Acta Math., 27(1903), pp.365–390.

[Sch26-G] Schrödinger, E., Quantisierung als Eigenwertproblem (固有値問題としての量子化), Ann. Phys., Vol.79(1926), pp.361–376.

[Edd27-e] Eddington, A.S., Eigenvalues and Whittaker's Function, Nature, July 23, 1927, p.117.

[2] Dirac, P.A.M., The Principles of Quantum Mechanics, Clarendon Press, Oxford, 1930, 1967(改訂第 4 版).(邦訳) 朝永振一郎, 玉木英彦, 木庭二郎, 大塚益比古 共訳, ディラック 量子力学 (原書第 4 版), 岩波書店, 1968.

[3] Courant, R., Hilbert, D., Methoden der mathematischen Physik, Julius Springer, 1924(1st), 1930(2nd). (邦訳) 斉藤利弥監訳 丸山滋弥訳, 数理物理学の方法, 東京図書, 1959.

[4] Courant, R., Hilbert, D., Methods of mathematical physics, John Wiley & Sons, 1953(1st Eng. trans.).

[Bas33-e] Basu, K., Theory of perturbation and the eigenvalue problem of an anharmonic oscillator, Indian Phys.-Math., Vol.4(1933), pp.1–8.

[Kem33-e] Kemble, E.C., Note on the Sturm- Liouville eigenvalue- eigenfunction problem with singular endpoints, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., Vol.19(1933), pp.710–714.

[1935 ~ 1939]

[5] Whittaker, E.T., Watson, G.N., A course of Modern Analysis (4th ed., 1927), Camb. Univ. Press.(邦訳) 佐藤常三, 洲之内治男, モダンアナリシス I 解析学の方法, 宇野書店, 1967, 解析学 (上巻), 正野重方, 文政社, 1943.

[Ait36-la] Aitken, A.C., Studies in practical mathematics II, The evaluation of the latent roots and latent vectors of a matrix, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, Vol.57(1936), pp.269–304.

[Pry36-e] Pryce, M.H.L., The eigenvalues of electromagnetic angular momentum, Proc. Camb. Philos. Soc., Vol.32(1936), pp.614–621.

[Col37-G] Collatz, L., Schranken fuer den ersten Eigenwert bei gewoehnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Ing.-Arch., 8(1937), pp.325–331.

[New37-e] Newing, R.A., On the variation calculation of eigenvalues, Philos. Mag., 24(1937), pp.114–127.

[Rom37-G] Romberg, W., Ein Verfahren zur gleichzeitigen approximativen Bestimmung von Eigenwert und Eigenfunktion, C. R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS, n. Ser. No.14, 1937, pp.65–68.

[Hou38-la] Householder, A.S., Young, G., Matrix approximation and latent roots, Amer. Math. Monthly, Vol.45(1938), pp.165–171.

[1940 ~ 1944]

[Lad40-e] Lande, A., Eigenvalue problem of the Dirac electron, Phys. Rev. II Ser. 57, 1940, pp.1183–1184.

[Sch40-e] Schrödinger, E., A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, 46(1940), pp.9–16.

[Aro42-e] Aronszajn, N., Weinstein, A., On the unified theory of eigenvalues of plates and membrances, Amer. J. Math., Vol.64(1942), pp.623–645.

[1945 ~ 1949]

[Jef46-e] Jeffreys, Sir Harold & Bertha Swirles, Methods of Mathematical Physics, Camb. Univ. Press, 1946(1st ed.), 1950(2nd ed., p.127).

[Aro48-e] Aronszajn, N., Rayleigh-Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol.34(1948), pp.474–480.

[Tau48-c] Taussky, O., Bounds for characteristic roots of matrices, Duke Math., 15(1948), pp.1043–1044.

[Fan49-e] Fan, K., On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations I, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol.35(1949), pp.652–655.

[Kat49-e] Kato, T., On the upper and lower bounds for eigenvalues, J. Phys. Soc. Japan, 4(1949), pp.334–339.

[Lan49-e] Lanczos, C., An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, Proc. 2nd Symp. Large-Scale Digital Calcul. Machin., 1949, pp.164–206.

[Loh49-e] Lohman, J.B., An iterative method for finding the smallest eigenvalue of a matrix, Quart. Appl. Math., Vol.7(1949), p.234.

[Wal49-e] Walker, A.G., Watson, J.D., Inclusion theorems for the eigenvalues of a normal matrix, J. London Math. Soc., Vol.24(1949), pp.28–31.

[Wey49-e] Weyl, H., Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol.35(1949), pp.408–411.

[1950 ~ 1954]

[Lan50-e] Lanczos, C., An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, J. of Research of the Nat. Bur. of Stand., Vol.45(1950), pp.255–282.

[Wey50-e] Weyl, H., Old and New, of the eigenvalue problem, Bul. Amer. Math. Soc., Vol.56(1950), pp.115–139.

[Arn51-e] Arnoldi, W.E., The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem, Quart. Appl. Math., 9(1951), pp.17–29.

[Cra51-e] Crandall, S.H., On a relaxation method for eigenvalue problems, J. Math. and Phys., Vol.30(1951), pp.140–145.

[Fri51-e] Friedman, B., Eigenvalues of compound matrices, New York University, Mathematics Research Group, Research Report No.TW-16, 1951.

[Fra53-e] Frazer, R.A., Some problems in aerodynamics and structural engineering related to eigenvalues, Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Series 29, 1953, pp.65–74.

[Giv53-e] Givens, W., A method of computing eigenvalues and eigenvectors suggested by classical results on symmetric matrices, Appl. Math. Ser. U.S. Bur. Stand., Vol.29(1953), pp.117–122.

[Hou53-p] Householder, A.S., Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.

[Pai53-e] Paige, L.J., Taussky, O. eds., Simultaneous Linear equations and the determination of eigenvalues, Nat. Bur. of Stand. Appl. Math. Series No.29, 1953.

[Giv54-e] Givens, W., Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix, Oak Ridge National Lab., ORNL-1574, 1954.

[Tau54-e] Taussky, O., Contributions to the solution of systems of linear equations and eigenvalues, Appl. Math. Series Nat. Bur. of Stand., Vol.39(1954).

[Wil54-la] Wilkinson, J.H., The calculation of the latent roots and vectors of matrices on the pilot model of the ACE, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.50(1954), pp.536–566.

[1955 ~ 1959]

[6] Mirsky, L., An introduction to Linear Algebra, Oxford at the Clarendon Press, 1955.

[Rut55-p] Rutishauser, H., Une méthode pour la détermination des valeurs propres d'une matrice, C. R. Acad. Sci. Paris, Vol.240(1955), pp.34–36.

[Rut55-G] Rutishauser, H., Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus, Z. Angew. Math. Phys., Vol.6(1955), pp.387–401.

[Lan56-e] Lanczos, C., Applied Analysis, Prentice Hall, Inc., 1956.

[Hen58-e] Henrici, P., On the speed of convergence of cyclic and quasicyclic Jacobi methods for computing eigenvalues of Hermitian matrices, J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol.6(1958), pp.144–162.

[Rut58-e] Rutishauser, H., Solution of eigenvalue problems with the LR- transformation, Appl. Math. Series 49, 1958, pp.47–81.

[Rut58-G] Rutishauser, H., Zur Bestimmung der Eigenwerte schiefsymmetrischer Matrizen, Z. Angew. Math. Phys., Vol.9(1958), pp.586–590.

[Wil58-e] Wilkinson, J.H., The calculation of the eigenvectors of codiagonal matrices, Computer J., Vol.1(1958), pp.90–96.

[1960 ~]

[7] Muir, T., The theory of determinants in the historical order of development, Dover Publ., 1960.

[8] Householder, A.S., The Theory of Matrices in Numerical Analysis, Blaisdell Pub. Company, 1964.

[9] Zurmühl, R., Matrizen(2nd ed.), Springer-Verlag, 1964.(邦訳) 瀬川富士, 高市成方, マトリクスの理論と応用, ブレイン図書出版, 1972.

[10] Wilkinson, J.H., The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford Univ. Press, 1965.

[11] Ledermann, Walter ed., Handbook of applicable mathematics, Vol.1 Algebra, Wiley, p.196, 1980.

[12] Dictionary of Scientific Biography, Charles Scribner's Sons, Vol.5, 1981, pp.277–282.

[13] Daintith, J., Mitchell, S., Tootill, E., Gjertse, D., Biographical Encyclopedia of Scientist (2nd ed.), Market House Books Ltd., 1981. (邦訳) 科学者人名事典, 同編集委員会 (大槻義彦 他), 丸善, 1997.

[14] Dirac, P.A.M., Directions in Physics, H. Hora ed., John Wiley & Sons, Inc., 1978.(邦訳) 有馬朗人, 松瀬丈浩, ディラック 現代物理学講義, 培風館, 1994.

[15] Moore, W., Schrödinger Life and Thought, Cambridge University Press, 1989. (邦訳) 小林徹郎, 土佐幸子, シュレジンガー その生涯と思想, 培風館, 1995.

[16] The Oxford English Dictionary (2nd ed.), J.A. Simpson ed., Clarendon Press, 1989.

[17] 志賀浩二, 固有値問題 30 講, 朝倉書店, 1995.

[18] 戸田盛和, 相対性理論 30 講, 朝倉書店, 1997.