

## 複素係数を用いた 特性可変 IIR フィルタの一構成法

村越 信雄<sup>†</sup>

渡部 英二<sup>††</sup>

西原 明法<sup>†</sup>

<sup>†</sup>東京工業大学電子物理工学科

<sup>††</sup>芝浦工業大学電子情報システム学科

<sup>†</sup>〒152 東京都目黒区大岡山2-12-1

<sup>††</sup>〒330 埼玉県大宮市深作字溜井原307

あらまし デジタルフィルタを使用する場合に、その周波数特性をリアルタイムで変化させることを要求される場合がある。その要求を満たすために、いくつかの特性可変フィルタが提案されている。本研究では、複素係数フィルタと従来の周波数変換を組み合わせることにより、従来の方法では実現できなかった特性可変フィルタの構成法を提案している。まず、特性劣化の起こらない遮断周波数可変低域通過フィルタを構成している。次に上・下帯域端周波数の片方を固定した帯域幅可変帯域通過フィルタを構成している。最後にシミュレーションを用いて、例題により本構成法の有効性を確認している。なお、同様の高域通過フィルタ、帯域阻止フィルタについては本研究の結果を応用して簡単に実現可能である。

### A Synthesis of Variable IIR Digital Filters with Complex Coefficients

Nobuo MURAKOSHI<sup>†</sup>

Eiji WATANABE<sup>††</sup>

Akinori NISHIHARA<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Dept. of Physical Electronics,  
Tokyo Institute of Technology

<sup>††</sup>Dept. of Electronic Information Systems,  
Shibaura Institute of Technology

<sup>†</sup>2-12-1, Oookayama, Meguro-ku,  
Tokyo, 152 JAPAN

<sup>††</sup>307, Tameihara, Fukasaku-aza,  
Oomiya-shi, Saitama, 330 JAPAN

**Abstract** It is sometimes required to change the frequency characteristics of a digital filter during its operation. In order to satisfy the request, some variable IIR digital filters were proposed. This paper proposes new variable IIR digital filters with complex coefficients. First, a lowpass filter for changing the cut-off frequency is synthesized. This frequency response isn't degraded when the cut-off frequency is changed. Next, a bandpass filter for changing the bandwidth is synthesized. Either the upper or the lower cut-off frequency is fixed when the bandwidth is changed. The proposed methods use IIR filters with complex coefficients and the usual frequency transformation. Finally, the simulation of these variable digital filters shows that the proposed methods are valid.

## 1 まえがき

オーディオにおける音場処理やアダプティブラインエンハンサなどのアダプティブフィルタにデジタルフィルタを応用する場合において、フィルタリングの最中にその周波数特性をリアルタイムで変化させることを要求される場合がしばしばある。

デジタルフィルタの周波数特性を変化させるための理論的背景としてはConstantinidesの周波数変換が既に知られている<sup>(1)</sup>。この方法は、プロトタイプの低域通過フィルタの伝達関数の $z^{-1}$ を1次あるいは2次の全域通過関数で置き換えることにより、希望の低域通過フィルタ、高域通過フィルタ、帯域通過フィルタ、帯域阻止フィルタを得るというものである。

文献(1)の方法を応用して周波数変換後の回路を得るには、2つの方法が考えられる。

1番目の方法としては、プロトタイプ回路中の遅延器を全域通過回路に置き換えるという方法である。しかしながら、この方法ではプロトタイプフィルタがIIRフィルタの場合に、回路中にDelay-Free-Loopが生じて実現不可能になってしまう場合がある。従って、IIRフィルタにこの方法を適用するのは注意が必要である。

2番目の方法としては、変換後のフィルタの伝達関数の係数を計算し、新たに回路を再構成するという方法である。この方法では計算及びプロトタイプフィルタの回路の乗算器係数をすべて変更するという手間がかかる。例えば $N$ 次の伝達関数で低域-低域変換の計算をする場合には、 $N^2$ に比例する計算が必要となり、次数が高くなるにつれますます計算量が增大する。従って、リアルタイムでのフィルタの特性可変が必要となる場合に、この方法を適用するのは困難である。また、あらかじめ計算しておいた乗算器係数値をROMなどに記憶させておいてそれを読み出すという方法も考えられるが、この方法では最初に決定して記憶させた周波数特性以外は実現できず、フィルタ使用中にそれ以外の特性が必要となった場合に対処が不可能である。

以上の問題を解決する方法として、1つのパラメータによる遮断周波数可変低域通過フィルタの構成法が提案されている<sup>(2)-(4)</sup>。しかしな

がら、従来の方法ではTaylor展開による近似を用いているために遮断周波数を変えることにより特性の劣化が生じてしまい、可変範囲を広くすることができないという欠点がある。

また帯域幅可変帯域通過フィルタは、遮断周波数可変低域通過フィルタとDelay-Free-Loopが生じない通過域幅と帯域幅の等しい低域-帯域変換を組み合わせることで構成されている。そのため、帯域幅の変化の基準となるのは帯域の中心周波数となり、中心周波数が固定されて帯域幅が変わるといふ可変フィルタしか実現できない。

本研究では、複素係数フィルタと従来の周波数変換を組み合わせることにより従来の方法では実現不可能であった特性可変IIRフィルタの構成法を提案する。まず、特性劣化の起こらない遮断周波数可変低域通過フィルタを構成する。次に、上・下帯域端周波数の片方を固定した帯域幅可変帯域通過フィルタを構成する。最後に、例題により本構成法の有効性を確認する。なお、同様の特性可変高域通過フィルタ、帯域消去フィルタについては本研究の結果を簡単に応用して実現可能である。

## 2 周波数変換

プロトタイプ低域通過フィルタの伝達関数 $H(z)$ 中の $z^{-1}$ を

$$z^{-1} \rightarrow T(z^{-1}) \quad (1)$$

に示すように $T(z^{-1})$ に置き換えるという変換により、種々の特性を持つフィルタを得ることができる。一般に $T(z^{-1})$ は1次または2次全域通過関数である。

低域-低域変換における $T(z^{-1})$ を $T_1(z^{-1})$ とすると、 $T_1(z^{-1})$ は1次全域通過関数であり

$$T_1(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - \beta}{1 - \beta z^{-1}} \quad (2)$$

と表せる。ここで $\beta$ は

$$\beta = \frac{\sin\left(\frac{\theta_p - \omega_p T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta_p + \omega_p T}{2}\right)} \quad (3)$$

であり  $\theta_p$  はプロトタイプ低域通過フィルタの遮断周波数、 $\omega_p$  は希望する低域通過フィルタの遮断周波数である。式(2)の変換では、変換後の回路を得るのに式(2)を表現する回路をプロトタイプフィルタの回路中の遅延器と置き換えるという方法ではDelay-Free-Loopが生じてしまう可能性がある。

このため、Delay-Free-Loopの生じない遮断周波数可変低域通過フィルタが提案されているが、従来の方法ではTaylor展開による近似を用いているために遮断周波数を変えた場合に特性に乱れが生じてしまうことが避けられない。また、特性の乱れは遮断周波数を大きく変えるほど大きくなるため、その可変範囲も限られてたものとなる。

低域-帯域変換において、得られる帯域通過フィルタの帯域幅がプロトタイプ低域通過フィルタの通過域幅と同じになるという特別な場合の  $T(z^{-1})$  を  $T_2(z^{-1})$  とすると、 $T_2(z^{-1})$  は

$$T_2(z^{-1}) = -z^{-1} \left( \frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \right) \quad (4)$$

となる。ここで  $\alpha$  は

$$\alpha = \cos \omega_o T = \frac{\cos\left(\frac{\omega_o + \omega_L T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_o - \omega_L T}{2}\right)} \quad (5)$$

であり、 $\omega_o \cdot \omega_L$  は得られる帯域通過フィルタの上・下帯域端周波数、 $\omega_o$  は中心周波数である。

式(4)の変換は、中心周波数を変える変換であり、 $z^{-1}$  が全体にかかっている。そのため、プロトタイプフィルタの回路中の遅延器の出力をマイナスにして、1次全域通過回路を縦続に接続するという簡単な方法により変換後の回路を得ることができる。この方法によって得られた回路はDelay-Free-Loopを生じない。

通過域幅と帯域幅が等しくならない一般の場合の低域-帯域変換の  $T(z^{-1})$  は2次全域通過

関数に-1をかけた式となっている。従って、変換後の回路を得るのに、プロトタイプフィルタ回路の遅延器を置き換えるという方法を用いると、Delay-Free-Loopが生じてしまう可能性がある。しかしながら、式(2)の低域-低域変換による遮断周波数(帯域幅)の変化と式(4)の中心周波数の変化を組み合わせれば一般の場合の低域-帯域変換は実現できる。

ただし、このタイプの帯域幅可変帯域通過フィルタは、その中心周波数  $\omega_o$  が固定であって、上・下帯域端周波数が変わることでその帯域幅が可変される。

### 3 複素係数フィルタ

複素係数フィルタは実係数フィルタと異なり、その振幅特性に  $\omega=0$  に関する対称性がない。また、実係数低域通過フィルタを周波数軸上で  $\omega_o$  だけシフト、すなわち  $z$  平面上で極・零点を  $\omega_o$  だけ回転させることにより、図1に示すような  $\omega_o$  に対称な帯域通過フィルタが実現できる<sup>(5)</sup>。  $z$  平面上で  $\omega_o$  の回転をおこなうには実係数フィルタの伝達関数において

$$z^{-1} \rightarrow z^{-1} \exp(j\omega_o T) \quad (6)$$

と置き換えれば良い。

また、解析信号処理を施した入力信号を複素係数フィルタに加えた場合には、正の周波数特性のみが信号処理として意味を持ち、負の周波数域の特性は任意でよい。

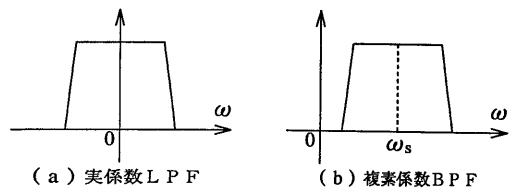


図1 実・複素係数フィルタの振幅特性

### 4 特性の乱れのない遮断周波数可変低域通過フィルタ

プロトタイプフィルタは遮断周波数が  $\pi/2$  の低域通過フィルタとする。プロトタイプフィルタを周波数軸上で図2に示すように  $-\pi/2$  シフ

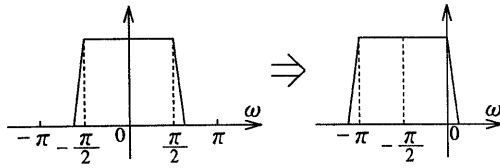


図2  $-\pi/2$  周波数シフト

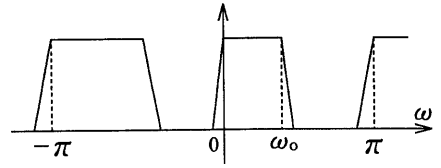


図4 低域通過フィルタの振幅特性

トさせる。そのための変換は、式(6)において  $\omega_s = \pi/2T$  とすればよく

$$z^{-1} \rightarrow -jz^{-1} \quad (7)$$

となる。つまり、プロトタイプ低域通過回路の遅延器に  $-j$  の乗算器を接続すればよい。

最後に図2に示す、得られた  $-\pi$  から  $0$  までの通過域をもつ複素係数フィルタに対して、通過域幅と帯域幅の等しくなる式(4)の低域-帯域変換を行う。回路的には、複素係数回路の遅延器を式(4)を表現する回路と置き換えればよい。

式(4)の変換は、実係数低域通過フィルタを例に考えた場合、図3に示すような写像関係になっている。変換前の角周波数を  $\omega$ 、変換後を  $\Omega$  とすると、 $e^{j\omega T}$  が  $z$  平面単位円上を  $-1$  から反時計方向に一周する間に帯域フィルタの  $e^{j\Omega T}$  は単位円上の上半円を  $1$  から  $-1$  まで  $\pi$  だけ回転している。更に下半円でも  $-1$  から  $1$  まで反時計方向に  $\pi$  だけ回転している。また、 $\omega_0$  は式(5)より  $\omega=0$  が写像される角周波数となっている。これを図2に示す複素係数フィルタに適用すると  $-\pi \rightarrow 0$ 、 $0 \rightarrow \omega_0$  のように写像され、図4に示す低域通過フィルタが得られる。ここで遮断周波数  $\omega_0$  は式(5)の  $\alpha$  を変えることにより自由に設定可能である。すなわち、 $\alpha$  という1つのパラメータによる遮断周波数可変低域通過フィルタが実現できる。

ただし、注意する必要があるのは図3からもわかるように、式(4)の変換は  $\omega = -\pi \rightarrow \Omega = \pi$  と

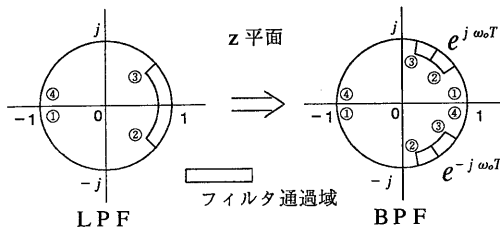


図3 式(4)の変換の写像関係

写像されるため、正の周波数領域の  $\pi$  にも遮断周波数が写像されることである。従って、図4に示すように遷移域がその近辺に生じてしまう。このため、この章で提案する遮断周波数可変フィルタは帯域幅可変帯域通過フィルタなどには応用できない。

### 5 片帯域端固定帯域幅可変帯域通過フィルタ

帯域幅可変帯域通過フィルタは遮断周波数可変低域通過フィルタと通過域幅と帯域幅の等しい低域-帯域変換の組み合わせにより実現できる。しかしながらこの方法により得られる帯域幅可変帯域通過フィルタは帯域の中心周波数が固定となり上帯域端周波数と下帯域端周波数が同時に動いてしまう。

ここでは上帯域端周波数または下帯域端周波数を固定して帯域幅を可変するフィルタの構成を考える。

まず図5に示すように、適当なプロトタイプ低域通過フィルタを式(6)を用いて通過域幅だけ正の向きに周波数シフトさせる。得られたフィルタはプロトタイプフィルタの2倍の通過域幅を持つ複素係数低域通過フィルタとなる。

この段階で従来のTaylor展開を用いた遮断周波数可変低域通過フィルタの方法を使って遮断周波数を変化させる。

最後に式(4)の変換を用いて下帯域端周波数を希望の周波数に設定する。式(4)の変換は4章で

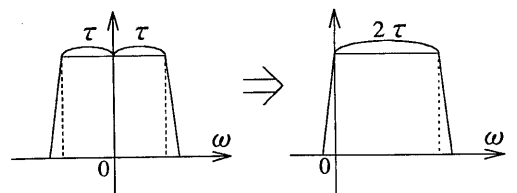


図5 通過域幅の周波数シフト

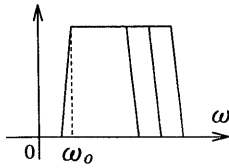


図6 帯域通過フィルタの振幅特性

述べたように  $\omega=0 \rightarrow \Omega=\pm\omega_0$  に写像される。従って、図6に示すように下帯域端周波数は  $\omega_0$  になり、この周波数が固定で帯域幅可変（上帯域端周波数可変）帯域通過フィルタが実現できる。

ここで注意しなければならないのは、帯域通過フィルタの帯域幅は変換前の低域通過フィルタの通過域幅の  $1/2$  とはなっていないことである。式(4)の変換において  $\omega=0$  が写像される中心周波数  $\omega_c$  は、式(5)より単純な算術対称中心： $\omega_c = (\omega_L + \omega_U) / 2$  とは等しくないことがわかる。すなわち、式(4)の変換において  $\omega$  と  $\Omega$  は直線的關係にはなっていない。この関係を図7に示す。従って、希望の帯域幅を持つ帯域通過フィルタを得るためには以下に述べるように複素係数低域通過フィルタの通過域幅を設定する必要がある。

希望する帯域幅を  $W$  とし、低域通過フィルタの通過域幅を  $\sigma$  とする。図7と式(5)より算術中心周波数  $\omega_c$  は

$$\omega_c = \frac{1}{T} \cos^{-1} \left( a \cos \frac{\sigma}{2} T \right) \quad (8)$$

となる。これより、

$$\omega_U = \omega_c + \frac{\sigma}{2} \quad (9)$$

$$\omega_L = \omega_c - \frac{\sigma}{2} \quad (10)$$

であり、また

$$W = \frac{\sigma}{2} + \omega_U - \omega_L \quad (11)$$

となる。従って、式(11)が成り立つように  $\sigma$  を決定すればよい。式(11)より  $\sigma$  について解くと

$$\sigma = -\frac{2}{T} \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right) \quad (12)$$

となる。ここで  $a, b$  はそれぞれ、

$$a = \sin(W + \omega_0) T \quad (13)$$

$$b = \cos(W + \omega_0) T - \cos \omega_0 T \quad (14)$$

である。下帯域端周波数  $\omega_0$  と帯域幅  $W$  の帯域通過フィルタを得るために、複素係数低域通過フィルタの通過域幅は式(12)~(14)より求められる  $\sigma$  とすればよい。

また、上帯域端周波数を固定した帯域幅可変帯域通過フィルタを構成する場合には、プロトタイプ低域通過フィルタの複素係数を用いた周波数シフトを下帯域端周波数固定の場合とは逆の負の方向に行えばよい。その場合の複素係数フィルタの通過域幅は、式(13)、(14)の  $\omega_0$  を  $-\omega_0$  にして、式(12)による  $\sigma$  とすればよい。

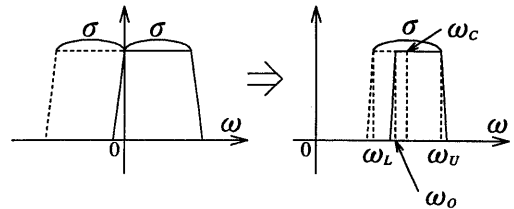


図7  $\omega_0$  と  $\omega_c$  の関係

## 6 構成例

本研究で提案した特性可変フィルタをシミュレーションによって構成した。

図8には特性劣化のない遮断周波数可変低域通過フィルタ、図9には下帯域端固定帯域幅可変帯域通過フィルタを示す。

図8、図9の両方ともプロトタイプフィルタとして4次連立チェビシェフ低域通過フィルタを採用した。その規格としては、標準化周波数1 Hz、通過域リプル1 dB、阻止域最小減衰量30 dBである。ただし、遮断周波数は図8では0.25 Hz、図9では0.1 Hzのフィルタを採用した。

図8では遮断周波数を0.1、0.2、0.3、0.4 Hzと変えているが、特性の劣化が起こらずに良好な結果が得られていることが確認できた。なお、0.5 Hzを遮断周波数

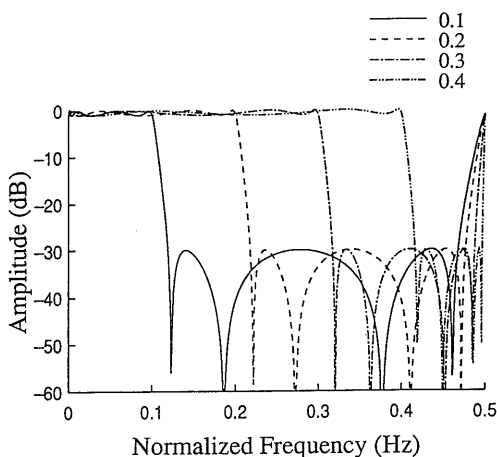


図8 特性劣化のない遮断周波数可変低域通過フィルタ

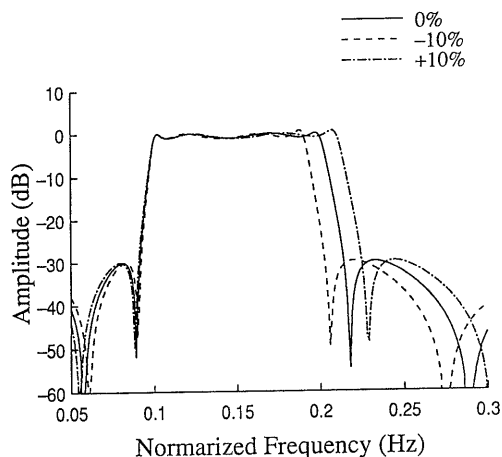


図9 下帯域端周波数固定帯域幅可変帯域通過フィルタ

として遷移域が現れているが、特に問題にはならないと考えられる。

図9では文献(3)の直接型回路による遮断周波数可変フィルタを用い、下帯域端周波数を0.1 Hzで固定とし、帯域幅0.1 Hzで帯域幅を±10%変化させている。下帯域端周波数の変動もなく良好な結果が得られていることが確認できた。

## 7 むすび

本研究では、複素係数を用いることにより、従来の実係数では実現できなかった新しい特性可変IIRフィルタの構成法を提案した。まず、遮断周波数を可変しても特性の乱れない低域通過フィルタの構成法を示した。次に、従来の遮断周波数可変フィルタを用いて、片帯域端固定帯域幅可変フィルタの構成法を示した。最後に、例題により本構成法の有効性を確認した。本研究で提案した構成法は、特性可変高域通過フィルタ、帯域阻止フィルタにも適用可能である。

今後の課題としては、特性の乱れない帯域幅可変帯域通過フィルタの構成についての検討が考えられる。

## 謝辞

日頃から適切な御指導を頂き、本研究に対し

ても有益な御助言を頂いた芝浦工業大学の柳健教授、東京工業大学の藤井信生教授、高木茂孝助教授に感謝する。

## 参考文献

- (1) Constantinides A.G.: "Spectral Transformations for Digital Filters", Proc. IEE, 117, 1585-1590 (1970)
- (2) Mitra S.K., Neuvo Y. and Roivainen H.: "Design of Recursive Digital Filters with Variable Characteristics", Int. J. Circuit Theory & Appl., vol. 18, 107-119 (1990)
- (3) Murakoshi N., Watanabe E. and Nishihara A.: "A Synthesis of Variable IIR Digital Filters", Trans. IEICE J75-A, 3, pp. 362-368 (March 1992)
- (4) 渡部 英二, 伊藤 正人, 村越 信雄, 西原 明法: "特性可変ウェーブディジタルの一構成法", 信学技報, CAS91-160 (1992)
- (5) Crystal T.H. and Ehrman L.: "The Design and Applications of Digital Filters with Complex Coefficients", IEEE Trans. Audio & Electroacoust., AU-16, 3, pp. 315-320 (Sept. 1968)