

動的再配置の解析とスケジューリングの効果

伊澤 喜三男 (大阪大学 大型計算機センター)

1. 緒言

主記憶空間を有効に利用するための有力な方法の一つに動的再配置 (dynamic relocation) 方式¹⁾がある。動的再配置の解析は、これまで、ほとんど行われていなかった。わずかに Randell²⁾のシミュレーションによる考察が知られるのみであった。解析的な取り扱いは、最近に到つて著者³⁾および Betteridge⁴⁾によつてそれぞれ別個になされた。Betteridge は、しかし、限られたほんの一部の成果しか示し得ていない。筆者による前著³⁾および本稿は、動的再配置によつて基本的諸問題の解明へ向つての最初の一歩を印すものであると言ふことができるであらう。

まず、第二章では、動的再配置のモデルが明確にされる。つづいて、第三章では、確率論的解析を行い、多重度の確率分布、記憶空間利用率の確率分布、処理率などが明らかにされる。得られる結果は、最初、一般的な形で示し、ついで、タスクの領域要求量が一様分布に従う場合の具体的諸結果を明らかにする。第四章では、深いスケジューリングを行うときの効果を明示するとともに、二三の問題にも言及する。

2. 動的再配置のモデル

動的再配置のモデルは、図1に示されるように、空になることのない待ち行列 Q と処理系 S からなるシステムである。

処理系は、 N 単位 (この単位を以下ではブロック-blockと呼ぶ) の容量を持つ一次元の記憶空間といくつかの処理装置 (プロセッサ) からなる。

待ち行列 Q から取り出されて記憶空間内に置かれ、プロセッサによつて処理される被処理体 (以下ではタスク T とする) は、下記のような時間的および空間的特性を持つとする。すなわち

(1) 処理時間 (つまり記憶空間内滞在時間) x は、基本的には指数分布に従う。この分布は、確率密度関数 $\mu(t) \cdot e^{-\mu(t)x}$ ($x > 0$) に従うが、パラメータ $\mu(t)$ は、時刻 t における記憶空間内のタスク数 m の関数である。時刻 t において単位時間内にタスクが終了する確率が $\mu(t)$ であることを意味する。

記憶空間内のタスク数が m のとき、換言すると多重度が m のときの $\mu(t)$ の値を μ_m と書くと、通常、つぎの条件を満たすと考えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &\geq \mu_2 \geq \dots & \dots &\geq \mu_m \geq \dots \\ \mu_1 &\leq 2\mu_2 \leq \dots & \dots &\leq m\mu_m \leq \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)の両極端を考えると、 $\mu_m = \mu$ ($m = 1, 2, \dots$) は、処理系内にプロセッサが十分多く用意されているようなシステムに対応し、 $m\mu_m = \mu$ ($m = 1, 2, \dots$) は、プロセッサ数が一の場合に対応する。後者の場合、暗黙のどんな意味においても処理のオーバーラップがないことを意味する。実際の計算機システムでは、IO処理とCPU処理などのオーバーラップがあり得るから、これら両極端の間にあると言へる。このような事情から、まず、両極端について解析を進め、結果を示すことが必要である。

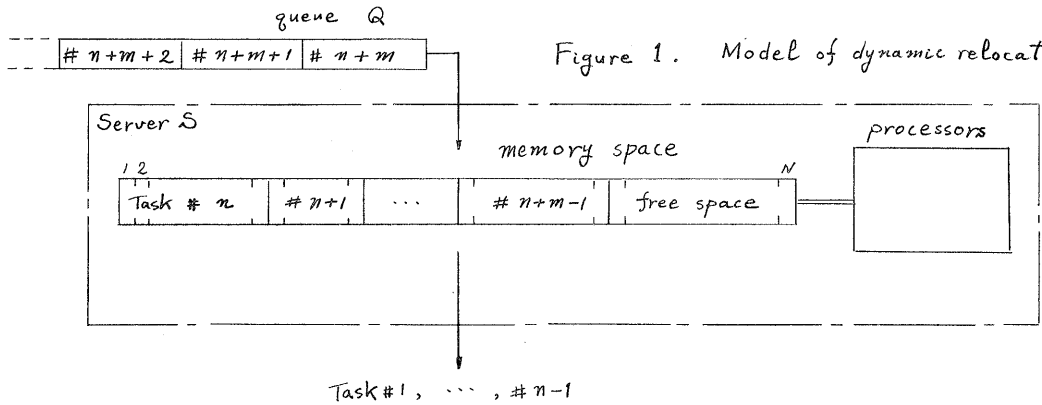


Figure 1. Model of dynamic relocation

(2) 記憶空間要求(占有)量 j ($j = 1, 2, \dots, N$; 単位はブロック) は, 任意に与えられた確率分布 $G(j)$ に従う. j ブロック占める確率を p_j と書くと, $G(j) = \sum_{i=1}^j p_i$ である.

(3) 上記二つの特性は, t_i が互いに独立であり, また, どちらもタスク毎に独立であることを仮定する.

たとえば, 全国共同利用大型計算機センターのように多くの専向分野の利用者と多様な計算課題を擁するシステムでは, この仮定は妥当性を失わないだろう.

このシステムの動作は, 記憶空間の有効な用法の一つである動的再配置として知られている. すなわち

(1) 待ち行列 Q からタスクを取り出して処理系 S に移す際, 常にまず待ち行列の先頭のタスクが記憶空間の空き領域に移せるかどうか, つまり領域要求量が空き領域よりも大きくないかどうか調べる. もし移せるならばこのタスクを移す. 移せなければ先頭から二番目のタスクを調べて同じことを行う. これを先頭から数えて d 番目のタスクまで行い, それも移すことができなければ, 今度は, さらに領域が空くまで待つことにする. d をスケジューリングの深さと言う.

$d = 1$, すなわちスケジューリングの深さが1のとき, 待ち行列の扱いは, FIFO方式と言われる.

(2) タスクは, 記憶空間内に順に詰めて配置し, 最大限 M 個 (すなわち最大多重度は M) までという制限を置いて, 可能な限り一杯にする. タスクを順に詰めて配置する結果, この段階で空き領域がいくつかの断片に分断されることはない.

(3) あるタスク, たとえば, 図1でタスク $\# n + r$ ($0 \leq r \leq m-1$) が終了すると, $\# n + r + 1$ から $\# n + m - 1$ までのタスクを空間内(タスク $\# n + r - 1$ ($r = 0$ のときは空間の始端)との間に空隙が残らないよう詰める ($r = m - 1$ ならばこの必要はない). これがいわゆる コンパクション (compaction) を伴う動的再配置である. こうして拡大した空き領域に, 新たなタスクを待ち行列から取り出して配置することを直ちに再行する.

(4) システムの状態変化は, 上記(1), (2), (3)に従って生じるが, それに要する時間 (overhead) は零 (微小) であると仮定する.

3. 動的再配置の解析

前章で導入したモデルについて, 特にスケジューリングの深さが1の場合を解

析する。システムが平衡状態に達していると考えられると、この任意の時刻 t におけるシステムの状態の確率をまず求め、それを基にして、多重度が m ($1 \leq m \leq M$) にある確率、記憶空間の使用領域の容量が n ($1 \leq n \leq N$) ブロックである確率、処理率 (単位時間に処理を終るタスク数) などを求める。文献 (3) では、領域要求量が二項分布に従う場合の諸結果を示したが、本稿では、二項分布と比較して分散の大きい一様分布について具体的諸結果を示す。後者は、前者のそれとはかなり異なる特性を示し、スケジューリングを深くするときの効果が明瞭に現れるなど興味深いものがある。

まず、システムの状態を定義する。

時刻 t に、記憶空間内に m ($1 \leq m \leq M$) 個のタスク # $n, \dots, \# n+m-1$ があるとき (図 1), これらが占める領域量をそれぞれ i_1, i_2, \dots, i_m ブロックとする。同時に、待ち行列の先頭から M 個のタスク # $n+m, \dots, \# n+m+M-1$ が占めるべき領域量をそれぞれ j_1, j_2, \dots, j_M とすると、 $2M$ 組 $[i_1, i_2, \dots, i_m, 0, \dots, 0; j_1, j_2, \dots, j_M]$ を状態と定義し、 $Q[i_1, i_2, \dots, i_m, 0, \dots, 0; j_1, j_2, \dots, j_M]$ と書く。特に時刻 t を明示するときには、 $Q[i_1, \dots, i_m, 0, \dots, 0; j_1, j_2, \dots, j_M; t]$ と書く。

システムの動作開始直後からは、 $m < M$ ならば、 $N - (i_1 + i_2 + \dots + i_m) < j_1$ である。

理解を容易にするため、最大多重度 M が 2 の場合を解析し、直ちに一般の M の場合の結果を示す。

最大多重度 M が 2 の場合、システムの状態は四つの添字を持つ $Q[i, j; k, l]$ ($1 \leq i, k, l \leq N; 0 \leq j \leq N$) で表わされる。

時刻 t にシステムが状態 $Q[i, j; k, l]$ にある確率を $p[i, j; k, l]$ と書くと、前章に述べたモデルの諸仮定と状態遷移の規則から、時刻 t と微小時間 Δt 後の時刻 $t + \Delta t$ の間に発生する状態変化に関して差分方程式 (2), (3) を得る。

$$p[i, 0; k, l; t + \Delta t] = p[i, 0; k, l; t] (1 - \mu_1 \Delta t) + \sum_{k=1}^{N-i} (p[k, i; k, l; t] + p[i, k; k, l; t]) \mu_2 \Delta t (1 - \mu_2 \Delta t) + \sum_{k=N-i+1}^N p[k, 0; i, k; t] \mu_1 \Delta t g_k + o(\Delta t), \quad (2)$$

ただし、 $1 \leq i \leq N, N - i + 1 \leq k \leq N, 1 \leq l \leq N; o(\Delta t)$ は、 Δt より小さい位数にあることを示す Landau の記法である。

$$p[i, j; k, l; t + \Delta t] = p[i, j; k, l; t] (1 - \mu_2 \Delta t)^2 + \sum_{k=1}^{N-i} (p[k, i; j, k; t] + p[i, k; j, k; t]) \mu_2 \Delta t (1 - \mu_2 \Delta t) g_k + \sum_{k=N-i+1}^N p[k, 0; i, j; t] \mu_1 \Delta t g_k g_l + o(\Delta t), \quad (3)$$

ただし、 $1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N-i, 1 \leq k \leq N, 1 \leq l \leq N$ 。

式 (2), (3) を書き直すと、

$$\frac{p[i, 0; k, l; t + \Delta t] - p[i, 0; k, l; t]}{\Delta t} = -\mu_1 p[i, 0; k, l; t] + \mu_2 \sum_{k=1}^{N-i} (p[k, i; k, l; t] + p[i, k; k, l; t]) + \mu_1 g_l \sum_{k=N-i+1}^N p[k, 0; i, k; t] + o(\Delta t), \quad (4)$$

$$\frac{P[i, j; k, l; t + \Delta t] - P[i, j; k, l; t]}{\Delta t} = -2\mu_2 P[i, j; k, l; t] + \mu_2 g_l \sum_{k=1}^{N-i} (P[h, i; j, k; t] + P[i, h; j, k; t]) + \mu_1 g_k g_l \sum_{k=N-i+1}^N P[h, 0; i, j; t] + o(\Delta t). \quad (5)$$

ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、微分方程式

$$\frac{d}{dt} P[i, 0; k, l; t] = -\mu_1 P[i, 0; k, l; t] + \mu_2 \sum_{k=1}^{N-i} (P[h, i; k, l; t] + P[i, h; k, l; t]) + \mu_1 g_l \sum_{k=N-i+1}^N P[h, 0; i, k; t], \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} P[i, j; k, l; t] = -2\mu_2 P[i, j; k, l; t] + \mu_2 g_l \sum_{k=1}^{N-i} (P[h, i; j, k; t] + P[i, h; j, k; t]) + \mu_1 g_k g_l \sum_{k=N-i+1}^N P[h, 0; i, j; t] \quad (7)$$

を得る。 $t \rightarrow \infty$ で平衡状態に達するものとする、式(6)、(7)の左辺は0となり、また、極限 $\lim_{t \rightarrow \infty} P[i, 0; k, l; t] = P[i, 0; k, l]$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} P[i, j; k, l; t] = P[i, j; k, l]$ が定まるから、

$$\mu_1 P[i, 0; k, l] = \mu_2 \sum_{k=1}^{N-i} (P[h, i; k, l] + P[i, h; k, l]) + \mu_1 g_l \sum_{k=N-i+1}^N P[h, 0; i, k] \quad (8)$$

$$2\mu_2 P[i, j; k, l] = \mu_2 g_l \sum_{k=1}^{N-i} (P[h, i; j, k] + P[i, h; j, k]) + \mu_1 g_k g_l \sum_{k=N-i+1}^N P[h, 0; i, j] \quad (9)$$

を得る。式(8)、(9)は、 $N^2(N+1)/2$ 個の変数 $P[i, 0; k, l]$ 、 $P[i, j; k, l]$ に關する連立一次方程式である。計算量の極大から、この連立一次方程式を数値計算によつて解くことは、忽ち不可能となる。そこで、解析解を求めることが是非とも必要である。

連立一次方程式(8)、(9)の一般解はつぎの通りである。

$$P[i, 0; k, l] = \frac{1}{\mu_1} g_i g_k g_l K_{2, N}, \quad (10)$$

ただし、 $1 \leq i \leq N$ 、 $N-i+1 \leq k \leq N$ 、 $1 \leq l \leq N$ 、

$$P[i, j; k, l] = \frac{1}{2\mu_2} g_i g_j g_k g_l K_{2, N}, \quad (11)$$

ただし、 $1 \leq i \leq N-1$ 、 $1 \leq j \leq N-i$ 、 $1 \leq k \leq N$ 、 $1 \leq l \leq N$ 。式(10)、(11)で $K_{2, N}$ は任意の定数である。

i, j, k, l の可能なすべての組み合わせについて確率 $P[i, 0; k, l]$ 、 $P[i, j; k, l]$ の和をとると1になる。すなわち、

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=N-i+1}^N \sum_{l=1}^N P[i, 0; k, l] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-i} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N P[i, j; k, l] = 1 \quad (12)$$

であることから $K_{2, N}$ の値が一意に定まる。

$$K_{2, N} = \frac{1}{\frac{1}{2\mu_2} G * G(N) + \frac{1}{\mu_1} \{1 - G * G(N)\}} \quad (13)$$

ここで、* はたたみ込み (convolution) を表わす。

最大多重度が一般に M ($2 \leq M \leq N$) の場合には、式(10), (11), (13) の代りに

$$\left. \begin{aligned} P[i_1, 0, \dots, 0; j_1, j_2, \dots, j_M] &= \frac{1}{\mu_1} g_{i_1} \left(\prod_{R=1}^M g_{j_R} \right) K, \\ P[i_1, i_2, 0, \dots, 0; j_1, j_2, \dots, j_M] &= \frac{1}{2\mu_2} g_{i_1} g_{i_2} \left(\prod_{R=1}^M g_{j_R} \right) K, \\ &\dots \\ P[i_1, i_2, \dots, i_M; j_1, j_2, \dots, j_M] &= \frac{1}{M\mu_M} \left(\prod_{R=1}^M g_{i_R} \right) \left(\prod_{R=1}^M g_{j_R} \right) K, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$K_{M,N} = \frac{1}{\frac{1}{M\mu_M} G^{M*}(N) + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m\mu_m} \{ G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) \}} \quad (15)$$

を得る。ただし、 $G^*(j) = G(j)$, $G^{m*}(j) = G^*(G^{(m-1)*}(j))$

平衡状態で多重度が m ($m = 1, 2, \dots, M$) である確率を $P_{m,N}$ と書くと、
 $m = 1, 2, \dots, M-1$ については、

$$\begin{aligned} P_{m,N} &= \sum_{i_1=1}^{N-(m-1)} \sum_{i_2=1}^{N-i_1-(m-2)} \dots \sum_{i_m=1}^{N-(i_1+\dots+i_{m-1})} \sum_{j_1=N-(i_1+\dots+i_{m-1})}^N \dots \sum_{j_M=1}^N P[i_1, \dots, i_m, 0, \dots, 0; j_1, \dots, j_M] \\ &= \frac{1}{m\mu_m} K_{M,N} \{ G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) \}, \end{aligned} \quad (16)$$

$m = M$ に対しては

$$P_{M,N} = \frac{1}{M\mu_M} K_{M,N} G^{M*}(N) \quad (17)$$

を得る。平均多重度 $\bar{M}_{M,N}$ は、

$$\bar{M}_{M,N} = \sum_{m=1}^M m P_{m,N} = K_{M,N} \left[\frac{1}{\mu_M} G^{M*}(N) + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{\mu_m} \{ G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) \} \right]. \quad (18)$$

記憶空間の使用領域の容量が、 n ブロックである確率を $P_{n/N}$ 、 n ブロック以下である確率を $\bar{P}_{n/N}$ と書くと、 $n = 1, 2, \dots, M-1$ については、

$$\begin{aligned} P_{n/N} &= \sum_{R=1}^n \sum_{i_1+\dots+i_R=n} \sum_{j_1=N-n+1}^N \sum_{j_2=1}^N \dots \sum_{j_M=1}^N P[i_1, \dots, i_R, 0, \dots, 0; j_1, \dots, j_M] \\ &= \sum_{R=1}^n \frac{1}{R\mu_R} K_{M,N} g^{R*}(n) \{ 1 - G(N-n) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

$n = M, M+1, \dots, N$ については、

$$\begin{aligned} P_{n/N} &= \sum_{R=1}^{M-1} \sum_{i_1+\dots+i_R=n} \sum_{j_1=N-n+1}^N \sum_{j_2=1}^N \dots \sum_{j_M=1}^N P[i_1, \dots, i_R, 0, \dots, 0; j_1, \dots, j_M] \\ &\quad + \sum_{i_1+\dots+i_M=n} \sum_{j_1=1}^N \dots \sum_{j_M=1}^N P[i_1, i_2, \dots, i_M; j_1, \dots, j_M] \\ &= \sum_{R=1}^{M-1} \frac{1}{R\mu_R} K_{M,N} g^{R*}(n) \{ 1 - G(N-n) \} + \frac{1}{M\mu_M} K_{M,N} g^{M*}(n), \end{aligned} \quad (20)$$

$$P_{n/N} = \sum_{m=1}^n P_{m/N} \quad (21)$$

使用領域の容量の平均 $\bar{U}_{M,N}$ は、

$$\bar{U}_{M,N} = \sum_{n=1}^N n P_{n/N}. \quad (22)$$

$$\text{平均処理率 } \bar{R}_{M,N} \text{ は、} \rightarrow \bar{R}_{M,N} = \sum_{m=1}^M m\mu_m P_{m,N} = K_{M,N}. \quad (23)$$

つぎに、タスクの領域要求量 j ($j = 1, 2, \dots, N$; 単位はブロック) が、一様分布に従う場合を解析する。すなわち、

$$g_j = \frac{1}{a} \quad (j = 1, 2, \dots, a; N = \beta a, 1 \leq \beta \leq 2^*) \quad (24)$$

$$G(j) = \frac{j}{a} \quad (j = 1, 2, \dots, a) \quad (25)$$

とする。この分布については、たにみ込みは以下の式で表わされる (文献(5), Vol. 1, XI.7, 練習問題 18, 19, 20 (pp 284-285))。

$$g^{R*}(j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{R}{\nu} \binom{j-a\nu-1}{R-1} \frac{1}{a^R}, \quad (26)$$

$$G^{R*}(j) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{R}{\nu} \binom{j-a\nu}{R} \frac{1}{a^R}. \quad (27)$$

$a \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, j/a = x$ とすると、極限分布は、

$$G^{R*}(j) \rightarrow \frac{1}{R!} \sum_{0 \leq \nu < x} (-1)^\nu \binom{R}{\nu} (x-\nu)^R. \quad (28)$$

式(26), (27), (28) は、見掛けと異なり、実は有限級数である。

[I] $R\mu_R = \mu$ ($R = 1, 2, \dots$) の場合。

処理率 $\kappa_{M,N}$ は明らかに μ である。

式(27)より

$$\begin{aligned} G^{R*}(N) &= \binom{N}{R} \frac{1}{a^R} - R \binom{N-a}{R} \frac{1}{a^R} \quad (N = \beta a, 1 \leq \beta \leq 2) \\ &= \frac{1}{R!} \left[\frac{N}{a} \cdot \frac{N-1}{a} \cdots \frac{N-R+1}{a} - R \cdot \frac{N-a}{a} \cdot \frac{N-a-1}{a} \cdots \frac{N-a-R+1}{a} \right] \\ &\rightarrow \frac{1}{R!} \left[\beta^R - R(\beta-1)^R \right] \quad (N \rightarrow \infty, N = \beta a) \end{aligned} \quad (29)$$

であるから、多重度 m の確率の極限分布は、

$$\begin{aligned} p_m &= G^{m*}(N) - G^{(m+1)*}(N) \quad (m = 1, 2, \dots, M-1) \\ &\rightarrow \frac{m - (\beta-1)}{(m+1)!} \left[\beta^m - (m+1)(\beta-1)^m \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$p_M = G^{M*}(N) \rightarrow \frac{1}{M!} \left[\beta^M - M(\beta-1)^M \right]. \quad (31)$$

多重度 m は制限のない ($M = N \rightarrow \infty$) 場合の平均多重度 \bar{M} は、

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \sum_{R=1}^{\infty} R p_R = \sum_{R=1}^{\infty} \frac{R \{R - (\beta-1)\}}{(R+1)!} \left[\beta^R - (R+1)(\beta-1)^R \right] \\ &= e^\beta - 1 - (\beta-1)e^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

つぎに、領域使用量の分布を求める。まず、式(26)から

$$g^{R*}(n) = \binom{n-1}{R-1} \frac{1}{a^R} \quad (1 \leq n \leq a), \quad (33)$$

$$g^{R*}(n) = \binom{n-1}{R-1} \frac{1}{a^R} - R \binom{n-a-1}{R-1} \frac{1}{a^R} \quad (a+1 \leq n \leq N = \beta a, 1 \leq \beta \leq 2). \quad (34)$$

$$\begin{aligned} N-n = \beta a - n \geq a \text{ では } G(N-n) &= 1 \text{ であるから,} \\ (1 - G(N-n)) &= 0 \quad (n \leq (\beta-1)a), \end{aligned} \quad (35)$$

* N および a は、無論、ともに正整数である。従つて β は正の有理数でなければならぬ。 $\beta > 2$ の場合については省略する。

$$N-n = \beta a - n < a \quad \text{すなわち } G(N-n) = (\beta a - n)/a \quad \text{であるから,}$$

$$(1 - G(N-n)) = (n/a) - (\beta - 1) \quad (n > (\beta - 1)a). \quad (36)$$

$$(i) P_{n/N} = 0 \quad (1 \leq n \leq (\beta - 1)a) \quad (37)$$

(ii) $(\beta - 1)a + 1 \leq n \leq a$ すなわち, M を十分大きくとると,

$$P_{n/N} = \sum_{k=1}^n g^{k*}(n) (1 - G(N-n))$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{a^k} \left(\frac{n}{a} - (\beta - 1) \right)$$

$$= \frac{1}{a} \left(\frac{n}{a} - (\beta - 1) \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-1}, \quad (38)$$

$$P_{n/N} = \sum_{m=(\beta-1)a+1}^n \frac{1}{a} \left(\frac{m}{a} - (\beta - 1) \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{m-1}$$

$$= \left(\frac{n}{a} - \beta \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)^n + \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{(\beta-1)a} \quad (39)$$

$n/N = x$, $N \rightarrow \infty$ としたときの極限分布は,

$$U_x = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{n/N} = \beta(x-1)e^{\beta x} + e^{\beta-1} \quad ((\beta-1)/\beta \leq x \leq 1/\beta). \quad (40)$$

この分布の密度関数は

$$U_x = \frac{d}{dx} U_x = \beta \{ \beta(x-1) + 1 \} e^{\beta x} \quad ((\beta-1)/\beta \leq x \leq 1/\beta). \quad (41)$$

(iii) $a + 1 \leq n \leq N = \beta a$ ($1 \leq \beta \leq 2$) では, M を十分大きくとると,

$$P_{n/N} = \sum_{k=1}^n g^{k*}(n) (1 - G(N-n))$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{a^k} - k \binom{n-a-1}{k-1} \frac{1}{a^k} \right\} \left(\frac{n}{a} - (\beta - 1) \right)$$

$$= \frac{n}{a^2} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-1} - \frac{\beta-1}{a} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-1}$$

$$\quad - \frac{n^2}{a^3} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-a-2} + \frac{\beta-1}{a^2} n \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-a-2}, \quad (42)$$

$$P_{n/N} = \sum_{m=(\beta-1)a+1}^n \left[\frac{m}{a^2} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{m-1} - \frac{\beta-1}{a} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{m-1} \right]$$

$$+ \sum_{m=a+1}^n \left[-\frac{m^2}{a^3} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{m-a-2} + \frac{\beta-1}{a^2} m \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{m-a-2} \right]$$

$$= \left(\frac{n}{a} - \beta \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)^n + \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{(\beta-1)a} \left[\left\{ \left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{2n}{a} + 2 \right) + \frac{1}{a} \left(\frac{n^2}{a^2} - \frac{2n}{a} + 1 + \frac{1}{a} \right) \right\} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-a-2} + \frac{2}{a} - 1 \right] + (\beta-1) \left(\frac{n}{a} - 1 \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{n-a-1}. \quad (43)$$

$n/N = x$, $N \rightarrow \infty$ としたときの極限分布は,

$$U_x = \lim_{N \rightarrow \infty} P_{n/N} = \beta(x-1)e^{\beta x} + e^{\beta-1}$$

$$+ \{ \beta(\beta x - 1)(1-x) - 1 \} e^{\beta x - 1} + 1 \quad (1/\beta \leq x \leq 1). \quad (44)$$

密度関数は,

$$U_x = \frac{d}{dx} U_x = \beta \{ \beta(x-1) + 1 \} e^{\beta x}$$

$$- \beta^2 x \{ \beta x - (\beta - 1) \} e^{\beta x - 1} \quad (1/\beta \leq x \leq 1). \quad (45)$$

領域使用率の平均 (storage utilization) \bar{U} は,

$$\bar{U} = \int_{1/\beta}^1 \beta x \{ \beta(x-1) + 1 \} e^{\beta x} dx - \int_{1/\beta}^1 \beta^2 x^2 \{ \beta x - (\beta - 1) \} e^{\beta x - 1} dx$$

$$= \frac{1}{\beta} [e^\beta - (\beta-1)e^{\beta-1} - (\beta+1)] \quad (1 \leq \beta \leq 2). \quad (46)$$

特に $\beta = 1$ のとき, $\bar{U} = e - 2 = 0.71828 \dots$ となり, Betteridge⁴⁾の結果と一致する.

[II] $\mu_k = \mu$ ($k = 1, 2, \dots$) の場合.

まず, 準備として, 式(29)から,

$$\frac{1}{k} [G^{k*}(N) - G^{(k+1)*}(N)] \\ = -\frac{1}{k \cdot k!} (\beta-1)\beta^k + \frac{1}{k \cdot k!} (\beta-1)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \beta^{k+1} - \frac{1}{k!} (\beta-1)^k, \quad (47)$$

無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x^k / k \cdot k!$ を積分指数関数 Ei を用いて表現すると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} = Ei x - C - \log|x| \quad (x \text{ は実数, } \neq 0) \quad (48)$$

ここで, $C = 0.57721 \dots$ (Eulerの定数), $Ei x = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ ($x > 0$ のときは, $t=0$ で主値をとる),

また, Barnesの一般超幾何関数を用いて表現すると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} = x \cdot {}_2F_2(1, 1; 2, 2; x), \quad (49)$$

$$\text{したがって, } {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_p)_n x^n}{(\beta_1)_n \cdots (\beta_q)_n n!}, \quad (50)$$

$$(\alpha)_n = \alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1).$$

多重度 m に制限がなければ, $M = N \rightarrow \infty$ のときの処理率 K は,

$$\frac{1}{K} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\mu} [G^{k*}(N) - G^{(k+1)*}(N)] \\ = \frac{1}{\mu} [e^\beta - e^{\beta-1} - \beta - (\beta-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} \beta^k + (\beta-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} (\beta-1)^k] \quad (51)$$

であるから,

$$K = \frac{\mu}{e^\beta - e^{\beta-1} - \beta - (\beta-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} \beta^k + (\beta-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} (\beta-1)^k} \\ = \frac{\mu}{e^\beta - e^{\beta-1} - \beta - (\beta-1) \{ Ei \beta - Ei(\beta-1) + \log(1 - \frac{1}{\beta}) \}} \\ = \frac{\mu}{e^\beta - e^{\beta-1} - \beta - \beta(\beta-1) {}_2F_2(1, 1; 2, 2; \beta) + (\beta-1)^2 {}_2F_2(1, 1; 2, 2; \beta-1)}. \quad (52)$$

平均多重度 \bar{M} は,

$$\bar{M} = K \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{1}{k\mu} [G^{k*}(N) - G^{(k+1)*}(N)] = \frac{K}{\mu} \quad (53)$$

領域使用量の分布を求めると,

$$(i) \quad p_{m/N} = 0 \quad (1 \leq n \leq (\beta-1)a) \quad (54)$$

$$(ii) \quad (\beta-1)a + 1 \leq n \leq a \quad \text{では, } M \text{ を十分大きくとると } (M = N),$$

$$p_{n/N} = \frac{K_{M,N}}{\mu} \cdot \frac{1}{n} \left\{ \frac{n}{a} - (\beta-1) \right\} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^n - 1 \right\}. \quad (55)$$

$$(iii) \quad a + 1 \leq n \leq N = \beta a \quad (1 \leq \beta \leq 2) \quad \text{では, } M \text{ を十分大きくとると,}$$

$$P_{m/N} = \frac{K_{M,N}}{\mu} \left[\frac{1}{n} \left\{ \frac{n}{a} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{n-1} - (\beta-1) \left(1 + \frac{1}{a}\right)^n - \frac{n}{a} + (\beta-1) \right\} \right. \\ \left. - \frac{n}{a^2} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{n-a-1} + \frac{\beta-1}{a} \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{n-a-1} \right]. \quad (56)$$

領域使用量の平均 \bar{U}_N は、 M を十分大きくとると、

$$\bar{U}_N = \frac{K_{M,N}}{\mu} \left[\sum_{n=(\beta-1)a+1}^{\beta a} \frac{n}{a} \cdot \frac{1}{n} \left\{ \frac{n}{a} - (\beta-1) \right\} \left\{ \left(1 + \frac{1}{a}\right)^n - 1 \right\} \right. \\ \left. - \sum_{n=a+1}^{\beta a} \frac{n}{a} \left(\frac{n}{a^2} - \frac{\beta-1}{a} \right) \left(1 + \frac{1}{a}\right)^{n-a-1} \right] \\ = \frac{K_{M,N}}{2\mu} \quad (\beta \neq 1 \text{ し, 領域量は } a \text{ で正規化}). \quad (57)$$

N で正規化したものを改めて \bar{U}_N と置くと、

$$\bar{U}_N = \frac{K_{M,N}}{2\mu\beta} \quad (M=N) \\ \rightarrow \frac{K}{2\mu\beta} \quad (= \bar{U}) \quad (N \rightarrow \infty). \quad (58)$$

以上について数値計算を行って求めた結果は、表 1 にまとめられている。

4. スケジューリングの効果

前章では、スケジューリングの深さ d を 1 に限って解析を進めた。ここでは、スケジューリングを深くしたときの効果を考察する。

表 1 には、前章の諸結果と並んで、深さ d を 8 に設定したときの値が示されている。 $M=8$, $N=512$, $\beta=1.0, 1.2, \dots, 2.0$ についてそれぞれ 3001 回のタスクを発生させてシミュレーションを行って得た実験値である。

まず、一見して、深さ d を 1 から 8 に増やすことにより、深さを 1 にしたまま記憶空間の容量を βa からほぼ $(\beta+0.2)a$ に増加したときと同等の効果があるということが認められる。すなわち、 d および β を明示するため K , \bar{U} をそれぞれ $K_{\beta a}^{(d)}$, $\bar{U}_{\beta a}^{(d)}$ と書くと、 $\mu_k = \mu$ ($k=1, 2, \dots$) の場合、

$$K_{\beta a}^{(8)} = K_{\beta' a}^{(1)} \quad (\beta' = \beta + 0.2, 1 \leq \beta \leq 1.8), \quad (59)$$

$$\beta \bar{U}_{\beta a}^{(8)} = \beta' \bar{U}_{\beta' a}^{(1)} \quad (\beta' = \beta + 0.2, 1 \leq \beta \leq 1.8) \quad (60)$$

が成り立っている。

現状では主記憶装置の価格がかなり高いとするならば、このことの重要性は明白であろう。

つきに、前章の式 (58) によると、 $\bar{U} = K/2\mu\beta$ である。これに対応して $d=8$ の場合も、

$$\bar{U}^{(d)} = K^{(d)}/2\mu\beta \quad (d=8, 1 \leq \beta \leq 2) \quad (61)$$

が成り立っていることが認められる。

一般に ($d=1, 2, \dots$)、式 (61) が真であるならば、 $d \rightarrow \infty$ のとき、明らかに $\bar{U}^{(d)} \rightarrow 1$ ($\bar{U}^{(d)} \leq 1$) であるから、 $K^{(d)} \rightarrow 2\mu\beta$ ($K^{(d)} \leq 2\mu\beta$) となる。すなわち、 $\mu_k = \mu$ ($k=1, 2, \dots$) の場合、 $2\mu\beta$ は処理率 $K^{(d)}$ の上限となる。

5. 結 語

前著³⁾ および本稿により、動的再配置にまつわる基本的諸問題は解明されたこと

言うことができよう。

しかし、残された問題は多々ある。たとえば、前章に示した実験式(59), (60), (61)を解析的手法を用いて一般的に証明することは問題である(G(j)が他の分布, たとえば二項分布に従うときは, また事情は異なる)。また, 他の方式, たとえば"固定分割方式"における最適分割⁶⁾との比較などの問題もある。これらについては機会を改めて論じたい。

参考文献

- 1) 藤野喜一, 他: 計算機システム基礎論, 共立出版(1973)
- 2) Randell, B.: A note on storage fragmentation and program segmentation, Comm. ACM 12, 365-369 (1969).
- 3) 伊澤春三男: 動的再配置の解析と最適システムの設計, 情報処理(投稿中)
- 4) Betteridge, T.: An analytic storage allocation model, Acta Informatica 3, 101-122 (1974)
- 5) Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, 3rd edition, John Wiley & Sons, Inc.
- 6) 伊澤春三男: 利用者の多い計算センターにおける最適多重処理について, 情報処理, Vol. 15, No. 8, 581-588 (1974)

Table 1. A: Analytic sol., S: Simulation, I: $m\mu_m = \mu (m=1,2,\dots)$, II: $\mu_m = \mu (m=1,2,\dots)$, $\mu=1$.

β	d	N	AS	区	K	\bar{M}	\bar{U}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1.0	1	∞	A	I	1	1.7183	.7183	.5	.3333	.125	.0333	.0069	.0012	.0002
				II	1.3922	1.3922	.6961	.6961	.2320	.0580	.0116	.0019	.0003	.0000
	8	512	S	I	1.3864	1.3864	.6975	.6974	.2375	.0491	.0133	.0027	.0001	.0000
				II	1.6328	1.6327	.8206	.5397	.3250	.1068	.0214	.0060	.0010	.0002
1.2	1	∞	A	I	1	2.0758	.7299	.32	.396	.1979	.0654	.0166	.0035	.0006
				II	1.6548	1.6548	.6895	.5295	.3277	.1091	.0271	.0055	.0010	.0001
	8	512	S	I	1.6389	1.6389	.6873	.5359	.3259	.1092	.0228	.0047	.0013	.0001
				II	1.9099	1.9099	.7995	.3797	.4040	.1611	.0416	.0104	.0019	.0012
1.4	1	∞	A	I	1	2.4585	.7561	.18	.3947	.2695	.0947	.0300	.0075	.0016
				II	2.0066	2.0066	.7166	.3612	.3960	.1803	.0475	.0120	.0025	.0005
	8	512	S	I	1.9480	1.9480	.7006	.3802	.3860	.1621	.0551	.0121	.0034	.0012
				II	2.3180	2.3180	.8329	.1861	.4596	.2406	.0864	.0201	.0058	.0014
1.6	1	∞	A	I	1	2.8598	.7874	.08	.3453	.3232	.1601	.0686	.0176	.0042
				II	2.3936	2.3936	.7479	.1915	.4133	.2579	.0958	.0328	.0070	.0015
	8	512	S	I	2.3680	2.3680	.7454	.2062	.4036	.2534	.1002	.0286	.0054	.0024
				II	2.8158	2.8158	.8857	.0316	.4184	.3383	.1464	.0493	.0130	.0019
1.8	1	∞	A	I	1	3.2692	.8162	.02	.264	.3469	.2253	.0988	.0332	.0092
				II	2.8501	2.8501	.7917	.0570	.3762	.3295	.1606	.0563	.0158	.0037
	8	512	S	I	2.8492	2.8492	.7973	.0559	.3740	.3387	.1542	.0576	.0142	.0046
				II	3.2322	3.2322	.9039	.0	.2794	.3818	.2177	.0834	.0269	.0077
2.0	1	∞	A	I	1	3.6708	.8354	.0	.1667	.3333	.2750	.1444	.0566	.0179
				II	3.2811	3.2811	.8203	.0	.2734	.3646	.2257	.0948	.0309	.0084
	8	512	S	I	3.2565	3.2565	.8205	.0	.2839	.3591	.2244	.0973	.0227	.0102
				II	3.6110	3.6110	.9085	.0	.1556	.3780	.2681	.1268	.0499	.0126