線形論理上の帰納推論

山口 文彦　　中西 正和

慶應義塾大学理工学研究科計算機科学専攻

概要

線形論理は Girard によって提唱された論理である. この論理では論理式の個数に意味があり, 述語を用いなくてもある程度の数量概念を表すことができる. この論理の上での帰納推論では, 消費関係などに関する規則を見つけ出すことができる. 本稿では線形論理式によって表現された知識を用いての帰納推論について述べる.

1 はじめに

線形論理は Girard[1] によって提唱された豊かな表現力を持つ論理である. この論理では論理式の個数に意味があり, 述語を用いなくてもある程度の数量概念を表すことができる.

帰納推論は仮説を導き出す操作である. 仮説と与えられた背景知識は, 与えられた事例を説明しなければならない. 事例は正事例と負事例に分けられる. 正事例は, 背景知識と仮説から導かれる事例を表したものである. 負事例は, 背景知識と仮説から導かれない事例を表したものであり, それは背景知識と仮説に対して矛盾してはいけない.

帰納推論の目的は, 与えられた正事例すべてを説明できるくらい一般的で, 負事例によって矛盾を生じない仮説を求めることである.

帰納推論における一般化の操作は, 演繹推論の操作の逆操作であると考えることができる. これは演繹によって, 背景知識と仮説から正事例を導き出すことができるからである. 例えば, 帰納論理プログラミング (ILP) の分野では, 融合法の一つから二つのステップを反転した操作が用いられる [3]. 本稿では, 正事例に対する帰納推論の操作をいくつか紹介するが, これらは後件を前件に変換するものである.

Induction in Linear Logic, Fumihiko Yamaguchi and Masakazu Nakanishi, Department of Computer Science, Keio University

線形論理を用いて帰納推論を行なうことにより, 消費関係や経過を表す規則を推測することができる.

2 線形論理

線形論理は, 推論規則の適用による部分式の個数の変化を論理演算子によって制御している. 最も典型的な例として, 従来の論理で認められてきた weakening と contraction の規則がある. weakening 規則は, 仮定を増やしてもよいことを表す.

$$\frac{\Delta \to \Gamma}{A, \Delta \to \Gamma}\,(\text{weakening})$$

contraction 規則は, 同じ仮定であれば, 削除しても良いことを表す.

$$\frac{A, A, \Delta \to \Gamma}{A, \Delta \to \Gamma}\,(\text{contraction})$$

これらの規則は, 線形論理において, 演算子 ! のついた論理式に対してのみ適用可能である. 同様に, 右辺への weakening と contraction は 演算子 ? のついた論理式に対してのみ可能となる.

線形論理は, 以下のような式生成規則と, 推論規則によって定義される.

定義 2.1 線形論理式
$\mathcal{F}$ をすべての線形論理式の集合とする. $\mathcal{F}$ は以下のように定義される.

- 命題 $P \in \mathcal{F}$
- 命題定数 $\top$, 1, $\perp$, $0 \in \mathcal{F}$.
- $X \in \mathcal{F}$ であるとき $!X$, $?X$, $X^{\perp} \in \mathcal{F}$.
- X, $Y \in \mathcal{F}$ であるとき $X \otimes Y$, $X \parr Y$, $X \multimap Y$, $X \oplus Y$, $X \& Y \in \mathcal{F}$.

以下では, 英字の大文字 $A, B, \cdots$ は線形論理式を表し, ギリシャ文字の大文字 $\Gamma, \Delta, \cdots$ は線形論理式を要素とする有限な多重集合を表すとする. また, 論理演算子の結合の順序を表すために括弧を用いる.

定義 2.2 証明木
$\Gamma \vdash \Delta$ を Γ を前件, Δ を後件とするシーケントと呼ぶ. Γ が多重集合 $\{X_1, X_2, \cdots X_n\}$ であり, Δ が多重集合 $\{Y_1, Y_2, \cdots Y_m\}$ であるとき, シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ は以下の式と同じ意味を持つ.

$$X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_n \multimap Y_1 \parr Y_2 \parr \cdots \parr Y_m$$

Γ, A は線形論理式 A を少なくとも一つ含む多重集合を表すとする. 線形論理は, 図 1 に示されるような始式と推論規則によって定義される.

シーケント $\Gamma \vdash \Delta$ の両辺がそれぞれ 1 個の要素からなる場合を考える. シーケントが証明可能であるときのみ $A \vdash B$ と書くことにすると, $\vdash$ を 2 項関係であると考えることができる. 2 項関係 $\vdash$ は, 始式 $D \vdash D$ から分かるように反射的であり, カット則から分かるように推移的である. また $X = Y$ を $X \vdash Y$ かつ $Y \vdash X$ であることと定義すると, $\vdash$ は $\mathcal{F}$ 上の半順序関係となる. $X \vdash Y$ であるとき X が Y より小さいと呼ぶことにすると, 0 と $\top$ はそれぞれ $\mathcal{F}$ の最小元と最大元である.

定理 2.1
$X \& Y$ は X と Y の最大下界である.
[証明]

1. $X \& Y$ が X と Y の下界であること

$$\frac{X \vdash X}{X \& Y \vdash X} \qquad \frac{Y \vdash Y}{X \& Y \vdash Y}$$

2. Z が X と Y の下界であるとき $X \& Y$ が Z よりも大きいこと

$$\frac{Z \vdash X \qquad Z \vdash Y}{Z \vdash X \& Y}$$

□

同様に, X と Y の最小上界を $\oplus$ を用いて得ることができる. これらの論理演算子 $\&$ と $\oplus$ は交換則と結合則, 吸収則を満たす. したがって, $\mathcal{F}$ は完備束である.

線形論理が, 推論規則の適用による部分式の個数の変化を論理演算子によって制御している例として, ($\otimes$ 右) 規則と ($\&$ 右) を挙げる.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Pi \vdash \Lambda, B}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda, A \otimes B} (\otimes \text{右})$$

この規則を下から上に読むと, $A \otimes B$ か成立することを証明するために, 他の式を A が成立することを示すための集合 Γ, Δ と B が成立することを示すための集合 Π, Λ に分ける. 論理式が何か資源を表していると考えると, $A \otimes B$ は A と B の両方を同時に成立させるに必要充分な資源があることを表す. 例えば, 命題 D が 1 ドル持っていることを表し, C がコーヒー 1 杯が買えることを表すとする. $D \vdash C$ によって, 1 ドルでコーヒー 1 杯が買えることを表すとすると, 2 ドルでコーヒー 2 杯を買えることは以下のように示すことができる.

$$\frac{D \vdash C \qquad D \vdash C}{D, D \vdash C \otimes C}$$

一方, $\&$ は A も B もどちらも成立し得るが, それらは同時には成立しないことを表す.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \& B} (\& \text{右})$$

$A \& B$ が成立するとき, その他の資源は A を成立させるのに必要充分であり, B を成立させるにも必要充分であるが, 両方が必ずしも同時には成立しないことを表す. 例えば, 命題 P がパン 1 斤を買えることを表すとし, パン 1 斤も 1 ドルだとすると, 1 ドル持っているとき, パンでもコーヒーでも買うことができることは以下のように示される.

$$\frac{D \vdash C \qquad D \vdash P}{D \vdash C \& P}$$

この場合パンとコーヒーの両方を (1 ドルで) 買うことはできないので, $\&$ が使われる.

$\otimes$ は乗法的 and と呼ばれ, $\&$ は加法的 and と呼ばれる.

始式

1. $D \vdash D$
2. $\Gamma, 0 \vdash \Delta$
3. $\Gamma \vdash \top, \Sigma$
4. $\bot \vdash$
5. $\vdash 1$

推論規則

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, D \qquad D, \Pi \vdash \Lambda}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda}\ (\text{カット})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, D}{D^{\perp}, \Gamma \vdash \Delta}\ ({}^{\perp}\ \text{左}) \qquad \frac{D, \Gamma \vdash \Lambda}{\Gamma \vdash \Lambda, D^{\perp}}\ ({}^{\perp}\ \text{右})$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \otimes B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\otimes\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Pi \vdash \Lambda, B}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda, A \otimes B}\ (\otimes\ \text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Pi \vdash \Lambda}{A \parr B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda}\ (\parr\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \parr B}\ (\parr\ \text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \,\&\, B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\&\ \text{左}) \quad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \,\&\, B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\&\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \,\&\, B}\ (\&\ \text{右})$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \qquad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \oplus B, \Gamma \vdash \Delta}\ (\oplus\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\ (\oplus\ \text{右}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B}\ (\oplus\ \text{右})$$

$$\frac{B, \Gamma \vdash \Delta \qquad \Pi \vdash \Lambda, A}{A \multimap B, \Gamma, \Pi \vdash \Delta, \Lambda}\ (\multimap\ \text{左}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \multimap B}\ (\multimap\ \text{右})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\ (!\ \text{増}) \qquad \frac{!A, !A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\ (!\ \text{減}) \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta}\ (!\ \text{左})$$

$$\frac{!\Gamma \vdash ?\Sigma, A}{!\Gamma \vdash ?\Sigma, !A}\ (!\ \text{右}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{1, \Gamma \vdash \Delta}\ (1\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \bot}\ (\bot\ \text{右})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, ?A}\ (?\ \text{増}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \vdash \Delta, ?A}\ (?\ \text{減}) \qquad \frac{A, !\Gamma \vdash ?\Sigma}{?A, !\Gamma \vdash ?\Sigma}\ (?\ \text{左})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, ?A}\ (?\ \text{右}) \qquad \frac{F[t/x], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x F, \Gamma \vdash \Delta}\ (\forall\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x F}\ (\forall\ \text{右})$$

a は Γ と Δ 中に自由な出現をしない

$$\frac{F[a/x], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x F, \Gamma \vdash \Delta}\ (\exists\ \text{左}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, F[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x F}\ (\exists\ \text{右})$$

a は Γ と Δ 中に自由な出現をしない

図 1: 線形論理のシーケント計算

3 帰納推論

帰納推論は与えられた事例を説明する仮説を導き出す操作である.

$\otimes$ は同時性を, $\multimap$ は消費関係や経過を表すので, B は背景知識というより初期状態, E^+ は正事例もしくは遷移可能な状態, E^- は負事例もしくは遷移不能な状態を表すと考えることができる. 帰納推論は遷移規則を仮説として生成する.

定義 3.1 帰納推論
$X \models Y$ は X が Y を意味的に含意することを表す. B が背景知識を表し, E_i^+ $(1 \leq i \leq n)$ と E_j^- $(1 \leq j \leq m)$ がそれぞれ正事例と負事例を表すとする. これらは以下の条件を満たさなければならない.

$$\textit{for all } i,\ B \not\models E_i^+$$
$$\textit{for all } j,\ B \otimes E_j^- \not\models \perp$$

線形論理式 H が以下の条件を満たすとき, H は B と $E_1^+, \cdots, E_n^+$, $E_1^-, \cdots, E_m^-$ の帰納的帰結であるという.

$$\textit{for all } i,\ B \otimes H \models E_i^+$$
$$\textit{for all } j,\ B \otimes H \otimes E_j^- \not\models \perp$$

帰納推論は, 背景知識と事例から, それらの帰納的帰結を導き出す操作である.

記号処理的な観点から, 2項関係 $\models$ を $\vdash$ に置き換えて考える.

正事例は仮説を一般化し, 負事例は正事例による一般化の操作を抑制する.

4 正事例が一個与えられた場合

まず, 正事例が一つ与えられた場合について述べる.

定理 4.1
E^+ を正事例とする. $H \vdash B \multimap E^+$ が成り立つことと H が E^+ と B の帰納的帰結であることは同値である.
[証明]
$H \vdash B \multimap E^+$ のとき $B \otimes H \vdash E^+$ であること

$$\dfrac{\dfrac{H \vdash B \multimap E^+ \qquad \dfrac{E^+ \vdash E^+ \qquad B \vdash B}{B \multimap E^+, B \vdash E^+}}{B, H \vdash E^+}}{B \otimes H \vdash E^+}$$

$B \otimes H \vdash E^+$ のとき $H \vdash B \multimap E^+$ であること

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{H \vdash H \qquad B \vdash B}{B, H \vdash B \otimes H} \qquad B \otimes H \vdash E^+}{B, H \vdash E^+}}{H \vdash B \multimap E^+}$$

□

$B \otimes H \vdash E$ を満たすような線形論理式 E を $B \otimes H$ からつくり出す操作は演繹推論である. したがって, 帰納推論は演繹推論の逆操作であると考えることができる.

定義 4.1 帰納関係 $\leadsto$
$Y \vdash X$ であるときそのときのみ $X \leadsto Y$ と書く.

この関係 $\leadsto$ を操作であると考える. 背景知識 B と正事例 E^+ の帰納的帰結を $B \multimap E^+$ からこの操作を繰り返し適用することで, それらの帰納的帰結を得ることができる.

定理 4.2
関係 $\leadsto$ は推移的である.
[証明]
$\vdash$ が推移的であるので自明 □

$0 \vdash A$ は始式 $\Gamma, 0 \vdash \Delta$ であるから, 任意の線形論理式 A に対して, $A \leadsto 0$ である. したがって, 0 は任意の正事例と背景知識の帰納的帰結である. しかし, この帰結は与えられた状態を何も説明しないので無意味である. また, $A \leadsto A$ であるから, $B \multimap E^+$ は正事例 E^+ と背景知識 B の帰納的帰結である.

4.1 冗長さを取り除く推論

$X \multimap X$ が表すような知識はある意味で冗長である. X が一つ与えられたとき, この知識からは同じものが生み出され得ることが分かる.

補題 4.1
$X \multimap X \rightsquigarrow 1.$
[証明]

$$\cfrac{\cfrac{X \vdash X}{\vdash X \multimap X}}{1 \vdash X \multimap X}$$

□

したがって, 操作 $\rightsquigarrow$ を用いて $X \multimap X$ を 1 に書き換えることができる. この規則のより一般的な形として以下のものが考えられる.

定理 4.3
$(V \otimes X) \multimap (W \otimes X) \rightsquigarrow V \multimap W.$
[証明]

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{V \vdash V \quad \cfrac{X \vdash X \qquad W \vdash W}{X, W \vdash W \otimes X}}{V, X, V \multimap W \vdash W \otimes X}}{V \otimes X, V \multimap W \vdash W \otimes X}}{V \multimap W \vdash (V \otimes X) \multimap (W \otimes X)}$$

□

補題 4.1 は定理 4.3 において V と W がどちらも 1 である場合を表している.

上記の操作は, V を消費して W を得ることができるとき, それらと同時に存在して V が W に変わる間に変化しないもの X を取り除くという一般化である. もちろん, 上記の操作によって仮説を一般化し過ぎる場合も考えられる.

例 4.1
A と B は触媒 C があれば化合して, D を得ることができる. C は触媒なので D を得ても残っている.

初期状態　$A \otimes B$
正事例　　$C \multimap D \otimes C$

C がなければ, D を得ることができない.

負事例　$D^{\perp}$

このとき, この状況を説明できる仮説 H の満たすべき条件は以下のようになる.

$$\begin{cases} (A \otimes B) \otimes H & \vdash \; C \multimap (D \otimes C) \\ (A \otimes B) \otimes H \otimes D^{\perp} & \nvdash \; \perp \end{cases}$$

正事例から得られる条件は

$$H \vdash (A \otimes B) \multimap (C \multimap (D \otimes C))$$

と同値であり,

$$\begin{aligned} & (A \otimes B) \multimap (C \multimap (D \otimes C)) \\ = \; & (A \otimes B \otimes C) \multimap (D \otimes C) \end{aligned}$$

であるので, 結局 これらの条件はそれぞれ次のものと同値である.

$$\begin{cases} H & \vdash \; (A \otimes B \otimes C) \multimap (D \otimes C) \\ H & \nvdash \; (A \otimes B) \multimap D \end{cases}$$

この場合, $(A \otimes B \otimes C) \multimap (D \otimes C)$ に冗長さを取り除く一般化を施すと $(A \otimes B) \multimap D$ となり, 負事例によって与えられる 仮説が満たすべき条件 が成り立たなくなることが分かる.

4.2　規則を分割する推論

複数のものを消費することで (別の) 複数のものが得られるということを, より小さい単位の消費関係の集まりで一般化することができる. 例えば, 2 ドル払う (消費する) ことでコーヒー 2 杯を得ることができるという消費関係は, 1 ドル払う (消費する) ことでコーヒー 1 杯を得るという消費関係が二つあることで表せるかも知れない.

定理 4.4

$$(X \otimes Y) \multimap (Z \otimes W) \rightsquigarrow (X \multimap Z) \otimes (Y \multimap W)$$

[証明]

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{X \vdash X \quad \cfrac{Y \vdash Y \quad \cfrac{Z \vdash Z \qquad W \vdash W}{Z, W \vdash Z \otimes W}}{Y, Z, Y \multimap W \vdash Z \otimes W}}{X, Y, X \multimap Z, Y \multimap W \vdash Z \otimes W}}{X \otimes Y, X \multimap Z, Y \multimap W \vdash Z \otimes W}}{\cfrac{X \multimap Z, Y \multimap W \vdash (X \otimes Y) \multimap (Z \otimes W)}{(X \multimap Z) \otimes (Y \multimap W) \vdash (X \otimes Y) \multimap (Z \otimes W)}}$$

□

$1 \otimes A = A$ であるので, X や W を 1 とする特殊な場合を考えることもできる. この規則によって非常に多くの一般化の仕方が考えられる. 例えば以下のような式にこの規則を 1 回適用して得られる一般化は, 2^{n+m-1} 通り考えることができる.

$$(A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n) \multimap (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_m)$$

4.3 帰納推論規則の部分式への適用

以下の定理は, 操作 $\rightsquigarrow$ を線形論理式のいくつかの部分式に適用できることを表す.

定理 4.5
$A \rightsquigarrow A'$ であるとき, $A \otimes X \rightsquigarrow A' \otimes X$, $A \parr X \rightsquigarrow A' \parr X$, $A \oplus X \rightsquigarrow A' \oplus X$, $A \& X \rightsquigarrow A' \& X$, $X \multimap A \rightsquigarrow X \multimap A'$, $!A \rightsquigarrow !A'$ かつ $?A \rightsquigarrow ?A'$.
[証明]

$$\dfrac{\dfrac{A' \vdash A \qquad X \vdash X}{A', X \vdash A \otimes X}}{A' \otimes A \vdash A \otimes X} \qquad \dfrac{\dfrac{A' \vdash A \qquad X \vdash X}{A' \parr X \vdash A, X}}{A' \parr A \vdash A \parr X}$$

$$\dfrac{\dfrac{A' \vdash A}{A' \vdash A \oplus X} \qquad \dfrac{X \vdash X}{X \vdash A \oplus X}}{A' \oplus X \vdash A \oplus X}$$

$$\dfrac{\dfrac{A' \vdash A}{A' \& X \vdash A} \qquad \dfrac{X \vdash X}{A' \& X \vdash X}}{A' \& X \vdash A \& X}$$

$$\dfrac{\dfrac{A' \vdash A \qquad X \vdash X}{X, X \multimap A' \vdash A}}{X \multimap A' \vdash X \multimap A} \qquad \dfrac{\dfrac{A' \vdash A}{!A' \vdash A}}{!A' \vdash !A} \qquad \dfrac{\dfrac{A' \vdash A}{A' \vdash ?A}}{?A' \vdash ?A}$$

□

4.4 表現を簡単にする一般化

複雑な形の論理式で与えられる知識を, より簡単な式に一般化することができる. 特に $!A$ は 0 個以上の A が $\otimes$ で結ばれた形の式の一般化であるので, 式を簡単にする一般化を 同時に知識の個数 (証明中で使える回数) に関する一般化とすることができる. また, 後述の複数の正事例に対する帰納推論によって & 演算子が導入されるが, & 演算子を含む式の一般化も同様に行なうことができる.

定理 4.6
$\mathbf{A}$ を 有限個の A が $\otimes$ または & で結合された論理式であるとする. このとき $\mathbf{A} \rightsquigarrow !A$.
[証明]
$A \rightsquigarrow !A$

$$\dfrac{A \vdash A}{!A \vdash A}$$

$(!A) \otimes \mathbf{A}' \rightsquigarrow !A$ if $\mathbf{A}' \rightsquigarrow !A$

$$\dfrac{\dfrac{!A \vdash !A \qquad !A \vdash \mathbf{A}'}{!A, !A \vdash (!A) \otimes \mathbf{A}'}}{!A \vdash (!A) \otimes \mathbf{A}'}$$

$(!A) \& \mathbf{A}' \rightsquigarrow !A$ if $\mathbf{A}' \rightsquigarrow !A$

$$\dfrac{!A \vdash !A \qquad !A \vdash \mathbf{A}'}{!A \vdash (!A) \& \mathbf{A}'}$$

さらに $!A \rightsquigarrow !A$ であるから定理 4.5 から $\mathbf{A} \rightsquigarrow !A$ であることが分かる □

例 4.2
D を 1 ドル持っていることを表す命題とし, C をコーヒー 1 杯持っていることを表す命題とする. 初期状態として, 「3 ドル持っている」が与えられたとする. この状態から, 「コーヒー 2 杯と 1 ドル持っている」という状態に遷移可能であるとしたとき, コーヒーの値段に関する規則を以下のように推測することができる.

$$\begin{aligned} B &= D \otimes D \otimes D \\ E^+ &= C \otimes C \otimes D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B \multimap E^+ \\ = \;& (D \otimes D \otimes D) \multimap (C \otimes C \otimes D) \end{aligned}$$

まず, 「3 ドル消費することで, コーヒー 2 杯と 1 ドルを得る」という知識が得られる. これは, B と E^+ から何の一般化もせずに得られる知識である.

$$\begin{aligned} & (D \otimes D \otimes D) \multimap (C \otimes C \otimes D) \\ \rightsquigarrow \;& (D \otimes D) \multimap (C \otimes C) \end{aligned}$$

4.1 節で紹介された一般化によって, 「2 ドル消費することで, コーヒー 2 杯を得ることができる」という知識が得られる. さらに, 4.2 で紹介された方法を用いて, 以下のように一般化する.

$$\begin{aligned} & (D \otimes D) \multimap (C \otimes C) \\ \rightsquigarrow \;& (D \multimap C) \otimes (D \multimap C) \end{aligned}$$

こうして, 1ドル消費することでコーヒー 1杯を得るという消費関係 (操作) をちょうど 2 回だけ使えるという仮説を得た. さらに, 4.4 節で紹介した規則により 2 回を 0 回以上に一般化することができる.

$$\begin{aligned} &(D \multimap C) \otimes (D \multimap C) \\ \rightsquigarrow\ & !(D \multimap C) \end{aligned}$$

こうして「1ドル消費することでコーヒー 1杯を得ることができる」という知識を得ることができる.

例 4.2 は, 意図した知識が与えられた正事例を一般化していくことによって得られることの一例である.

4.5 述語の扱い

線形論理において述語の扱いは従来の論理におけるものと変わらない. 本節では述語を扱うことを考える.

4.1 節で紹介された帰納推論操作に対しては, 単一化をすることで述語を扱うことができるようにする. 融合原理で用いられるように, リテラル $X(t)$ とその補リテラル $X(x)^{\perp}$ は単一化代入 $[t/x]$ と一緒に見つけられる.

定理 4.7

$(\exists x(V \otimes X)) \parr (W \otimes X^{\perp}[t/x]) \rightsquigarrow V[t/x] \otimes W$

[証明]

以下の証明では, 証明の段階がいくつか省略されている.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{V[t/x] \vdash V[t/x] \qquad \dfrac{W \vdash W \qquad \dfrac{X[t/x] \vdash X[t/x]}{\vdash X[t/x], X^{\perp}[t/x]}}{W \vdash X[t/x], (W \otimes X^{\perp}[t/x])}}{V[t/x], W \vdash (V \otimes X)[t/x], (W \otimes X^{\perp}[t/x])}}{V[t/x], W \vdash (V \otimes X)[t/x], (W \otimes X^{\perp}[t/x])}}{V[t/x], W \vdash (\exists x(V \otimes X)), (W \otimes X^{\perp}[t/x])}}{V[t/x] \otimes W \vdash (\exists x(V \otimes X)) \parr (W \otimes X^{\perp}[t/x])}$$

□

さらに, 定数の変数化を行なうことで, 述語を扱った際の一般化を考えることができる.

定理 4.8

$V[t/x] \rightsquigarrow \forall x.V$

[証明]

$$\dfrac{V[t/x] \vdash V[t/x]}{\forall x.V \vdash V[t/x]}$$

□

この操作には, 従来の論理と同様に最小一般化の操作を用いることができる.

例 4.3

背景知識として「Tweety は鳥である」が与えられているとし, 正事例として「Tweety は翼を持っている」が与えられたとする.

$$\begin{aligned} B &= \texttt{Bird(Tweety)} \\ E^{+} &= \texttt{Haswings(Tweety)} \end{aligned}$$

このとき, 以下のような一般化が行なわれる.

$$\begin{aligned} & B \multimap E^{+} \\ = \ & \texttt{Bird(Tweety)} \multimap \texttt{Haswings(Tweety)} \\ \rightsquigarrow \ & \forall x.(\texttt{Bird}(x) \multimap \texttt{Haswings}(x)) \end{aligned}$$

こうして, 「鳥であれば翼を持つ」という知識が得られる.

5 複数の正事例が与えられた場合

複数の正事例が与えられた場合, 仮説はそれらの正事例すべてを説明しなければならない. 次に挙げる定理は二つの正事例を同時に説明する仮説を導くことを可能にする.

定理 5.1

H_1 を正事例 E_1^{+} に対する帰納的帰結とし, H_2 を正事例 E_2^{+} に対する帰納的帰結とする. このとき $H_1 \& H_2$ は E_1^{+} に対する帰納的帰結であり, また E_2^{+} に対する帰納的帰結でもある.

[証明]

$H_1 \& H_2$ が H_1 と H_2 の最大下界であり 関係 $\vdash$ が推移的であることから自明. □

この定理を用いて仮説を一般化していくと, そのような仮説は非常に複雑なものになってしまうことが考えられる. その場合, 4.4 節で紹介された規則を用いて, 複雑な仮説を簡単な式に一般化す

ることができる. 例えば, E_1^+ が $D \otimes D$ であることを, E_2^+ が $D \otimes D \otimes D$ であることを示唆するとき, $(D \otimes D)\,\&(D \otimes D \otimes D)$ や $!D$ はどちらもこれらの正事例に対する帰納的帰結となる.

6 むすび

線形論理における帰納推論の方法について述べた.

本稿で述べた帰納推論規則によって得られる帰納的帰結には, 非常に多くの選択肢があるが, それは式の複雑さに対して定まるある有限な個数で抑えられる. したがって, 仮説の一般化を数え挙げるアルゴリズムは存在する. しかし, 線形論理では, あるシーケントに証明木が存在するかどうかは決定不能な問題であることが知られており, 負事例に対して仮説 (の候補) が無矛盾かどうかは調べることができない. そこで, 一般化を行なうときにその反例となることが分かっている形の式が負事例として与えられているかどうかを調べるというアプローチが考えられるが, もちろんこれは負事例が与えられた場合に仮説として正しくないものを推論する可能性がある.

従来の論理と違い, 線形論理では命題論理の範囲内で量を表すことができる. したがって, 線形論理上の帰納推論によって, 量に関する知識を見つけることができる.

謝辞

有用なご助言を数多くしてくださった 故 西村敏男先生 に深く感謝致します.

参考文献

[1] J.-Y. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science, vol. 50, pp. 1–102, 1987

[2] 古川康一, 人工知能基礎論, オーム社, 1993

[3] Stephen Muggleton and Luc De Raedt, *Inductive Logic Programming : Theory and Methods*, Journal of Logic Programming, vol. 19–20, pp. 629–679, 1994

[4] Yves Deville and Kung-Kiu Lau, *Logic Program Synthesis*, Journal of Logic Programming, vol. 19–20, pp. 321–350, 1994

[5] 竹内外史, 線形論理入門, 日本評論社, 1995

[6] Fumihiko Yamaguchi, Masakazu Nakanishi, *Induction in Linear Logic*, International Journal of Theoretical Physics, vol. 35, No. 10, pp. 2107–2116, 1996