B1－1　微分方程式の数値解法の安定性

清　水　辰　次　郎　（理大）

§1　収束，安定，各種不安定

常微分方程式$\dfrac{dy}{dx}=f(x,\ y)$の初期値$y(0)=y_0$なる解の数値解法の安定性について考える。

$f(x,\ y)$は$0\leqq x\leqq a$，$|y-y_0|\leqq b$にて適当な条件を満足し解は$x=0$から$x=x_n$まで存在するものとする。

数値解法につき，Fox:Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equationsには不安定性につきInherent instability, Partial instability, Strong instability, Weak instabilityと列挙してそれぞれ定義が載つている。

或解法が**収束**（Convergent）であるとは刻みh，ステツプ数nとし，$nh=x_n$とするとき，x_nを一つ定め，$h\to 0$（したがつて$n\to\infty$）ならしめるとき$0\leqq x\leqq x_n$なるxにつき数値解y_mが方程式の真の解$y(x_m)$に収束（一様収束）するときをいう。

或解法が**安定**（Stable）であるとは刻みhを一定にしてnを増すとき十分大きなnについて数値解の漸近的性質が真の解のそれと同じなるときをいう（この定義は実は定義にはなつていないが数値解析者はわかるらしい）。

Inherent instabilityは計算途中の四捨五入等のためにおこるもので数値解法には避けられないもの。

Partial instabilityは刻みhが或値より大きければ不安定，或値より小さければ安定となるようなもの。

Strong instabilityは収束もせず不安定でもあるもの。

Weak instabilityは収束はするが不安定なもの。

第三のものは方程式によらず方法のみにより，第二，第四のものは方程式によつて不安定がおこつたりおこらなかつたりする。

y，fはベクトルとして，方程式の連立したものと考えてもいいが，簡単のため一階の方程式として考える。

§2　収束条件と数値解法

本節では主として線型多段法（linear multi step法）

$$y_{n+K}+\alpha_{K-1}y_{n+K-1}+\cdots\cdots+\alpha_0 y_n=h(\beta_K f_{n+K}+\beta_{K-1}f_{n+K-1}+\cdots\cdots$$

B－2

$\cdots\cdots\cdots \quad +\beta_0 f_n)$

ここに$f_n \equiv f(x_n, y_n)$

そして$\rho(z) \equiv z^K + \alpha_{K-1} z^{K-1} + \cdots\cdots + \alpha_0$, $\sigma(z) \equiv \beta_K z^K + \beta_{K-1} z^{K-1} + \cdots\cdots + \beta_0$

とおく。

そのときDahlquistにより方法が収束であるための必要十分な条件は

$\rho(z) = 0$の根の絶対値は1または1より小で，絶対値1なる根は単根

$\rho(1) = 0$かつ$\rho'(1) = \sigma(1)$

なることが知られている。(Henrici: Discrete Variable Method参照)

よつてStrong instability のおこる方法は上記条件を満足せぬものということができる。

以上のことは方法が収束であれば存在域内のxを定めるとき，十分刻みを小さくすれば0からxまでの真の解に数値解が限りなく近づくということであるが，実際の数値解法ではそのように刻みを小さくとれば四捨五入誤差が増大し，とても実際的ではない。

それゆえ実際にはxの位置を定めるのではなく，刻みhを十分小さく，しかし一定にして，nを増していく方法が採られる。(真の解は必要なところまで存在すると仮定する)

以下，数値解法は収束条件を満足する方法に限る。

本節は四捨五入誤差を考えぬ理論。

§3 Weak instability

刻みhを一定として数値解法をすすめる場合には，Weak instability と Partial instabilityが問題となる。

文献によれば$\dfrac{dy}{dx} = Ay$(Aは正または負の定数) $y(0) = 1$なる真の解は$y = e^{Ax}$であるが，$A < 0$なる場合，方法によつてはnが或程度大となると数値解は絶対値の大きな正，負の値の間を振動することになる。中点法，Milne 法がこれに属する。weakly unstable(weakly stable)(numerically unstable)等といわれる。

Weak instability は四捨五入誤差のためにおこるといわれているが必ずしもそうではないこと次の如くである。

中点法：$y_{n+2} = y_n + 2hf_{n+1}$を$\dfrac{dy}{dx} = -y$ に適用すると$y_{n+2} = y_n - 2hy_{n+1}$となり，これを定差方程式とみると一般解が $y_n = c_1 s_1{}^n + c_2 s_2{}^n$，$s_1 = \sqrt{1+h^2} - h$，$s_2 = -(\sqrt{1+h^2} + h)$，不安定性は$c_2 \fallingdotseq 0$ からおこることは知られているが，数値解法の初期値，出発値を$y_0 = 1$，$y_1 = s_1$とすれば$y_n = s_1{}^n$となり，四捨五入誤差がなければ不安定はおこらないが，その他の出発値をとれば必らず$c_2 \fallingdotseq 0$(c_2 はhには従属)となり，四捨五入誤差がなくても不安定がおこる筈である。

この現象については多くの文献があり，たとえばStetterは Milne 修正子を反復さ

せず，その代りに新しい予測子をつくつて不安定のおこらぬ方法を示し，Hamming は更に一般的研究より予測子はMilne のをつかい，新しい修正子をつくつて不安定のおこらぬ方法を示した（weakly stableでないものをstrongly stable という）伊理は y_n, y_{n-1}, y_{n-2} 等の或種の平均を考えることにより不安定のおこることを防止する方法を提案した．

処がstrongly stable な方法，たとえばEuler 法，梯型法，Hamming 法についても $\dfrac{dy}{dx}=-xy$（$y(0)=1$ なる真の解は $y=e^{-x^2/2}$ である）の数値解法においては，h をいかに小さくとつても，n が（すなわち x が）大となると数値解 y_n は正，負の値の間を振動することがわかる．

何故ならば

Euler 法　　$y_{n+1}=y_n-2h^2ny_n=(1-2nh^2)y_n$

ゆえに

$$y_{n+1}=(1-2nh^2)(1-2\overline{n-1}\,h^2)\cdots\cdots(1-4h^2)(1-2h^2)y_1$$

梯　型　法　　$y_{n+1}=y_n-\dfrac{h}{2}(nh\,y_n+\overline{n+1}\,h\,y_{n+1})$

ゆえに

$$y_{n+1}=\frac{1-\frac{n}{2}h^2}{1+\frac{n+1}{2}h^2}\ \frac{1-\frac{n-1}{2}h^2}{1+\frac{n}{2}h^2}\cdots\cdots\cdots\frac{1-\frac{1}{2}h^2}{1+h^2}y_1$$

Euler 法では x が増大すれば絶対値の無限に増大する正負の値の間を振動し，梯型法では n とともに y_n は零に近づくが同じく正，負の数の間を振動する．しかも $|e_n|/y_n$ は無限に増大する．（e_n は n 回目の誤差）

Hamming修正子

$$y_{n+1}=\frac{9}{8}y_n-\frac{1}{8}y_{n-2}+\frac{3}{8}\{(n-1)h^2y_{n-1}-2nh^2y_n-(n+1)h^2y_{n+1}\}$$

から定差方程式の性質からもわかるが，h が一定で n が増大するのであるから $nh=A$ と考え定数 A が十分大きな $\dfrac{dy}{dx}=-Ay$ なる方程式に適用すると考えれば

$$y_{n+1}(1+\frac{3}{8}hA)=(\frac{9}{8}-\frac{6}{8}hA)y_n+\frac{3}{8}hAy_{n-1}-\frac{1}{8}y_{n-2}$$

この定差方程式の独立な三つの解を s_1，s_2，s_3 とすると A が大となつて $\dfrac{3}{8}hA-\dfrac{42}{8}>0$ となれば，三根のうちの一つは負で絶対値が 1 より大きい．

よつてHamming 修正子も n が増大すれば y_n は正，負の値の間を無限に振動する．

このことからみると安定性がweak とかstrongとかいつてもそれは $\dfrac{dy}{dx}=Ay$ なる特殊の方程式についてしか問題とならないことがわかる．

一般に刻み h を定めて回数 n を増大させれば，誤差が累積して真の解と異なるようにな

る筈なことは明らかであるからstrongly stableなる概念は実際的ではないのではなかろうか。

尤もそのような方法はweakly stableな方法より一般の方程式についても不安定性の現われるのがはるかに遅くなる（刻みhが適当に小さければ）のであるからその意味では優れた方法ということができる。

§4 $\dfrac{dy}{dx}=-xy$

§3では多段法について述べたが，一段法（one step法）について考えると，Euler法では前述のように$y_{n+1}=(1-nh^2)y_n$となり正，負の間を振動する。また改良Euler法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f_n+f(x_n+h,\ y_n+hf_n)]$$

については$y_{n+1}=\left(1-\dfrac{2n+1}{2}h^2+\dfrac{1}{2}n(n+1)h^4\right)y_n$

となり括弧内は常に正であるからhを定めれば正で無限に増大する同様な論法でKutta第三階法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}h(k_1+4k_2+k_3)$$

$$k_1=f_n,\ k_2=f[x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hf_n]\quad k_3=f(x_n+h,\ y_n-hf_n+2hf[x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hf_n])$$

ではn^2の項がきいて正，負の間を振動し，普通のRunge-Kutta法ではn^4の項のために正で無限に増大する。

上記方程式ではいかにhを小さく定めても一定である限り必らず無限に振動するか或は無限に増大する。

この種の方程式の解を適当なところまで求めようとすれば刻みhが一定では上記のようにうまくいかず，また伊理氏のように平均値を利用して平滑する方法も，同氏のような簡単な方法では平滑されない。したがつて既に提唱されているように方程式，初期値，xの進行状況により刻みhを適当に増減していく方法を採用しなければならないものと思われる。

それゆえ係数に独立変数を含んでいる方程式については，非線型方程式までいかずとも予想外の困難が数値解法には伴つていることを知る。

§5 Partial instability

$\frac{dy}{dx}=-10y+9-10x$ を一段法のテーラー展開の二次の項までとつた方法で計算すると，$y_{n+1}=(1-10h+50h^2)y_n+h(9-10x_n)+50h^2(x_n-1)$ となる $(1-10h+50h^2)=B$ とおくと $h>0.2$ のとき $B>1$，$h<0.2$ のとき $0<B<1$．そして $y(0)=2$ とすれば真の解は $y=e^{-10x}-x+1$ で $x_n=nh$ とおくと

$$y_{n+1}=1-(n+1)h+(1-10h+50h^2)^n e^{-10h}$$ となる．

よつて $h>0.2$ ならば不安定となり，$h<0.2$ ならば安定，$|e_n/y_n|\to 0$，このような場合を partial instabilityというが，上の場合もし $y(0)=1$ なる初期値から出発すると $x_n=nh$ に対し $y_{n+1}=1-(n+1)h$ となり真の解は $y=-x+1$ であるから h が何であろうが不安定はおこらない．かように partial instability は方法，方程式および初期値に従属する．

この現象は非線型方程式の場合，極めて注意を要することとなる．たとえば $\frac{dy}{dx}=y^6$ において $y(0)=-5$ なる解は常に $y<0$ で $x\to\infty$ のとき $y\to 0$ である．ところが Euler 法でも何でも $h=0.0001$ にとると $y(h)>0$ となりそれから先は $y>0$，$x\to\infty$ で $y\to\infty$ になつてしまう．

方程式により初期値によつて刻み h は小さくしなければならない例となる．
しかし刻み h が大きければ不安定となり，十分小さければ不安定がおこらないということは，普通のことのように思われるので，特に名前などつける要があるか否かと思われる．むしろ初期値によつて刻み h は十分小さく採らねばならないという注意のように解すべきではなかろうか，そして上の例のように刻み h がいかに大きくても完全に安定であつたり，いかに小さく採つてもいつか不安定になつてしまうものの方が注目すべきものではなかろうか．

しかし十分小さな刻み h に対し安定となるという考え方は安定の定義がはつきりしないのでそのように考えられているが，実際には一定の h に対しては安定でないという方が普通のようである．たとえば，$y_{n+1}=y_n+hf_n$ にて $\frac{dy}{dx}=-y$，$y(0)=1$ なる解を近似するとき $y_n=(1-h)^n y_1$ であるが，誤差 $(1-h)^n-e^{-nh}\equiv e_n$ とおくとき e_n/e^{-nh} は $n\to\infty-1$ に収束する．これからみればむしろ十分小さな刻み h にして安定となる方がめずらしいのであつて，本節の線型方程式とその数値解法は偶然そうなつている．

註　$\frac{e_n}{y_n}\to 1$ も安定だと仮りにすると次のようなことがおこる．$y_{n+2}-y_n=h(\alpha f_{n+1}+\beta f_n)$ は $\alpha+\beta=4$，$\alpha<\beta$（たとえば $\alpha=1$，$\beta=3$）のときは $\frac{dy}{dx}=-y$ に対して，$y(0)=1$ のとき $nh=x$ を一定として $n\to\infty$ とすると $y_n\to e^{-2x}$．そして上記方法は Dahlquist の「収束」でない方法である．ところが真の解は $y=e^{-x}$ であるから誤差 $e^{-2nh}-e^{-nh}$，よつて $\frac{e^{-2nh}-e^{-nh}}{e^{-nh}}\to -1$．

安定の定義は $\left|\frac{e_n}{y_n}\right| \ll 1$ も $\left|\frac{e_n}{y(x_n)}\right| \ll 1$ も成立する位でないといけないのではないでしょうか。

尚 Todd:Survey of Numerical Analysisでは安定の定義なしに numerical instability という語をつかつている。そして multi step 法につき Dahlquist の $\rho(z)=0$ の根に関する条件を満足するものを安定と定義しているが，これは前述したとおり x_n を一定とした議論で，h を一定として数値解法をやつていくときとは別問題である。尚 $\rho(z)=0$ の根の条件だけで安定を定義できない筈なことは，one step 法は $\rho(z)=0$ の根は $z=1$ だけであるから $y_{n+1}=y_n+hf_n+h\varphi_n$，$\varphi_n$ に何をつけても安定だということになり妙なことになる。

参　考　資　料

one step法　　open型　　Euler 法　$y_{n+1}=y_n+hf_n$

　　　　　　　　　　　　Runge Kutta法

　　　　　　　closed型　　梯 型 法　$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f_n+f_{n+1})$

multi step法　open型

中　点　法　$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf_n$

拡張中点法　$y_{n+1}=y_{n-1}+h(\alpha f_{n-1}+\beta f_n)$, $\alpha+\beta=2$

Milne法（予測子）

$$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{4}{3}h(2f_n-f_{n-1}+2f_{n-2})$$

Stetter法（予測子）

$$y_{n+1}=-4y_n+5y_{n-1}+2h(2f_n+f_{n-1})$$

closed型

Milne法（修正子）

$$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}(f_{n+1}+4f_n+f_{n-1})$$

Hamming法（修正子）

$$y_{n+1}=\frac{9}{8}y_n-\frac{1}{8}y_{n-2}+\frac{3}{8}h(f_{n+1}+2f_n-f_{n-1})$$

R.W.Hamming ; Stable predictor-corrector methods for ordinary differential equations, J. Assoc. Comput. Mach., 6(1959), pp. 37-47.

H.J.Stetter ; Stabilizing Predictors for Weakly Unstable Correctors, (1965).