

幾何的特徴を考慮した値の割り当てを利用した四元数連想メモリの特性

波方風馬 長名優子

東京工科大学 コンピュータサイエンス学部

1 はじめに

人間の連想記憶機能を模擬した連想メモリとして様々なモデルが提案されているが、ホップフィールドネットワーク [1] や双方向連想メモリ [2] などの一般的なモデルでは、2 値パターンしか扱うことができない。それに対し、多値パターンが扱えるモデルとして、複素連想メモリ [3] や四元数連想メモリ [4] が提案されている。複素連想メモリでは、複素平面上の単位円を等分した点の値に多値に割り当てることで、多値パターンを表現している。四元数連想メモリでは、四元数を多値に割り当てることで、多値パターンの連想を実現している。文献 [5] では、四元数の幾何学的な特徴を考慮した値の割り当て方法も提案されている。また、四元数の幾何学的な特徴を考慮した値の割り当て方法を用いた場合にも、記憶したパターンの想起が行えることも確認されているが、記憶したパターンや値の割り当てによっては入力したパターンとは別のパターンに遷移してしまうことがあることが分かっている。このようなことが起こる原因としては、用いている出力関数のせいで出力の値が多値に割り当てた四元数と厳密には一致していないことが考えられる。

そこで、本研究では、出力関数を変更し、値の割り当て数やノイズ耐性なども含めて四元数連想メモリの特性の調査を行う。

2 四元数連想メモリ

四元数連想メモリ [4][5] は、自己想起型の連想メモリであるホップフィールドネットワーク [1] のニューロンモデルを四元数ニューロンモデル [4] で置き換えたものである。ニューロンの入出力や重みが四元数で表され、四元数を多値に割り当てることで多値パターンの連想を実現することができる。

2.1 四元数の幾何的特徴を考慮した値の割り当て

文献 [5] では、ノルムが 1 である四元数全体で構成される 4 次元空間における半径 1 の球の球面 (3 次元

球面) 上の円を等分した点に多値に割り当てる方法が提案されている。

3 次元の球の球面 (2 次元球面) を z 軸方向で切断すると、切断面は球の端では点となるが、 $z = 0$ に近づくにつれて大きくなり、 $z = 0$ では半径 1 の円となる。また、その間は半径 $\cos \theta$ の円となる。同様に 4 次元の球 (3 次元球面) を切断すると半径 $\cos \theta$ の球ができる。これを利用して、複素平面上で円周を等分した点に多値を割り当てたように、四元数において、円を M 等分した角度の位置の点に値を割り当てる。四元数の実部と 3 つの虚部を表す軸をそれぞれ実軸、 i 軸、 j 軸、 k 軸とし、それぞれの座標を x_1, x_2, x_3, x_4 とし、まず、 k 軸と任意の軸で 3 次元球面を切断して球を作ると、 k 軸方向の座標 x_4 は

$$x_4 = \sin \left(\frac{2\pi m_k}{M} \right) \quad (m_k = 0, \dots, M-1) \quad (1)$$

となる。次に k 座標を含む k 軸を法線とするような切断で生まれた半径 $\cos(2\pi m_k/M)$ の球面において、 j 軸と任意の軸で 2 次元球面を切断して円を作り、 k 軸と同様に等分することで j 軸上の座標 x_3 が決定する。

$$x_3 = \left| \cos \left(\frac{2\pi m_k}{M} \right) \right| \sin \left(\frac{2\pi m_j}{M} \right) \quad (m_j = 0, \dots, M-1) \quad (2)$$

最後に j 座標を含み、 j 軸を法線とするような切断で生まれた半径 $\cos(2\pi m_j/M)$ の円周上を k と j と同様に等分して i 軸と実軸上の座標を

$$x_2 = \left| \cos \left(\frac{2\pi m_k}{M} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{2\pi m_j}{M} \right) \right| \cos \left(\frac{2\pi m_i}{M} \right) \quad (m_i = 0, \dots, M-1) \quad (3)$$

$$x_1 = \left| \cos \left(\frac{2\pi m_k}{M} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{2\pi m_j}{M} \right) \right| \sin \left(\frac{2\pi m_i}{M} \right) \quad (4)$$

のように決定する。

2.2 学習

重み w は直交学習により決定する。重み w は

$$w = X(X^*X)^{-1}X^* \quad (5)$$

Characteristics of Quaternion Associative Memory using Value Assignment considering Geometric Features
Fuma Namikata and Osana Yuko (Tokyo University of Technology, osana@stf.teu.ac.jp)

で与えられる。ここで、 -1 は逆行列を表す。また、 X は学習パターン行列であり

$$X = \{x^{(1)} \dots x^{(P)}\} \quad (6)$$

で与えられる。

2.3 想起

N 個の四元数ニューロンモデルからなる四元数連想メモリにおいて、時刻 t のにおけるニューロン i の出力 $x_i(t)$ は

$$x_i(t) = f \left(\sum_{j=1}^N w_{ij} x_j(t-1) \right) \quad (7)$$

のように与えられる。ここで、 w_{ij} はニューロン j からニューロン i への重みである。また、 $f(\cdot)$ は出力関数であり、文献 [5] では

$$x = \frac{\eta u}{\eta - 1.0 + |u|} \quad (8)$$

のような関数を用いている。ここで、 η は1に近い定数である。これは、内部状態 u の値を単位球面上に近づけるような出力関数であり、 η の値が1に近いほど単位球面上に近い値に変換されることになる。しかしながら、この関数の出力は、ノルムは正確には1とならず、出力が記憶しているパターンとは厳密には一致しなくなってしまうという問題がある。そのため、記憶しているパターンが想起されたように見えても、厳密には記憶したパターンと一致しておらず、そのずれのせいで、他のパターンに遷移してしまうようなことが起こっていると考えられる。そこで、本研究では以下のような出力関数 $g(\cdot)$ や $h(\cdot)$ を用いた場合について検討を行う。まず、

$$g(u) = \begin{cases} \frac{u}{|u|} & (u \neq 0) \\ 0 & (u = 0) \end{cases} \quad (9)$$

のような出力のノルムが1となるような出力関数を考える。しかし、この関数も式 (8)と同様に出力が記憶させている値と完全に一致するとは限らない。そのため、式 (8)と同様の問題が残ってしまう可能性がある。そこで、次に、式 (9)で求めた値を、多値に割り当てた値のうち最も近いものに量子化するような

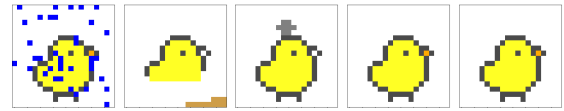
$$h(u) = x_{c(u)} \quad (10)$$

$$c(u) = \underset{s \in \{0, \dots, S-1\}}{\operatorname{argmin}} \left(g(u) - x^{(s)} \right) \quad (11)$$



(a) 入力 (b) $t = 1$ (c) $t = 2$ (d) $t = 3$ (e) $t = 4$

図 1: ノイズを含むパターンからの想起 (式 (8))



(a) 入力 (b) $t = 1$ (c) $t = 2$ (d) $t = 3$ (e) $t = 4$

図 2: ノイズを含むパターンからの想起 (式 (10), (11))

のような関数を考える。ここで、 S は割り当てた多値の値の種類の数、 $x^{(s)}$ は多値の割り当てに用いた s 番目の四元数の値である。この出力関数では、各ニューロンの出力の値は、必ず、多値の割り当てに用いた四元数の値と一致するものとなるため、記憶されたパターンが想起されたように見えるが、厳密にはそうではないというような状況になることはない。

3 計算機実験

計算機実験を行い、式 (8)のような出力関数を用いた場合には正しく想起ができなかったパターンに対しても、式 (10), (11)のような出力関数を用いることで、記憶したパターンが正しく想起できることを確認した。図 1, 2 にそれぞれの出力関数を用いた場合のノイズを含むパターン (chick) からの想起結果を示す。

参考文献

- [1] J. J. Hopfield : “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities,” Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, Vol.79, pp.2554–2558, 1982.
- [2] B. Kosko : “Bidirectional associative memories,” IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Vol.18, No.1, pp.49–60, 1988.
- [3] 橋本直樹, 黒江康明, 森武宏 : “複素ニューラルネットワークに対するエネルギー関数について,” 電子情報通信学会技術報告, No.NC98-152, pp.121-128, 1999.
- [4] T. Isokawa, H. Nishimura, N. Kamiura and N. Matsui : “Fundamental properties of quaternionic Hopfield neural network,” International Journal of Neural Systems, Vol.18, No.2, pp.135–145, 2008.
- [5] 中嶋 優貴, 長名優子 : “カオス四元数連想メモリにおける幾何的特徴を考慮した値の割り当て,” 情報処理学会第 85 回全国大会, 2023.