Vol.2022-MPS-141 No.2
2022/12/12

キンコンカンのNP完全性の証明について

福永 智渉[†1]　大久保 誠也[†1]

概要：本研究では，組み合わせパズルの 1 つである，キンコンカンについて，解の存在判定が NP 完全問題であることを証明する．具体的には，NP 完全問題である平面 3SAT からの多項式時間帰着を用いて，証明を行う．

Proof of NP-completeness of Kin-Kon-Kan

Abstract: In this study, we prove that the existence determination of a solution is an NP-complete problem for one of the combinatiorial puzzles, Kin-Kon-Kan. Specifically, the proof is based on a polynomial-time reduction from planar 3SAT, which is an NP-complete problem.

1. はじめに

現在普及しているコンピュータでは，現実的な時間で計算できない問題があると考えられている．そのような問題として，巡回セールスマン問題や 3 彩色問題などの NP 完全問題が挙げられる．NP 完全である問題は，暗号や最適化問題などに，数多くみられる．

NP 完全問題の代表的な例として，多くのペンシルパズルがある．実際，数独をはじめとする多くのペンシルパズルの NP 完全性が証明されている [2–5, 16, 17]．一方，NP 完全性の証明が示されていないパズルもある．

本研究では，ペンシルパズルの 1 つであるキンコンカンの解の存在判定が，NP 完全であることを示す．具体的には，平面 3SAT がキンコンカンへ，多項式時間帰着可能であることを示す．

2. 諸定義

2.1 計算量クラス

理論計算機科学の分野では, 問題の難しさや, アルゴリズムの効率を, 数学的に評価する．まず, コンピュータの数学的モデルを定め, 基本操作の集合を決める．そして, 各基本操作を 1 ステップとする．ある問題を解くのに必要となる時間計算量は, その問題を解くのに必要となるステップ数となる．

ある問題の計算量は, 入力サイズの関数として表現される．計算量の上界が $n, \log_a n, n^2$ のような多項式で表されたとき, その問題は多項式時間アルゴリズムで解くことができる．

YES か NO かで答えられる問題のうち, 通常の計算機を用いると多項式時間で解くことができる問題の集合のクラスを P という．また, 答えの証拠を与えられれば，多項式時間内に答えが YES であることを確認できる問題の集合のクラスを，NP という．さらに, 以下の条件 1 を満たすとき, その問題は NP 困難であるという．また, 条件 1, 2 を満たすとき, NP 完全であるという [11].

(1) クラス NP に属するすべての問題が, その問題に多項式時間帰着可能である．
(2) その問題がクラス NP に属している．

問題 A を問題 B に言い換えることを, 問題の帰着または還元という．問題 A を解くアルゴリズムを知らなくても, 問題 B を解くアルゴリズムと，問題 A から問題 B に帰着させるアルゴリズムを知っていれば, 問題 A を解くことができる．このような帰着が十分高速に行えるならば, 問題 A と問題 B の難しさは同等か問題 B の方が難しい [11].

NP 完全である問題の 1 つに平面 3SAT がある [16]．平面 3SAT は以下のように定義される．

Definition1　各節内のリテラルが OR で接続され, 各節が AND で接続されている式を, 連言標準形 (CNF) という．また, 各節が 3 つのリテラルからなるとき，3CNF と

†1　現在，静岡県立大学大学院経営情報イノベーション研究科
Presently with Graduate School of Management and Information of Innovation. University of Shizuoka

いう．3CNF を計算する，配線を交差させることなく平面に埋め込むことができる 1 出力ブール回路 G が与えられる．このとき, 回路 G を充足する入力があるか否かを判定する問題を, 平面 3SAT という．

2.2 組み合わせパズルゲーム

問題にヒントが示されており, そのヒントから得られるいくつかの答えの候補を組み合わせて，解を求めるパズルゲームを, 組み合わせパズルゲームという．組み合わせパズルゲームの具体例としては数独, 四角に切れ, フィルオミノなどが存在する．また，パズルの開発や雑誌刊行を行っている会社がいくつか存在しており，そのような代表的な企業として，株式会社ニコリがある．

組み合わせパズルゲームでは，問題の高速解法や問題の自動生成, 人間にとっての難しさ，問題の計算量クラスについての研究が進められている．問題の高速解法では，スリザーリンクやナンバーリンクなどの，多くのペンシルパズルについて研究されている [12, 14]．問題の自動生成では，数独や虫食い算などについて，研究が行われている [7, 8, 10]．人間にとっての難しさでは，数独やお絵かきロジックなどで，難易度評価の研究や難易度判定のアプリケーションの提案などが行われている [9, 19]．問題の計算量クラスについては，数独, フィルオミノ, ぬりかべ，四角に切れ，よせなべ，ヘルゴルフ，マカロ，ドッスンフワリなどの組み合わせパズルゲームで，その NP 完全性が示されている [2–5, 16, 17]．また，ヘルゴルフやぬりかべなどの組み合わせパズルの NP 完全性を利用して，セキュリティの分野に応用した研究も存在する [15, 17, 18].

フィルオミノは，平面 3SAT からの多項式時間帰着が示されることにより，その解の存在判定が NP 完全であることが示されている [16]．論文 [16] では，まず，平面 3SAT を構成する基本ゲートとなる，入力ゲート，出力ゲート，ワイヤー，スプリッタ，NOT ゲート，AND ゲート，OR ゲートをフィルオミノの形で表現する手順を示している．そして，フィルオミノで表現した各ゲートを組合わせて，任意の平面 3SAT をフィルオミノで実現する手順が示されている．

四角に切れの NP 完全性も，フィルオミノと同様に, SAT の回路が四角に切れに多項式時間帰着可能であることが示されることで証明されている [5].

2.3 キンコンカン

キンコンカンとは，株式会社ニコリによって考案された組み合わせパズルの 1 つである [6].

キンコンカンでは長方形，もしくは正方形の盤面がマス目状に仕切られており，盤面の側面に所々，ヒントとなるアルファベットと数字が入っている．また，マス目状に仕切られた盤面は，さらに太線でいくつかの部屋に分かれている．

図 1 にて例題とその解を示す．図 1 では，色で部屋を分けている．各部屋に 1 つ鏡を置く (斜線を引く) ことで，パズルを解く．鏡は，盤面の外にあるヒントから外枠に対して直角に入った光が，鏡で直角に反射し，もう 1 つの同じヒントにたどり着くように置く必要がある．ヒントに含まれる数字は，光がもう一方のヒントにたどり着くまでに，何回鏡で反射するかを表す．なお，光は必ず鏡で反射する．図 1 の例題の解説では，実際に光が反射してヒント同士をつないでいることを示している．

3. キンコンカンの解の存在判定が NP 完全であることの証明

キンコンカンの解の存在判定が，NP 完全問題であることを示す．併せて，キンコンカンを解くことが，NP 困難であることを示す．

キンコンカンは，答えが与えられると多項式時間以内に答えが正しいかどうか確かめることができるので，クラス NP である．そこで，任意の平面 3SAT が，キンコンカンに多項式時間帰着可能であることを示す．具体的には，任意の平面 3SAT が与えられたとき，多項式時間でキンコンカンに帰着する手法を示す．

任意の平面 3SAT は，入力ゲート，出力ゲート，ワイヤー，スプリッタ，NOT ゲート，AND ゲート，OR ゲートの組み合わせで表現できる．そこで，まず，各構成要素をキンコンカンに帰着する方法を示す．その後，これらの構成要素を使って，任意の平面 3SAT をキンコンカンに帰着する方法を示す．

True と False は，キンコンカンにおいて 2 行のマス目で表現する．上の行を光が通るときは 0，下の行を光が通るときは 1 であるとする．また，各ゲートは左から値が入力され，右から値を出力することとする．以降の図では，入力と出力部分は，0，1 で表現する．

入力ゲートを図 2 に示す．鏡を，上の行と下の行のどちらに置くかで，入力の値を True と False のどちらにするか決定する．このとき，A_n からの光は鏡を 1 つ経由して出力される．また，他の解法は存在しない．

出力ゲートを図 3 に示す．A_n+1 への光はこのゲートに来るまでに，n 個の鏡を経由し，このゲート内で 1 個の鏡を経由してもう 1 つのヒントにたどり着く．3SAT の解の存在判定は，出力ゲートが True の形になる解法が存在するか否かを判定することになるので，True となる形しか出力ゲートは存在しない．これに関しても，他の解法は存在しない．

ワイヤーに関しては, 上の行，下の行，どちらに光が通っているかで True と False を表現するため，特に用意する必要はない．

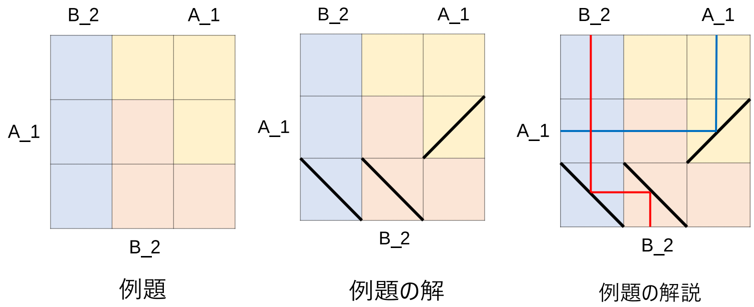

図 1　キンコンカンの例題とその解
Fig. 1　Example and solution of Kin-Kon-Kan

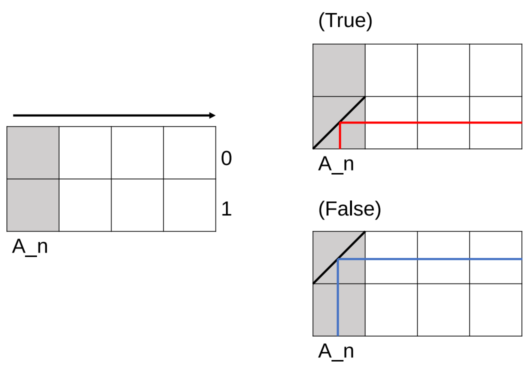

図 2　入力ゲート
Fig. 2　Input gate

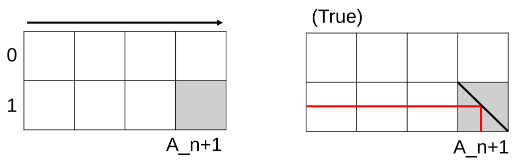

図 3　出力ゲート
Fig. 3　Output gate

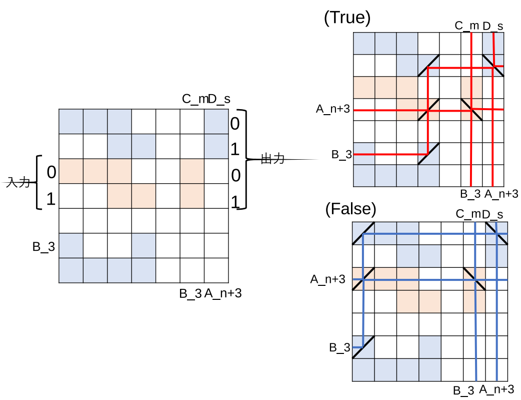

図 4　スプリッタ
Fig. 4　Splitter

スプリッタを図 4 に示す．図 4 のスプリッタは，入力箇所から入ってきた値を，2 か所に分けて伝搬させる．図 4 に示すように，入ってきた値と同じものが伝搬されている．

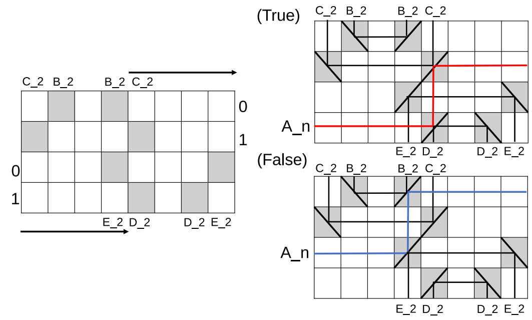

図 5　ワイヤーの位置を変える (上方向)
Fig. 5　Changing the position of the wire(up direction)

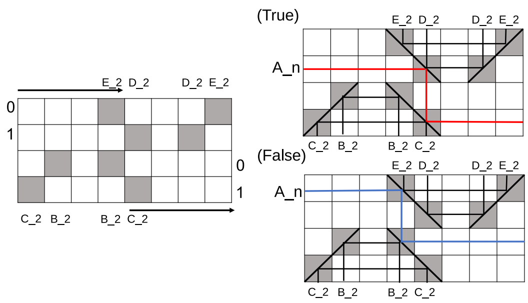

図 6　ワイヤーの位置を変える (下方向)
Fig. 6　Changing the position of the wire(down direction)

このとき，B_3 からの光は入力に関係なく図の位置から出力される光である．また，A_n+3 からの光はこのゲートに来るまでに，n 個の鏡を経由し，このゲート内で 3 個の鏡を経由してもう 1 つのヒントにたどり着く．実際に出力される C_m からの光と D_s からの光は，鏡を 1 つ経由して出力される．これに関しても，他の解法は存在しない．

ワイヤーの位置を上方向に変える方法を図 5，下方向に変える方法を図 6 に示す． 図 5，図 6 では，入力された値を，上または下に伝搬させている．図 5，図 6 では，2 行分の移動であるが，図の上 2 行と下 2 行の間に，任意の空行を入れることで，任意の行数分の位置を変えることができる．また，A_n からの光はこのゲート内で鏡を 2 つ経由し，最終的にもう 1 つのヒントにたどり着くまでに合計 n 個の鏡を経由する．図 5，図 6 の B_2，C_2，D_2，E_2 に

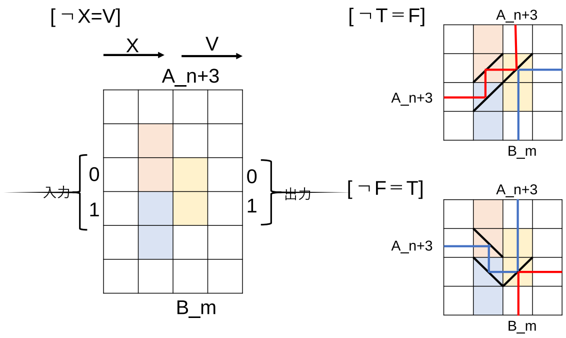

図 7 NOT ゲート
Fig. 7 NOT gate

関しては，鏡の向きの固定と，余計な鏡を置かれないために，ゲートに追加している．このゲートに関しても，他の解法は存在しない．

NOT ゲートを図 7 に示す．図 7 に示すとおり，入力された値の否定が出力される．また，A_n+3 からの光はこのゲートに来るまでに，n 個の鏡を経由し，このゲート内で 3 個の鏡を経由してもう 1 つのヒントにたどり着く．実際に出力される B_m からの光は鏡を 1 つ経由して出力される．これに関しても，他の解法は存在しない．

AND ゲートを図 8 に示す．このゲートは 2 入力 1 出力となり，2 つの入力がともに True のときのみ，True を出力する．図 8 に示すとおり，入力がともに True の時のみ True が出力され，それ以外では False が出力されている．また，A_n+5 からの光，B_m+5 からの光はこのゲートに来るまでに，それぞれ n 個，m 個の鏡を経由し，このゲート内で 5 個の鏡を経由してもう 1 つのヒントにたどり着く．出力となる D_s からの光は鏡を 1 つ経由して出力される．図 8 中の黒の線で表されている，E_2 などのヒントは，ワイヤーを曲げるときと同様に，鏡の向きの固定と，余計な鏡を置かれないために配置している．このゲートに関しても，他の解法は存在しない．

OR ゲートについては，ド・モルガンの法則により，AND ゲートと NOT ゲートを利用することで表すことができるので省略する．

次に，構成したゲートを用いて，任意の平面 3SAT をキンコンカンに帰着させる方法を示す．基本的なアイデアは，以下のようになる．また，図 9 に，置き換えのイメージを示す．

まず，図 9 の左の回路図のように，平面 3SAT を平面回路として実現する．このとき，各ゲートは左から入力を受け取り，右から出力されるようにする．また，ゲートやスプリッタは，列方向に重ならないように設定する．これは，キンコンカンに置き換えたとき，上下に光が出力されるためである．

そして，図 9 の右のように，各ゲートをキンコンカンに置き換える．図 9 の右では，ゲートがある部分は，青または赤で示している．

ゲートがない部分は，大きい 1 つの部屋とみなされる．1 行 1 列目のマスの，左と上にヒントを置くことで，一番左上に鏡が置かれるようにする．これにより，予定外の部分に鏡が置かれることを防ぐ．

最後に，各ヒントの記号と値を調整する．記号と n や m 等の変数の値を，前後のゲートによって決定する．例えば，AND ゲートの後に NOT ゲートがあるとする．このとき，AND ゲートの図 8 の D_s は A_4 に，NOT ゲートの図 7 の A_n+3 は A_4 となる．

帰着の具体的な手順を以下に示す．

(1) 帰着させたい平面 3SAT を平面回路図として表現する．このとき，各ゲート同士が列方向に重なり合わないように設定する．
(2) その回路図が十分入りきる大きさの格子状の問題を用意する．
(3) 平面回路図の各ゲートに対応する，キンコンカンで構成したゲートを同じ場所に，同じように配置する．このとき，問題の 1 行目には何も配置しない．
(4) 回路に関係なく，部屋になっていないマス目に関しては，それ全体を大きな部屋とする．
(5) 全体の部屋に鏡を配置するために，1 行 1 列目のマスの左と上に，ヒントを配置する．このとき，鏡の反射回数は 1 回とする．

以上のように，任意の平面 3SAT はキンコンカンに帰着することができる．また，この帰着は多項式時間内に行うことができる．キンコンカンの解の存在判定はクラス NP であり，かつ任意の平面 3SAT はキンコンカンに多項式時間帰着可能であるため，キンコンカンの解の存在判定は NP 完全である．また，キンコンカンの解の発見は，NP 困難である．つまり，キンコンカンに解がある場合には，平面 3SAT にも解が存在する．このとき，キンコンカンの入力ゲートの鏡の位置が，平面 3SAT の各リテラルの値となる．

具体的な帰着の例を示す．$z = x_1 \wedge \neg x_2$ を上記の手順に沿ってキンコンカンに帰着させる．まず，この式を平面回路図として図 10 のように表現する．このとき，NOT ゲート，AND ゲートは列方向に重なり合わない．そのあと，平面回路図が十分入りきる大きさの問題を用意し，各ゲートに対応する，キンコンカンで構成したゲートを，図 11 のように同じ場所に配置する．このとき，1 行目には平面回路図のゲートは置かない．1 行 1 列目のマスの左と上に，1 回鏡を反射してたどり着くヒントを配置し，予定外の部分に鏡が置かれることを防ぐ．この問題を解くような入力が，$z = x_1 \wedge \neg x_2$ の解となる．

4. おわりに

本研究では，キンコンカンの解の存在判定が NP 完全であることを証明した．具体的には，任意の平面 3SAT を構

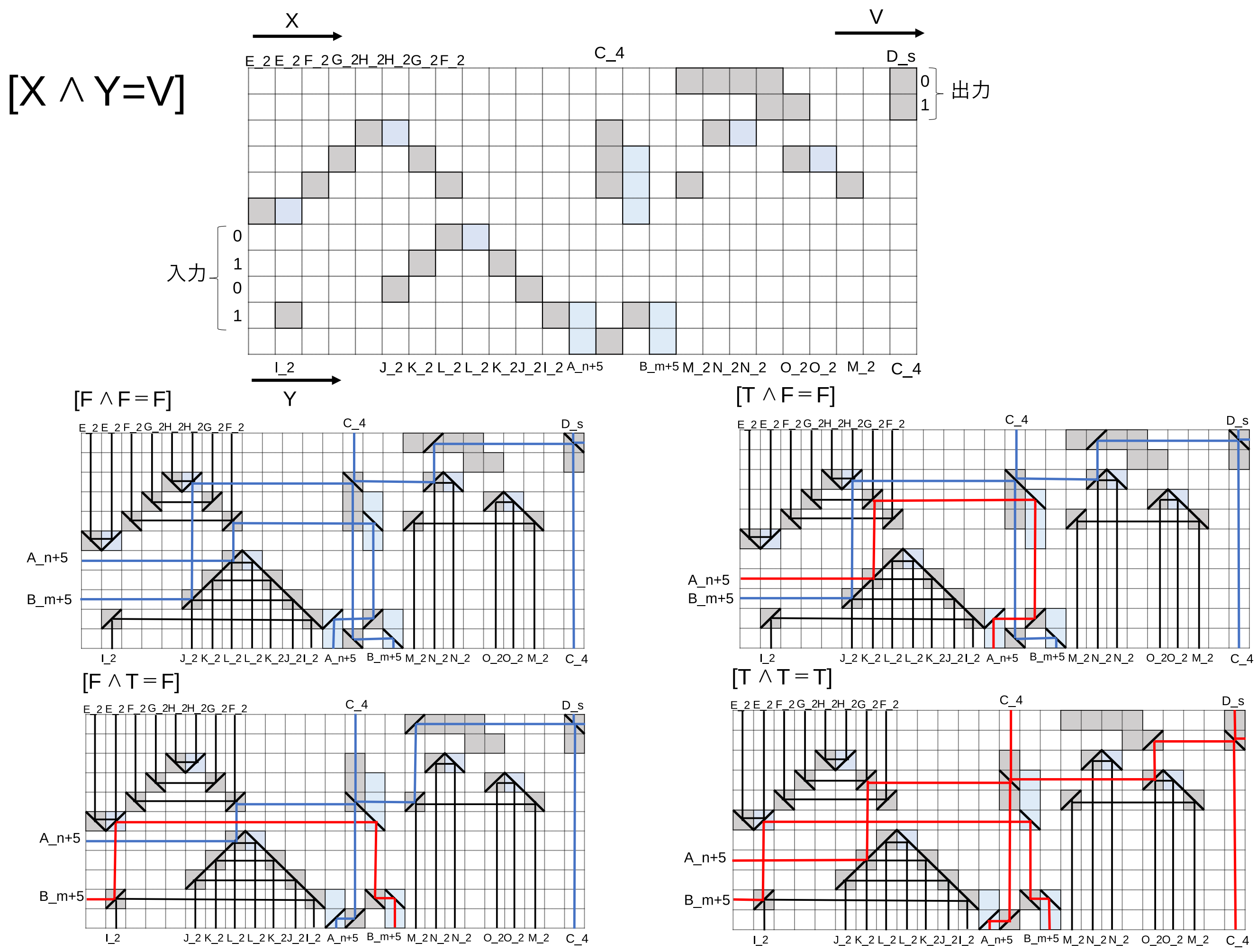

図 8　AND ゲート
Fig. 8　AND gate

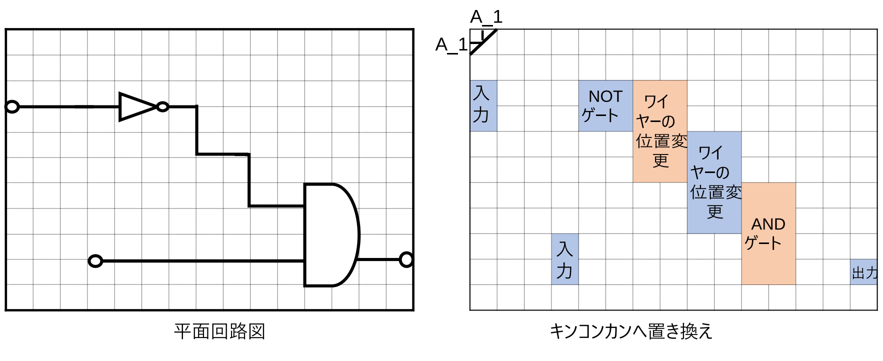

図 9　置き換えのイメージ
Fig. 9　Image of replacement

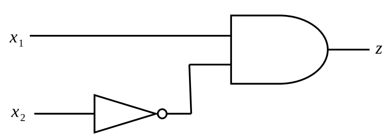

図 10　平面回路図
Fig. 10　Planar circuit diagram

成する各ゲートをキンコンカンに帰着する方法と，これらのゲートを使って任意の平面 3SAT をキンコンカンに多項式時間内で帰着させる手順を示した．

今後の課題としては，キンコンカンをできるだけ高速に解く手法の開発が挙げられる．その方法としては，他のパズルの高速解法を応用することや，量子計算機を用いることなどが考えられる．特に，量子アニーリングで解くこと

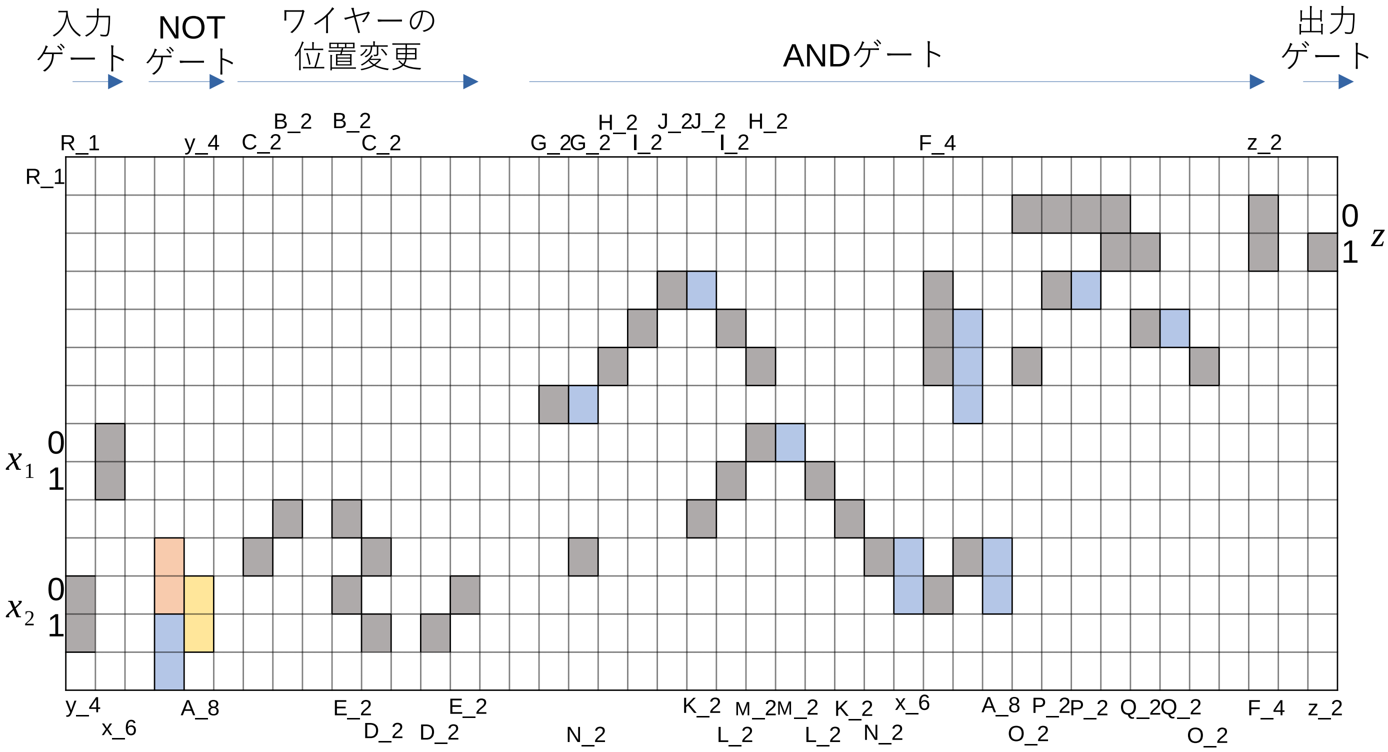

図 11 キンコンカンに帰着

Fig. 11 Figure reduced to Kin-Kon-Kan

を考える場合，キンコンカンを他の NP 完全問題に帰着することを検討する必要がある [1,13].

参考文献

[1] Andrew, L.: Ising formulations of many NP problems, *forntiers in PHYSICS* (2014).

[2] Iwamoto, C.: Yosenabe is NP-complete, *Journal of Information Processing*, Vol. 22, No. 1, pp. 40–43 (online), DOI: 10.2197/ipsjjip.22.40 (2014).

[3] Iwamoto, C., Haruishi, M. and Ibusuki, T.: Herugolf and Makaro are NP-complete, *9th International Conference on Fun with Algorithms (FUN 2018)* (Ito, H., Leonardi, S., Pagli, L. and Prencipe, G., eds.), Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), Vol. 100, Dagstuhl, Germany, Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, pp. 24:1–24:11 (online), DOI: 10.4230/LIPIcs.FUN.2018.24 (2018).

[4] Iwamoto, C. and Ibusuki, T.: Dosun-Fuwari is NP-complete, *Journal of Information Processing*, Vol. 26, pp. 358–361 (online), DOI: 10.2197/ipsjjip.26.358 (2018).

[5] Takenaga, Y., Aoyagi, S., Iwata, S. and Kasai, T.: Shikaku and Ripple Effect are NP-Complete, *Congressus Numerantium*, Vol. 216, pp. 119–127 (2013).

[6] 株式会社ニコリ：キンコンカン，`https://www.nikoli.co.jp/ja/puzzles/kinkonkan/`[アクセス 2022 年 08 月 08 日].

[7] 座間翔，篠埜功：初期配置が指定された場合における高難易度数独問題の自動生成手法の提案および実装，研究報告ゲーム情報学 (GI)，Vol. 2017-GI-37, No. 7, pp. 1–12 (2017).

[8] 小河遥，井本智明，武藤伸明：数独エントロピーを用いた数独ソルバーの高速化，第 80 回全国大会講演論文集，Vol. 2018, No. 1, pp. 57–58 (2018).

[9] 小場隆行，中所武司：数独の難易度判定アプリケーションの提案と評価，研究報告ゲーム情報学 (GI)，Vol. 2011-GI-25, No. 8, pp. 1–6 (2011).

[10] 小谷善行：虫食い算の非探索的解決と問題作成への応用，研究報告ゲーム情報学 (GI)，Vol. 2009-GI-22, No. 8, pp. 1–8 (2009).

[11] 西野哲朗：中国人郵便配達問題＝コンピュータサイエンス最大の難関，講談社 (1999).

[12] 石濱友裕，久野誉人：整数計画法を用いた高速な Slitherlink パズルの解法，情報処理学会論文誌，Vol. 54, No. 8, pp. 2103–2108 (2013).

[13] 田中宗：量子アニーリング等イジングマシンの現状と展望, DA シンポジウム 2021 論文集, Vol. 2021, pp. 128–133 (2021).

[14] 田中雄一郎, 高橋篤司：領域分割を用いた CHORD-LAST 法に基づくナンバーリンク解法，DA シンポジウム 2014 論文集，Vol. 2014, pp. 221–226 (2014).

[15] 藤家一夢，安細勉：ヘルゴルフパズルの情報セキュリティ技術への応用，研究報告数理モデル化と問題解決 (MPS)，Vol. 2021-MPS-135, No. 8, pp. 1–2 (2021).

[16] 八登崇之：別解問題の計算論的複雑さと完全性及びパズルゲームへの応用，東京大学修士論文 (2003).

[17] 飛田翔哉，安細勉：ぬりかべパズルの NP 完全性を利用した暗号技術への応用，技術報告 21，茨城工業高等専門学校, 茨城工業高等専門学校 (2020).

[18] 芳賀陸雄，安細勉：「橋をかけろ」を用いた電子認証の提案，研究報告数理モデル化と問題解決 (MPS)，Vol. 2020-MPS-131, No. 24, pp. 1–2 (2020).

[19] 濱田信佑，西野順二：パズルゲームの個人対応難易度評価，研究報告ゲーム情報学 (GI)，Vol. 2017-GI-37, No. 9, pp. 1–5 (2017).