

ヒト胚子発生の形態解析に向けた 幾何変換場のスペクトル分解

松山 友騎¹ 船富 卓哉¹ 宇都宮 夏子² 山田 重人² 藤村 友貴¹ 櫛田 貴弘¹ 向川 康博¹

概要: 本研究では、ヒト胚子発生の形態解析を目的として、発生過程における変形を対象としたスペクトル分解の定式化を提案する。変形は3次元メッシュ上で滑らかに変化する幾何変換の場として表現できるが、幾何変換は加法で閉じていないため、従来のグラフフーリエ変換を直接適用することはできない。そこで本稿では、非可換性を考慮した乗法による定式化を導入することでグラフフーリエ変換を拡張し、幾何変換場をさまざまなスケールの変形成分へ分解する手法について述べる。また、スパース正則化を加えて最適化することで、重要な変形成分のみを抽出する手法についても述べる。実験では、提案手法を用いてヒト胚子の変形を分解した成分の解釈を試みた。

1. はじめに

ヒトの形態形成過程の理解は発生学における重要な課題である。妊娠3-9週の発生初期を胚子期と呼び、様々な臓器が分化する器官形成期であるだけでなく、3次元に劇的な変形が生じることで知られている [1]。また、胚子期は外的要因への感受性が強く、様々な先天異常を生じる可能性がある [2], [3]。異常発生のプロセスの解明に向けて、正常な発生を3次元的に理解することを目的とした様々な研究が行われている。それらは主に、微細な胚の画像取得により形態形成を可視化するもので、MR顕微鏡によるもの [4]、位相X線CTによるもの [5] などが挙げられる。どちらも3次元的な形態変化をイメージングによって詳細に観察しているが、複雑な変形の解釈には至っていない。

この複雑な変形を解釈するうえで、マルチスケールな変形へ分解することがアプローチの一つとして考えられる。Huangら [6] はほぼ剛体とみなせるパーツから構成された3次元メッシュのアニメーション系列を対象として、メッシュ間の変形を少数かつ局所的に定義された変形の重み付き和として表現し、最適化によりこれらを求めている。しかしながら、ヒト胚子の変形は全身で生じる変形も含まれるため、局所的な変形へ分解する手法のみでは不十分である。

そのため本研究では、ヒト胚子の発生前後における複雑な変形に対して、マルチスケールな変形成分へ分解できる

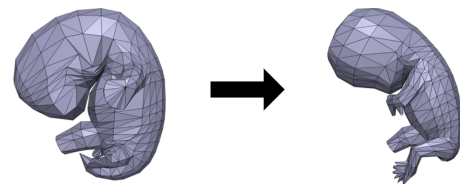


図1: 解析の対象とするCS17(左)とCS23(右)のモデル

スペクトル分解手法の開発を提案する。

以降、本稿における章構成は次の通りである。2章では本論文で扱う胚子モデルについて、3章ではグラフフーリエ変換と扱われる基底について述べる。そして、4章で提案するスペクトル分解手法および重要な変形成分の抽出について述べる。これにより提案手法から得られた結果を5章に示し、分解した変形の評価を行う。

2. 問題設定

本研究では、ヒト胚子の発生過程における変形を解析の対象とする。京都コレクション [5] には正常体・異常体も含め、さまざまな発生段階にあるヒト胚標本が収蔵されている。また [7] では発生学に関する教材の開発を目的とし、胚子期におけるCarnegie stage (CS) 13-23のそれぞれについて、個体差などを除いた標準的な形態を、デザイナーが専門家と相談し作成した3次元メッシュが存在する。発生過程における変形を示すため、異なる発生段階にあるモデルの頂点間で対応が取れており、共通の三角メッシュ構造を持つよう構成されている。この時、モデル間の変形は対応する頂点間での位置変化として記述することができる。

¹ 奈良先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科
〒630-0192 奈良県生駒市高山町 8916-5

² 京都大学 大学院医学研究科
〒606-8501 京都府京都市左京区吉田近衛町

本研究では、これをメッシュ上で定義された信号とみなしてスペクトル解析を行うことによって、変形の成分分解を試みる。本稿では図 1 に示す、CS17 から CS23 への変形を解析対象とする。

現段階では人手で作成された 3 次元メッシュ系列を対象としているため、頂点間の対応関係が既知であることやメッシュ構造が共通であることを仮定しているが、仮に発生段階によって異なる頂点数やメッシュ構造を持つ場合にも、例えば [8] のような形状解析手法を用いることによりメッシュ間の対応付けが得られると考えられる。

3. 3次元メッシュ上の信号に対するスペクトル解析

信号処理は、音声や画像といった信号の圧縮・伝送・保存を目的として、フーリエ変換に代表されるようなスペクトル解析等を行う技術である。一般的な信号処理では、信号が時間的あるいは空間的に均等にサンプリングされていることを前提とする。これに対し、グラフは一般に均等でないため、その頂点上で定義された信号に対して従来の信号処理技術はそのまま適用できない。このような不均等にサンプリングされた信号に対しては、信号の構造を陽に指定した上で処理を行う、グラフ信号処理 [9] が用いられる。ここでは、グラフ頂点上で定義された信号に対する解析手法の基礎理論について述べる。

3.1 グラフラプラシアンと固有ベクトル

有限無向グラフは $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ と表現できる。 $v \in \mathcal{V}$ は頂点、 $e \in \mathcal{E}$ は辺である。このメッシュにおける頂点数は $|\mathcal{V}| = N$ である。頂点番号を i 、 i に隣接する頂点番号を $j \in N(i)$ と表記する。グラフ信号を $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ と定めるとき、 \mathbf{f} に対するグラフラプラシアンは次のように表現される [10]。

$$(\mathbf{L}\mathbf{f})_i = \sum_{j \in N(i)} w_{ij}(f_i - f_j) \quad (1)$$

ここで、 w_{ij} は 2 つの頂点 i, j を結ぶ辺 e_{ij} に定義された重みである。式 (1) を行列形式によって表記すると、グラフラプラシアン \mathbf{L} は隣接行列 \mathbf{A} と次数行列 \mathbf{D} を用いて以下で表される。

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} - \mathbf{D} \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & e_{ij} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left(\sum_j w_{1j}, \dots, \sum_j w_{Nj} \right) \quad (4)$$

このとき、グラフラプラシアン \mathbf{L} も実対称行列となる。 \mathbf{L} の固有値を $\{\lambda_l\}$ 、固有ベクトルを $\{\mathbf{u}_l\}$ とする ($l = 0, 1, \dots, N-1$) と、固有値問題は次式で示すことができる。

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_l = \lambda_l \mathbf{u}_l \quad (5)$$

また、 \mathbf{L} は実対称行列であるため、固有ベクトル・固有値により構成される行列 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{N-1}]$ 、 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1})$ によって以下のように表される。

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top \quad (6)$$

3.2 グラフフーリエ変換 [11]

信号 $f(t)$ に対するフーリエ変換は以下のように定義される。

$$\hat{f}(\xi) := \langle f, e^{j2\pi\xi t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-j2\pi\xi t} dt \quad (7)$$

上式における複素指数関数は、以下に示される 1 次元のラプラス作用素の固有関数である。

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} = (2\pi\xi)^2 e^{j2\pi\xi t} \quad (8)$$

つまり、フーリエ変換はラプラス作用素の固有関数による $f(t)$ の展開である。この信号処理におけるフーリエ変換と同様に、グラフ上の信号 \mathbf{f} に対するグラフフーリエ変換は、スペクトル基底 $e^{j2\pi\xi t}$ として固有ベクトル $\{\mathbf{u}_l\}$ を用いて、以下のように定義できる。

$$\hat{f}_l := \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_l \rangle = \sum_{i=1}^N f_i u_{li} \quad (9)$$

これにより、スペクトル基底に対応する成分がグラフスペクトル $\hat{\mathbf{f}} = \{\hat{f}_l\}$ として得られる。また、逆フーリエ変換は以下のように与えられる。

$$f_i = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l u_{li} \quad (10)$$

3.3 3次元メッシュへの適用

以上では、一般的なグラフに対するラプラシアンとフーリエ変換について述べた。本研究で扱う 3 次元メッシュもグラフとみなすことが可能であり、3 次元形状解析手法などにグラフラプラシアンが用いられている [12]。ここでは、3 次元メッシュをグラフとして扱う場合に用いられる Laplace-Beltrami 作用素の有限要素法を用いた離散化について述べる。

3 次元メッシュを構成する頂点、辺、三角形の集合を用い、メッシュを $\mathcal{M} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{T}\}$ と表記する。式 (1) の w_{ij} には、三角パッチに対する余接重みが用いられる [13]。

$$w_{ij} = \frac{1}{2} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \quad (11)$$

ここで α_{ij}, β_{ij} は e_{ij} を共有する 2 つの三角形の対になる角である。この重みを用いて得られるグラフラプラシアンの固有ベクトルは、メッシュ上でのスペクトル基底を表現する [14]。メッシュ上でのスペクトル基底について、周波数が低いものから 10 個を図 2 に例示する。図から、先頭

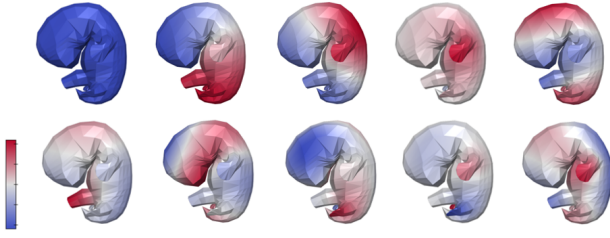


図 2: 3次元メッシュ上でのスペクトル基底 \mathbf{u}_l を図示したもの。図中のモデルは左上から右下にかけて \mathbf{u}_0 から \mathbf{u}_9 を示している。左にあるカラーバーはスペクトル基底で頂点に対応する値を示し、赤は正、青は負を示す。また、色が濃いほど正負に大きな値であることを示す。

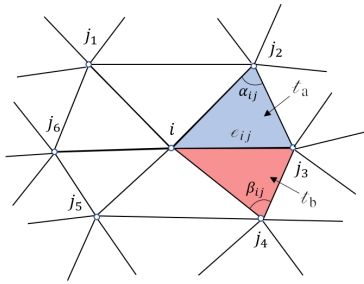


図 3: 三角メッシュに対する余接重み

が全体の形状を表す直流成分で最も低周波な成分、後の成分ほど詳細な形状を表す高周波な成分となっていることが分かる。

3.2 では、グラフフーリエ変換におけるグラフスペクトルは信号とスペクトル基底の内積で得られた。ただし、それは \mathbf{L} が半正定値対称行列の場合であり、有限要素法を用いる場合は対称行列ではなくなるため、式 (2) では直交性が失われ [15]、単なる内積ではグラフスペクトルを得ることができない。

$$\mathbf{B} = \{B_{ij}\} = \begin{cases} \left(\sum_{t \in t_i^\Delta} \text{area}(t) \right) / 6 & i = j \\ (\text{area}(t_a) + \text{area}(t_b)) / 12 & e_{ij} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

t_a と t_b は e_{ij} を共有する三角形であり、 $t_i^\Delta = \{t \ni v_i\} \subset \mathcal{T}$ としたときの t の面積を $\text{area}(t)$ としている (図 3)。よって、Laplace-Beltrami 作用素 L_b は次式となる。

$$(\mathbf{L}_b \mathbf{f})_i = -B_{ij}^{-1} \sum_{j \in N(i)} w_{ij} (f_i - f_j) \quad (13)$$

このとき、信号 \mathbf{f} とスペクトル基底 \mathbf{u}_l の内積は以下のように定義される。

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_l \rangle_B = \mathbf{f}^T \mathbf{B} \mathbf{u}_l \quad (14)$$

3.4 3次元メッシュ上での信号のスペクトル分解

3次元メッシュに対するグラフフーリエ変換及び逆グラ

フーリエ変換は式 (8)、式 (9) を用いて次式で表すことができる。

$$f_l^{gs} = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N f_i^{in} B_{lm} u_{mi} \quad (15)$$

$$f_i^{out} = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{h}_l f_l^{gs} u_{il} \quad (16)$$

ここで、 $\hat{h}_l \in \mathbb{R}$ はフィルタ関数、 $f_l^{gs} \in \mathbb{R}$ は式 (14) で得られるグラフスペクトルである。各周波数に対応する要素以外を 0 とすることで、信号のグラフスペクトルを抽出できる。

4. 変形の成分分解

3章で述べたスペクトル解析手法を用い、発生過程で生じる変形の成分分解を試みる。ここでは、3次元メッシュ上で定義される信号として、モデルの対から算出される変形場である変位ベクトル場および幾何変換場について述べる。その後、幾何変換場に対して式 (15)、式 (16) を直接適用する課題を挙げ、変形場の性質を考慮したスペクトル分解手法を述べる。また、幾何変換場のスペクトル解析の最適化におけるスパース正則化および損失関数についても述べる。

4.1 変位ベクトル場

3次元空間における変形前の頂点座標を $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3$ 、変形後の頂点座標を $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3$ とすると、変形による変位ベクトルは次式となる。

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \quad (17)$$

3章では、グラフ上で定義される信号は各頂点で実数値 \mathbb{R} として定義されていたが、変位ベクトルの各次元について独立な信号とみなし、それぞれに式 (15) を用いてグラフスペクトルを求めることでスペクトル解析を行う。

$$\mathcal{F}[\mathbf{V}]_l = \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^N \mathbf{v}_i B_{lm} u_{mi} \in \mathbb{R}^3 \quad (18)$$

ここで $\mathcal{F}[\cdot]_l$ はグラフフーリエ変換による l 番目のグラフスペクトルを表し、 \mathbf{V} は \mathbf{v}_i を並べた行列とする。すると、 l 番目の周波数に対応するスペクトル成分は以下によって得られる。

$$\mathbf{v}_{i,l} = \mathcal{F}[\mathbf{V}]_l u_{il} \quad (19)$$

4.2 幾何変換場

変位ベクトル場による変形の表現は単純すぎて、回転を伴うような変形をうまく表現することができない。そこで本研究では、回転も含む表現方法として各頂点の位置変化を幾何変換で表現する。幾何変換として、等角性を保存する相似変換を用い、各頂点とそれに隣接する頂点を用いてこれを推定する。各頂点で異なる相似変換が定義され、こ

れを幾何変換場と呼ぶことにする。

各頂点の座標を同次座標系によって表現すれば、相似変換 $\mathbf{Q}_i \in \text{Sim}(3)$ は 4×4 行列として記述される回転 \mathbf{R} 、並進 \mathbf{T} 、スケーリング \mathbf{S} の積として表現される。これらのパラメータは変形前後での 1 対の頂点 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ だけでは定まらないため、隣接頂点集合 $\{\mathbf{a}_j\}, \{\mathbf{b}_j\}$ も用いてこれらのパラメータを定める。この時、着目する頂点对 $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ については一致し、隣接頂点集合 $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ の残差二乗和 $e^2(\mathbf{R}, \mathbf{S})$ が最小となるよう \mathbf{Q}_i を求める。

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{T}_{\mathbf{b}_i} \mathbf{SRT}_{\mathbf{a}_i}^{-1} \quad (20)$$

$$e^2(\mathbf{R}, \mathbf{S}) = \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \|\tilde{\mathbf{b}}_j - \mathbf{Q}_i \tilde{\mathbf{a}}_j\|^2 \quad (21)$$

なお、 \mathbf{T} はベクトル \cdot の並進、 $\tilde{\cdot}$ は同次座標を表し、この解は解析的に得られる [16]。

4.2.1 スペクトル分解における課題

以上で得られる各頂点での相似変換 $\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_N]$ に対して、グラフスペクトルを求める。しかし、相似変換に対して式 (15)、式 (16) を直接適用することはできない。式 (16) ではグラフスペクトルとスペクトル基底の線形和として周波数フィルタリングを定式化しているが、相似変換 \mathbf{Q} のスカラー倍は一般的には相似変換とならず、線形和によって得られるものは相似変換とならない*1。

これは相似変換に限らず、一般の幾何変換が乗法では閉じているが、加法では閉じていないことによる。加えて、グラフスペクトルとスペクトル基底の線形和では、幾何変換の性質である非可換性を考慮できない。

4.2.2 乗法による幾何変換場のスペクトル合成

そこで、各周波数における相似変換を加法でなく、乗法による定式化を行う。各頂点での相似変換 \mathbf{Q}_i は、各スペクトル基底に応じた成分の乗算により復元できると考え、まずはこれを定式化する。その後、復元結果が $\hat{\mathbf{Q}}_i$ となるよう、グラフスペクトルを最適化により求める。

先述の通り、幾何変換には非可換性があるため、成分を乗算する順序を定める。今回は、局所的な変換から大域的な変換へ順に (l について降順に) 頂点座標に乗算することとした。この方法であれば、3 次元モデルの位置ずれが最後の直流成分 ($l = 0$) によって吸収され、他のスペクトル成分に影響を与えないと考えられる。以上から、乗法によるスペクトル合成は、グラフスペクトル $c_l \in \text{Sim}(3)$ を用いて次のように定式化する。

$$c_0^{u_{i0}} \cdot c_1^{u_{i1}} \cdots c_{(N-1)}^{u_{i(N-1)}} \quad (22)$$

なお、指数写像、対数写像を用いて $c_l^{u_{il}} = \text{Exp}(u_{il} \text{Log}_I(c_l))$ としている。

4.2.3 スペクトル基底の正規化

幾何変換を対象としたスペクトル合成の定式化では、ス

*1 例えば \mathbf{Q}_i の第 4 行は $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ でなくてはならない。

ベクトル基底の大きさにも配慮が必要である。それは、回転を含む幾何変換では位相多義性によって $(\mathbf{Q}_i^k)^{\frac{1}{k}} = \mathbf{Q}_i$ が一般に成り立たないことである*2。これは $k \gg 1$ において顕著となるが、 $k \leq 1$ では問題は起こらない。

3 次元メッシュから得られたスペクトル基底の絶対値が小さい場合、いかなるグラフスペクトルを持ってきても、スペクトル成分における回転変換はほとんど消失してしまう。そこで、各スペクトル成分が十分な大きさの回転変換でも表現できるよう、スペクトル基底を予め正規化する。具体的には、スペクトル基底の最大値が十分な大きさを持つよう、重み $w_l = \frac{1}{\|\mathbf{u}_l\|_\infty}$ を用いて式を修正する。

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = c_0^{w_0 u_{i0}} \cdot c_1^{w_1 u_{i1}} \cdots c_{(N-1)}^{w_{(N-1)} u_{i(N-1)}} \quad (23)$$

4.2.4 幾何変換場のスペクトル分解

スペクトル分解では、所与のスペクトル基底 \mathbf{u}_l と \mathbf{Q} に対し、各頂点の式 (23) の結果が $\hat{\mathbf{Q}}_i$ となるグラフスペクトル c_l を最適化によって求める。最適化において最小化する関数は対数写像を用いて次式のように定式化する。

$$\{\hat{c}_l\} = \arg \min_{c_l \in \text{Sim}(3)} \frac{1}{N} \sum_i \|\text{Log}_{\mathbf{Q}_i} \hat{\mathbf{Q}}_i\|_F \quad (24)$$

尚、幾何変換に対するノルム $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルムである。

また、相似変換は回転を含むため、変換を適用する座標によって変形自体の大きさが異なる。この座標による差異を考慮するため、変形前の頂点座標 \mathbf{a}_j へ相似変換を適用した際の座標と、変形後の頂点座標 \mathbf{b}_j の差が小さくなるよう、 c_l を推定する。式 (24) に座標を用いた相似変換の差異を評価する項を追加する。

$$\{\hat{c}_l\} = \arg \min_{c_l \in \text{Sim}(3)} \frac{1}{N} \sum_i \left(\|\text{Log}_{\mathbf{Q}_i} \hat{\mathbf{Q}}_i\|_F + \|\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{a}_i\|_2 \right) \quad (25)$$

4.2.5 スパース正則化

式 (25) により得られるグラフスペクトルは、スペクトル基底の数、すなわち頂点数の数だけある。そのため、3 次元メッシュの頂点数が多い場合、どの周波数成分に注目すべきか判断が困難となる。また、周波数成分の中には、元の変形へ大きく寄与しないものも存在すると考えられる。そのような不要な成分を抑制するため、スパース正則化を行う。

成分に対するスパース性を仮定する際、式 (23) に照らせば、スペクトル基底に定義した重み w_l をスパースにするのがよい。したがって、スパース係数を γ としたとき、 c_l と w_l について以下を最適化する問題となる。

*2 例：回転 90° を 3 倍した後、 $\frac{1}{3}$ 倍しても 90° とはならない。これは、 $90^\circ \times 3 = 270^\circ = -90^\circ$ のように逆回転の結果が得られてしまい、 $-90^\circ \times \frac{1}{3} = -30^\circ$ は元の回転 90° より小さくなる。

$$\{\hat{c}_l\} = \arg \min_{c_l \in \text{Sim}(3), w_l \in \mathbb{R}} \frac{1}{N} \sum_i \left(\|\text{Log}_{\mathbf{Q}_i} \hat{\mathbf{Q}}_i\|_F + \|\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{a}_i\|_2 \right) + \gamma \sum_l \|w_l\|_1 \quad (26)$$

4.3 変形場のパワースペクトル

変形場のスペクトル分解結果の質的評価には、得られたさまざまな周波数成分から主要なものを選定することが重要である。一般のスペクトル解析においては、各スペクトル成分の強度を表すパワースペクトルが重要な指標の1つである。これに対し、相似変換に対しては、その強度の尺度が自明ではない。そこで本手法では、各周波数成分に対し、変形による各頂点の軌跡長によって強度を評価することとした。

求めた各スペクトル成分が持つ各頂点での相似変換が

$$\hat{\mathbf{Q}}_{i,l} = \hat{c}_l^{u_i} \mathbf{a}_i \quad (27)$$

と表せ、その軌跡は曲線となる。ここでは折れ線近似によってこの長さを評価する。具体的には変形による軌跡の内分点 $\mathbf{a}_{i,l,p}$ ($p = 0, \dots, P$) を求めることで P 本の折れ線として近似し、内分点間のユークリッド距離の和として、軌跡の長さを求める。

$$D_{i,l} = \sum_{p=1}^P \|\mathbf{a}_{i,l,p} - \mathbf{a}_{i,l,p-1}\| \quad (28)$$

なお、内分点は相似変換行列に対する対数写像、指数写像を用いて以下のように算出する。

$$\mathbf{a}_{i,l,p} = \text{Exp}\left(\frac{p}{P} \text{Log}_i \hat{\mathbf{Q}}_{i,l}\right) \mathbf{a}_i \quad (29)$$

以上で、各スペクトル成分における各頂点の軌跡長が求められる。これを基にスペクトル成分の強度を評価する。ここでは、指標として最大値 MAX_l を用いることとする。

$$\text{MAX}_l = \max_i D_{i,l} \quad (30)$$

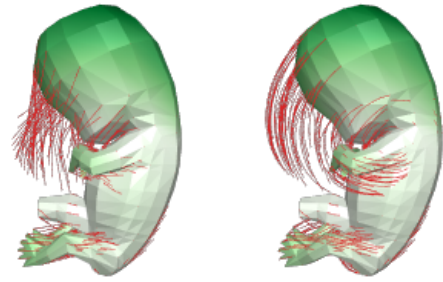
5. 実験

5.1 実験条件

2章で述べた CS17,23 の3次元メッシュを用いた実験を行った。これらの3次元メッシュ \mathcal{M} は頂点数 $N = 562$ 、辺数 $|\mathcal{E}| = 3,360$ 、三角形数 $|\mathcal{T}| = 1,120$ で構成されている。CS17の3次元メッシュに対して [17] の実装を用いてスペクトル基底を求めた。また、これらの間での変形場として、変位ベクトル場と幾何変換場を用いた場合の変形と各頂点の軌跡を図4に示す。

5.2 スペクトル基底に対応する各変形場の変形成分と評価

変形場をスペクトル分解した結果として、スペクトル基底 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ に対応する変位ベクトル場および幾何変換



(a) 変位ベクトル場 \mathbf{v}_i (b) 幾何変換場 \mathbf{Q}

図4: CS17 から 23 への変形の軌跡

場による変形成分を図5に示す。

\mathbf{u}_1 ではスペクトル基底の値が頭部から臀部に沿って変化している。それに対応するように、変位ベクトル場および幾何変換場による変形成分は胚子モデルの頭部と臀部の変形が大きい。各頂点の変形の大きさは各頂点における基底の値の大きさに対応していることが確認できる。

次に、変位ベクトル場と幾何変換場を信号としたときの変形成分の違いに注目する。変位ベクトル場による変形成分は $\mathbf{v}_{i,1}, \mathbf{v}_{i,2}, \mathbf{v}_{i,3}$ のいずれでも頂点の変形軌跡が平行となる。変形としては、 $\mathbf{v}_{i,1}$ では身体が縦長になり、 $\mathbf{v}_{i,2}$ では背部と腹部が薄くなるような変形が見られたが、スペクトル成分単体では表現できる変形の自由度に限りがあった。

一方、幾何変換場の場合、 $\hat{\mathbf{Q}}_{i,1}, \hat{\mathbf{Q}}_{i,2}, \hat{\mathbf{Q}}_{i,3}$ はそれぞれスケール変化、回転、変位がスペクトル基底に従って合成され、図5cに示すように多様な変形を表現する。 $\hat{\mathbf{Q}}_{i,1}$ では背部の湾曲が減弱するような変形と見れるように、スペクトル成分単体で解釈可能な変形が得られた。

5.3 幾何変換場のスパース正則化による変形成分の評価

幾何変換場のスペクトル分解における、スパース係数 γ を変化させた際の成分削減の効果、再構成した形状の残差を確認し、変形成分について検討する。

5.3.1 スパース正則化を利用した変形成分の削減

スパース正則化による効果を確認するため、式(26)におけるスパース係数 γ の値によるパワースペクトルの変化を調べた。パワースペクトルの分布を調べるため、各周波数成分の MAX を降順に並べて描いたグラフを図6に示す。この結果から γ を変化させることによって、有意な変形成分の数を制御できることが確認できた。

5.3.2 再構成した形状との残差

さまざまなスパース係数で再構成された変形を施した形状と CS23 との差を確認する。残差は CS17 へ相似変換 $\hat{\mathbf{Q}}$ を適用した形状と CS23 の形状の $\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{b}_i - \hat{\mathbf{Q}}_i \mathbf{a}_i\|^2}$ として算出する。

γ と RMSE の関係を図7に、そのうちのいくつかについて再構成した形状を図8に示す。 γ が 0.1 から 10 の間で

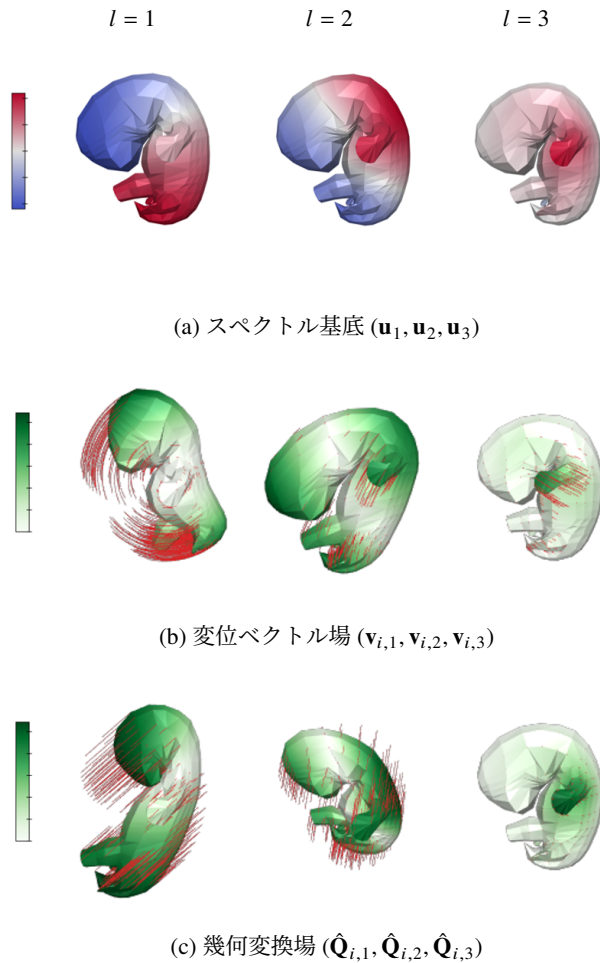


図 5: 変形のスペクトル成分

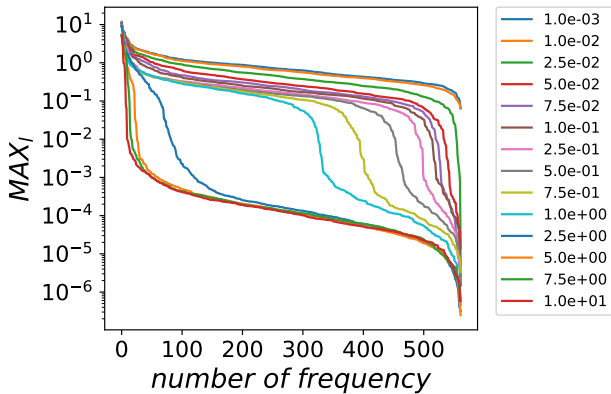


図 6: さまざまな γ に対して変化するパワースペクトル。縦軸は軌跡の長さ $D_{i,l}$, 線の色は γ の変化に対応している。

RMSE の値が大きく変化し, $\gamma = 1.0$ では CS23 の形状をある程度再現できているが, 10 ではほとんど変形していないことが視覚的にわかる。

5.3.3 スパース正則化の有無による主要な変形成分の評価

スパース正則化の有無による変形成分の結果を比較する。再構成した変形の誤差を抑えつつ, 成分の削減ができていると考えられる $\gamma = 1.0$ と, 正則化が効果を持たない

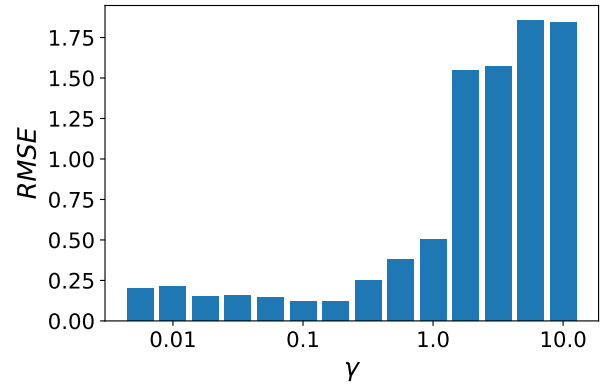


図 7: 再構成した形状との RMSE

$\gamma = 0$ の場合に注目する。

各変形成分について算出した MAX を図 9 に示す。この結果から, $\gamma = 1.0$ の場合, 全体的に MAX の値は小さくなり, 多くの成分が有意な変形を示していないことが確認できる。図中の各周波数のパワースペクトルに注目すると, MAX の値が大きい成分は主に低周波成分であるが, 高周波成分でも MAX の大きい成分が存在している。そこで, $l \leq \frac{2N}{3}$ を低周波な成分, $l > \frac{2N}{3}$ を高周波な成分として, それぞれ MAX が大きい変形成分について評価する。

$\gamma = 0$ における MAX が大きい低周波数の変形を図 10, 高周波数の変形を図 12, 同様に $\gamma = 1.0$ における低周波な成分の変形を図 11, 高周波な成分の変形を図 13 に示す。

$\gamma = 0$ で MAX が上位となった高・低周波な成分の変形に注目する。 $\hat{\mathbf{Q}}_{i,1}$ は背部の湾曲が減弱するような変形となっている。また, 高周波な成分の変形では $\hat{\mathbf{Q}}_{i,475}$ や $\hat{\mathbf{Q}}_{i,464}$ のように, 右手指が伸長する変形が表現できた。一方, 高周波な成分の変形で $\hat{\mathbf{Q}}_{i,481}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{i,405}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{i,410}$ では右上肢の形状が大きく角張るように過剰な変形が多く, 成分単体で着目する場合は解釈が難しいものがあった。

次に, $\gamma = 1.0$ で MAX が上位となった高・低周波な成分の変形に注目する。低周波な成分の変形では $\hat{\mathbf{Q}}_{i,3}$ は上肢が腹部を抱え込むように, 先端にある手が最終的に体の正面へ位置するような変形, $\hat{\mathbf{Q}}_{i,13}$ は下肢の先端が伸長し, 尾部が縮小する変形となった。また, 高周波な成分の変形では $\hat{\mathbf{Q}}_{i,497}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{i,473}$ がそれぞれ左右の足趾の伸長, $\hat{\mathbf{Q}}_{i,512}$, $\hat{\mathbf{Q}}_{i,513}$ がそれぞれ左右の手指の伸長を表現する。

以上のことから, スパース正則化が有効であるときは無効な場合に比べ解釈の容易な変形成分へ注目しやすく, 過剰な変形を抑制する効果が確認できた。

6. まとめと今後の課題

本研究では, ヒト胚子の発生過程を対象として, 3次元メッシュ上で滑らかに変化する幾何変換場と, それに対するスペクトル分解の定式化を提案した。

スペクトル分解としてグラフフーリエ変換を変形へ適用

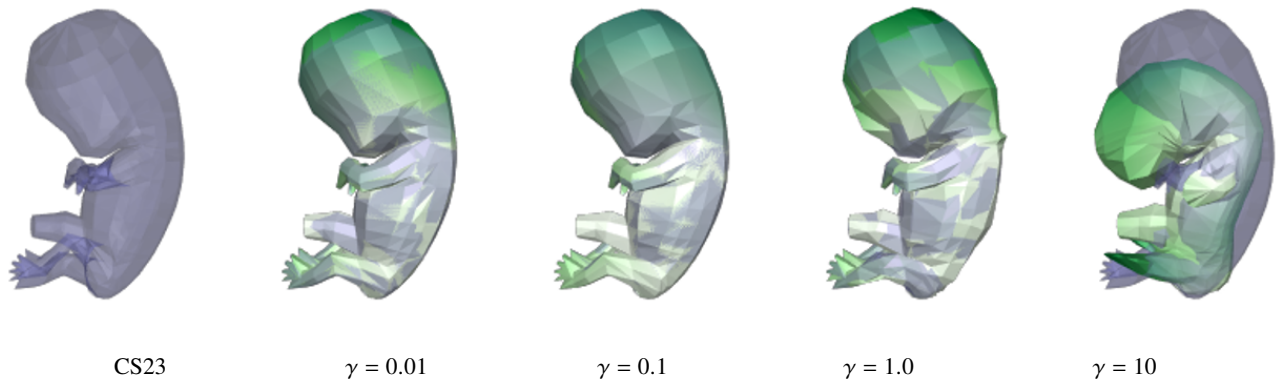


図 8: CS23 と再構成した形状

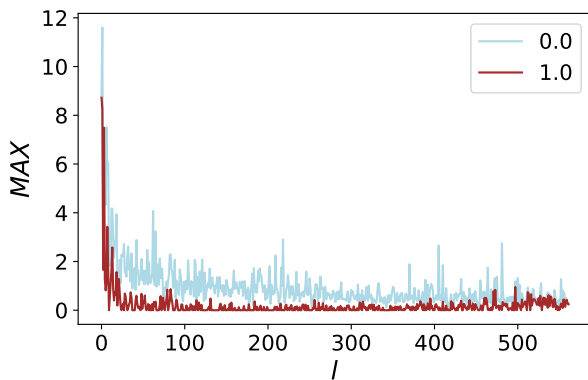


図 9: 各変形成分の MAX

する際、変位ベクトル場に対しては直接適用できるが、各スペクトル成分は直線的な変形のみでしかなく、成分単体では解釈が難しいことを確認した。

幾何変換場のスペクトル分解においては、幾何変換は加法によって閉じていないこと、非可換性であることを考慮した乗法による定式化を行った。さらに、注目すべき変形成分を抽出しやすくするため、スパース正則化を導入した。その結果、幾何変換場のスペクトル成分は回転やスケール変化を含んだ変形が得られ、単体でも十分解釈可能な変形が得られた。また、スパース正則化によって過剰な変形成分が抑制される効果が確認できた。

今後は、提案手法により分解された変形成分が、医学的見地から形態形成過程の解釈に有用であるか検討していく。

謝辞

本研究は JST さきがけ JPMJPR2025 の支援を受けたものである。

参考文献

[1] Drews, U., 塩田浩平 (訳) : 発生学アトラス, 文光堂 (1997).
[2] 新城 葵, 齊藤 篤, 高桑徹也, 山田重人, 本谷秀堅, 松添 博, 宮内翔子, 諸岡健一, 清水昭伸: ヒト胚子の解剖学的ランドマークの統計モデルの改良, 電子情報通信

学会技術報告書, Vol. 119, No. 399, pp. 29–30 (2020).
[3] SHIOTA, K.: Development and Intrauterine Fate of Normal and Abnormal Human Conceptuses, *Congenital Anomalies*, Vol. 31, No. 2, pp. 67–80 (online), DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1741-4520.1991.tb00360.x> (1991).
[4] Shiraishi, N., Katayama, A., Nakashima, T., Yamada, S., Uwabe, C., Kose, K. and Takakuwa, T.: Three-dimensional morphology of the human embryonic brain, *Data in Brief*, Vol. 4, pp. 116–118 (online), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dib.2015.05.001> (2015).
[5] Yamaguchi, Y. and Yamada, S.: The Kyoto Collection of Human Embryos and Fetuses: History and Recent Advancements in Modern Methods, *Cells Tissues Organs*, Vol. 205, No. 5-6, pp. 314–319 (2018).
[6] Huang, Z., Yao, J., Zhong, Z., Liu, Y. and Guo, X.: Sparse Localized Decomposition of Deformation Gradients, *Comput. Graph. Forum*, Vol. 33, No. 7, p. 239–248 (online), DOI: [10.1111/cgf.12492](https://doi.org/10.1111/cgf.12492) (2014).
[7] Yamada, S., Uwabe, C., Nakatsu-Komatsu, T., Minekura, Y., Iwakura, M., Motoki, T., Nishimiya, K., Iiyama, M., Kakusho, K., Minoh, M., Mizuta, S., Matsuda, T., Matsuda, Y., Haishi, T., Kose, K., Fujii, S. and Shiota, K.: Graphic and movie illustrations of human prenatal development and their application to embryological education based on the human embryo specimens in the Kyoto collection, *Developmental Dynamics*, Vol. 235, No. 2, pp. 468–477 (online), DOI: <https://doi.org/10.1002/dvdy.20647> (2006).
[8] Donati, N., Sharma, A. and Ovsjanikov, M.: Deep Geometric Functional Maps: Robust Feature Learning for Shape Correspondence, *2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pp. 8589–8598 (online), DOI: [10.1109/CVPR42600.2020.00862](https://doi.org/10.1109/CVPR42600.2020.00862) (2020).
[9] 田中雄一: グラフ信号処理のすゝめ, 電子情報通信学会基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, Vol. 8, No. 1, pp. 15–29 (2014).
[10] Zhang, H., Kaick, O. v. and Dyer, R.: Spectral Methods for Mesh Processing and Analysis, *Eurographics 2007 - State of the Art Reports* (Schmalstieg, D. and Bittner, J., eds.), The Eurographics Association, pp. 1–22 (online), DOI: [10.2312/egst.20071052](https://doi.org/10.2312/egst.20071052) (2007).
[11] Shuman, D. I., Narang, S. K., Frossard, P., Ortega, A. and Vandergheynst, P.: The emerging field of signal processing on graphs: Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains, *IEEE signal processing magazine*, Vol. 30, No. 3, pp. 83–98 (2013).
[12] Wang, Y. and Solomon, J.: Chapter 2 - Intrinsic and extrinsic operators for shape analysis, *Processing, Analyzing and Learning of Images, Shapes, and Forms: Part 2* (Kimmel, R. and Tai, X.-C., eds.), Handbook of Numerical

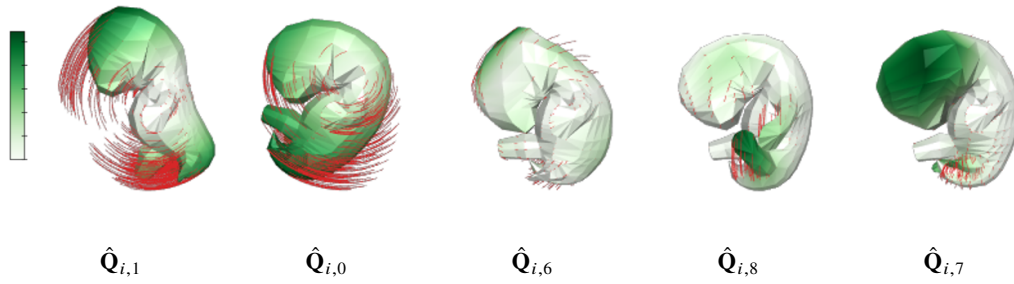


図 10: $\gamma = 0$ における MAX の大きい低周波 5 成分

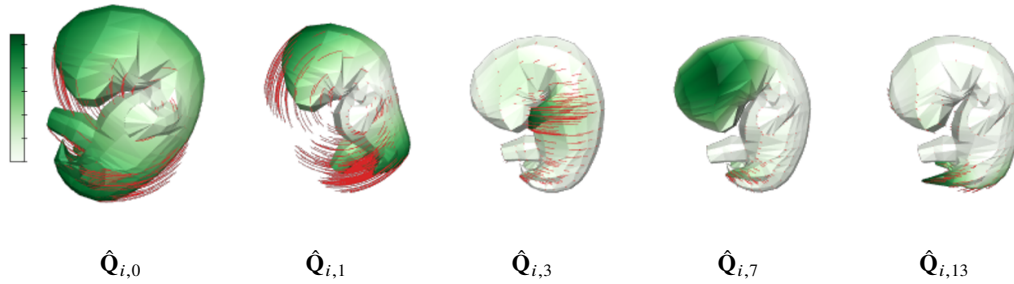


図 11: $\gamma = 1.0$ における MAX の大きい低周波 5 成分

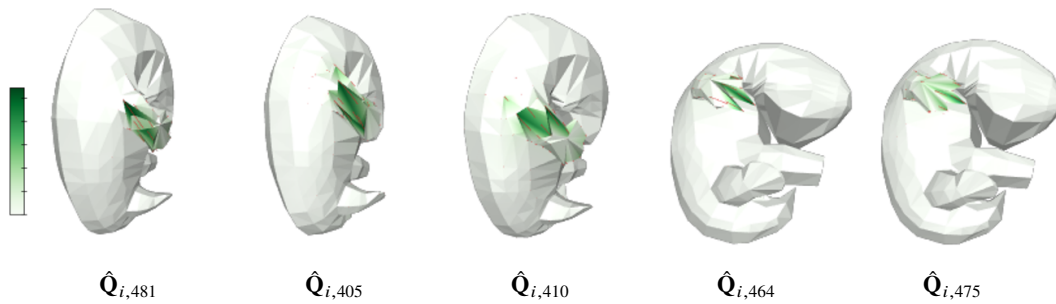


図 12: $\gamma = 0$ における MAX の大きい高周波 5 成分

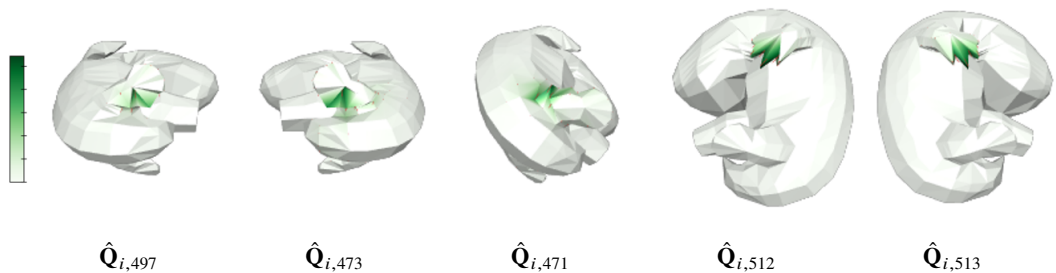


図 13: $\gamma = 1.0$ における MAX の大きい高周波 5 成分

- Analysis, Vol. 20, Elsevier, pp. 41–115 (online), DOI: <https://doi.org/10.1016/bs.hna.2019.08.003> (2019).
- [13] Pinkall, U. and Polthier, K.: Computing discrete minimal surfaces and their conjugates, *Experimental Mathematics*, Vol. 2, No. 1, pp. 15 – 36 (online), DOI: [em/1062620735](https://doi.org/10.1016/bs.hna.2019.08.003) (1993).
- [14] Dubrovina, A. and Kimmel, R.: Matching shapes by eigendecomposition of the laplace-beltrami operator (2010).
- [15] Graichen, U., Eichardt, R., Fiedler, P., Strohmeier, D., Zanow, F. and Hauelsen, J.: SPHARA—a generalized spatial Fourier analysis for multi-sensor systems with non-uniformly arranged sensors: application to EEG, *PLoS One*, Vol. 10, No. 4, p. e0121741 (2015).
- [16] Umeyama, S.: Least-squares estimation of transformation parameters between two point patterns, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, pp. 376–380 (online), DOI: [10.1109/34.88573](https://doi.org/10.1109/34.88573) (1991).
- [17] Graichen, U., Eichardt, R. and Hauelsen, J.: SpharaPy: A Python toolbox for spatial harmonic analysis of non-uniformly sampled data, *SoftwareX*, Vol. 10, p. 100289 (online), DOI: <https://doi.org/10.1016/j.softx.2019.100289> (2019).