表 1 ニムでの $\langle 6,8\rangle$ の後続局面

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	×	×	×	×	×	○	×	×	×
3	×	×	×	×	×	○	×	×	×
4	×	×	×	×	×	○	×	×	×
5	×	×	×	×	×	○	×	×	×
6	×	×	×	×	×	○	×	×	×
7	×	×	×	×	×	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 2 Wythoff のニムでの $\langle 6,8\rangle$ の後続局面

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	×	○	×	×	×
2	×	×	×	×	×	○	×	×	×
3	○	×	×	×	×	○	×	×	×
4	×	○	×	×	×	○	×	×	×
5	×	×	○	×	×	○	×	×	×
6	×	×	×	○	×	○	×	×	×
7	×	×	×	×	○	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 3 分割削除ニムでの $\langle 6,8\rangle$ の後続局面

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	○	○	○	×	×
2	×	×	×	○	×	○	×	×	×
3	×	×	○	×	○	○	×	×	×
4	×	○	×	○	×	○	×	×	×
5	○	×	○	×	×	○	×	×	×
6	×	○	×	×	×	○	×	×	×
7	○	×	×	×	×	○	×	×	×
8	○	○	○	○	○	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 4 削除分割ニムでの $\langle 6,8\rangle$ の後続局面

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	×	×	○	×	○	×	×
2	×	×	×	○	×	○	×	×	×
3	×	×	○	×	○	×	×	×	×
4	×	○	×	○	×	×	×	×	×
5	○	×	○	×	×	×	×	×	×
6	×	○	×	×	×	×	×	×	×
7	○	×	×	×	×	×	×	×	×
8	×	×	×	×	×	◎	×	×	×
9	×	×	×	×	×	×	×	×	×

表 5 ニムの Grundy 数

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	0	3	2	5	4	7	6	9
3	2	3	0	1	6	7	4	5	10
4	3	2	1	0	7	6	5	4	11
5	4	5	6	7	0	1	2	3	12
6	5	4	7	6	1	0	3	2	13
7	6	7	4	5	2	3	0	1	14
8	7	6	5	4	3	2	1	0	15
9	8	9	10	11	12	13	14	15	0

表 6 Wythoff のニムの Grundy 数

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	0	4	5	3	7	8	6
3	2	0	1	5	3	4	8	6	7
4	3	4	5	6	2	0	1	9	10
5	4	5	3	2	7	6	9	0	1
6	5	3	4	0	6	8	10	1	2
7	6	7	8	1	9	10	3	4	5
8	7	8	6	9	0	1	4	5	3
9	8	6	7	10	1	2	5	3	4

表 7 分割削除ニムの Grundy 数

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	3	0	5	6	7	4	9	10
4	3	4	5	0	1	8	9	10	6
5	4	5	6	1	0	2	8	11	12
6	5	6	7	8	2	1	3	12	11
7	6	7	4	9	8	3	0	1	2
8	7	8	9	10	11	12	1	2	3
9	8	9	10	6	12	11	2	3	0

表 8 削除分割ニムの Grundy 数

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	2	0	1	0	3	0
2	1	1	2	2	1	1	3	3	1
3	0	2	0	2	0	3	0	3	0
4	2	2	2	2	3	3	3	3	2
5	0	1	0	3	0	1	0	3	0
6	1	1	3	3	1	1	3	3	1
7	0	3	0	3	0	3	0	3	0
8	3	3	3	3	3	3	3	3	4
9	0	1	0	2	0	1	0	4	0

5. 山数を一般化した分割削除ニム

5.1 半数分割削除ニム

削除分割ニムでは，場の山の数を一般化する拡張ゲームがいくつか提案されている．以下，山の数 n は 2 以上の整数とする．拡張ゲームにおいて手番のプレイヤーは下記の操作を行う．なお石の山を分割する際には，どの山も 1 個以上の石を含むようにする．このためゲームの進行中，各手番終了後の石の山の数 n は一定であることに注意する．

- ABO ニム（All-but-one-delete Nim，[10]） n 個の山のうちから $n-1$ 個の山を選び削除し，残っている 1 つの山を n 個の山に分ける．
- 1 山削除ニム (Single-delete Nim，[8]，[10]) n 個の山のうちから 1 つの山を選んで削除し，残っている $n-1$ 個の山のうちの 1 つを選んで 2 つの山に分ける．
- 半数削除ニム（Half-delete Nim，n は偶数，[2]） n 個の山のうちから半数の山を選んで削除し，残っている半数の山を 2 つずつの山に分ける．
- 半数以下削除ニム（Less-than-half-delete Nim，[2]） n 個の山のうちから半数以下の山を選んで削除し，削除したのと同数の山を 2 つずつの山に分ける．

これらのルールの $n=2$ の場合はすべて 2 山での削除分割ニムに一致する．山数を一般化したこれらの削除分割ニムでは，それぞれ異なる数学的にも興味深い勝敗判定条件が得られている．このことから本研究では，分割削除ニムにおいても山数を一般化する拡張ゲームを考えることとした．そのうちの 1 つとして半数削除ニムに対応する以下のゲーム（半数分割削除ニム）を考え，$n=4$ の場合における勝敗判定条件を得た．以下で得られた結果について述べる．

4 山での半数分割削除ニムのルールを改めて述べる．いくつかの石で構成される山が 4 つあり，手番のプレイヤーは以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- 4 つの山から 2 つの山を選び，その山をそれぞれ 1 個以上の石を含む 2 つずつの山に分ける．この結果，6 つの石の山ができる．
- 6 つの山のうち 2 つの山を削除し，4 つの山を残す．

ゲームに現れる局面（どちらの手番かという情報を含まない）全体の集合は $G_4 = \{\langle a,b,c,d\rangle \mid a,b,c,d \in \mathbb{N}\}$ であり，$\langle 1,1,1,d\rangle$ (d は任意の正の整数) では手番のプレイヤーが上記の操作を行うことができないため負けとなる．なお G_4 に含まれる局面 $\langle a,b,c,d\rangle$ を $a \le b \le c \le d$ をみたす形で表記したものを局面の昇順表記と呼ぶ．

このルールにおいての勝敗条件を述べるためにいくつかの記号を導入する．2 でちょうど偶数回割れる正の整数の集合を S とする．すなわち $S = \{1,3,4,5,7,9,11,\cdots\}$ である．この記号を用いれば，定理 1 での $\mathcal{P}$ 局面の集合は $\{\langle a,a\rangle | a \in S\}$ と書ける．さらに $a \in S$ に対し，a 以上の正の整数の集合 $D(a)$ を以下のように定義する．まず $D(1)=\mathbb{N}$ とする．$a \in S$ かつ $a \ne 1$ に対しては $D(a)$ は以下の条件をみたすように定める．

- $m < a$ に対しては $m \notin D(a)$.
- $a \le m \le 2a-1$ に対しては $m \in D(a) \iff m \in S$.
- $m \ge 2a$ に対しては $m \in D(a) \iff m-a \notin D(a)$ と，S に含まれるかどうかを小さい m から順次定める．

たとえば $D(4) = \{4,5,7,10,12,13,15,18,20,21,23,\cdots\}$ となる．この記法を用いて，4 山の半数分割削除ニムにおける勝敗判定条件は以下のように述べることができる．

定理 3 (本論文の主結果 2) 4 山半数分割削除ニムにおける局面 $\langle a,b,c,d\rangle \in G_4$ が $\mathcal{P}$ 局面である必要十分条件は，$\langle a,b,c,d\rangle$ の昇順表記 $\langle a',b',c',d'\rangle$ において $a'=b'=c'$ かつ $a' \in S, d' \in D(a')$ であることである．

5.2 定理 3 の証明

4 山半数分割削除ニムにおける局面 $\langle a,b,c,d\rangle \in G_4$ を昇順表記した $\langle a',b',c',d'\rangle$ が $a'=b'=c'$ かつ $a' \in S, d' \in D(a')$ をみたすとき $\langle a,b,c,d\rangle \in P$，また $N = G_4 \setminus P$ とする．以下の証明において P が $\mathcal{P}$ 局面の集合であり N が $\mathcal{N}$ 局面の集合であること，すなわち N に含まれる局面は一手で P に含まれる局面に移すことが可能であり P に含まれる局面から移せる局面はすべて N に含まれることを示す．

定理 3 の証明 $D(1)=\mathbb{N}$ であることから $\langle 1,1,1,d\rangle$ は P に含まれるが，これは 4 山半数分割削除ニムの終了局面である．また局面 $\langle 1,b,c,d\rangle$ が $b<c\le d$ であるときは，c を 1 と $c-1$，d を 1 と $d-1$ に分割し $c-1$ と $d-1$ を削除して $\langle 1,1,1,b\rangle \in P$ に一手で移すことができるので $\mathcal{N}$ 局面である．以下，$\langle a,b,c,d\rangle \in G_4$ が $2 \le a \le b \le c \le d$ をみたすとき，一手で

(i) $a \notin S$ ならば P の局面に移せる
(ii) $a \in S$ かつ「$a=b=c$ でない」とき P の局面に移せる
(iii) $a \in S, a=b=c$ かつ $d \notin D(a)$ のとき P の局面に移せる
(iv) $a \in S, a=b=c, d \in D(a)$ のとき P の局面に移せない

ことを順に示す．

(i) $a \notin S$ であるとき，a が 2 で偶数回割れることから $a/2 \in S$ である．従って，$b \in D(a/2)$ であれば a を $a/2$ と $a/2$，c を $a/2$ と $c-a/2$ に分割し，$c-a/2$ と d を削除して $\langle a/2,a/2,a/2,b\rangle \in P$ に移すことができる．$b \notin D(a/2)$ であるときは，$b \ge a$ によって $b-a/2 \ge a/2$ であることから $b-a/2 \in D(a/2)$ であるので a を $a/2$ と $a/2$，b を $a/2$ と $b-a/2$ に分割し，c と d を削除して $\langle a/2,a/2,a/2,b-a/2\rangle \in P$ に移すことができる．

(ii) まず $a=b<c\le d$ のときを考える．$a \in S$ により $a \in D(a)$ であるから，c と d をそれぞれ a と $c-a$，a と $d-a$ に分割し $c-a$ と $d-a$ を削除することで $\langle a,a,a,a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．

次に $a < b \le c \le d$ のときを考える．もし $b \in D(a)$ であればやはり c と d をそれぞれ a と $c-a$，a と $d-a$ に分割し $c-a$ と $d-a$ を削除することで $\langle a,a,a,b\rangle \in P$ に一手で移すことができる．$b \notin D(a)$ かつ $b \ge 2a$ であれば $b-a \in D(a)$ であるので，b を a と $b-a$，c を a と $c-a$ に分割し $c-a$ と d を削除することで $\langle a,a,a,b-a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．$b \notin D(a)$ かつ $a < b < 2a$ であれば $b/2 \in S$ であり $b/2 < a < b$ から $a \in D(b/2)$ でもあるので，b を $b/2$ と $b/2$，c を $b/2$ と $c-b/2$ に分割し $c-b/2$ と d を削除することで $\langle b/2,b/2,b/2,a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．

(iii) $\langle a,a,a,d\rangle$（$d \notin D(a)$）について，もし $d \ge 2a$ ならば $d-a \in D(a)$ であるので 1 つの a を適当に分割し (両方削除する)，d を a と $d-a$ に分割することで $\langle a,a,a,d-a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．もし $a < d < 2a$ ならば $d \notin S$ であるので $d/2 \in S$ であり，$d/2 < a < d$ なので $a \in D(d/2)$ である．従って 1 つの a を $d/2$ と $a-d/2$，d を $d/2$ と $d/2$ に分割して a と $a-d/2$ を削除することで $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle \in P$ に一手で移すことができる．

(iv) P に含まれる局面では少なくとも 3 つの数が同じであることに注意する．$\langle a,a,a,d\rangle$（$a \in S, d \in D(a)$）から一手で移れる局面で少なくとも 3 つの数が同じであるものは，移った結果が

1) $\langle a,a,a,d-a\rangle$　2) $\langle d/2,d/2,d/2,a-d/2\rangle$
3) $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle$　4) $\langle a/2,a/2,a/2,*\rangle$（$*$ は任意）

のいずれかしかない．

1) $d \in D(a)$ の条件から $d-a \notin D(a)$ であるので $\langle a,a,a,d-a\rangle$ は P に含まれない．

2) $\langle d/2,d/2,d/2,a-d/2\rangle \in P$ であるためには $d/2 \le a-d/2$，すなわち $a \ge d$ が必要だがこのとき $a = d$ でなくてはならず，$d/2 \notin S$ となり P の条件に反する．

3) $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle \in P$ であるためには $d/2 \le a$，すなわち $a \le d \le 2a$ が必要である．もし $a \le d < 2a$ であるならば $d \in D(a)$ を考え合わせると $d \in S$，つまり $d/2 \notin S$ となってしまう．また $d = 2a$ のときは $\langle d/2,d/2,d/2,a\rangle \in P$ とすると $a \in D(d/2)$，すなわち $d/2 \in D(a)$ であるが，これは仮定の $d \in D(a)$ に反する．

4) $a \in S$ から $a/2 \notin S$．よって $\langle a/2,a/2,a/2,*\rangle \notin P$．□

5.3　1 山分割削除ニム

本節では分割削除ニムの山数一般化の別の例として，1 山分割削除ニムを考察する．このゲームのルールを改めて説明する．いくつかの石で構成される山の数は n（$n \ge 2$）であり，手番のプレイヤーは以下の 2 つの操作を続けて行い，手番を相手に交代する．

- n 山のうちの 1 つの山を選び，その山をそれぞれ 1 個以上の石を含む 2 つの山に分ける．この結果，石の山の数は全部で $n+1$ となる．
- これら $n+1$ 山のうちの 1 つの山を削除し，残った山の数が n となるようにする．

$n = 2$ の場合は 2 章で述べた分割削除ニムに一致する．このゲームでの勝敗判定条件は $n = 3$ においても未解決であるが, 部分的な結果と現在の研究状況について報告する．$n = 3$ の場合，このゲームは 3 つの山のうちの 1 つを分割して全部で 4 つの山とし，この中から 1 つの山を削除して着手が完了する．ゲームに現れる局面（どちらの手番であるかという情報を含まない）全体の集合は $G_3 = \{\langle a,b,c\rangle | a,b,c \in \mathbb{N}\}$ であり，終了局面は $\langle 1,1,1\rangle$ のみである．このゲームの $\mathcal{P}$ 局面の集合を P，$\mathcal{N}$ 局面の集合を N とする．ゲームの進行により場の石の総数は単調減少であるため，P の要素として $\langle 1,1,1\rangle, \langle 2,2,2\rangle, \langle 1,3,3\rangle, \langle 1,4,4\rangle, \langle 2,3,5\rangle, \langle 1,5,7\rangle$ などを順に挙げることができる．1 山分割削除ニムではある 1 つの山の石だけを減らすことが可能であることから，以下の命題が成り立つことは明らかである．

命題 4　$a,b \in \mathbb{N}$ に対し，$\langle a,b,c\rangle \in P$ となる c は高々 1 つである．

表 9 として，a,b に対して $\langle a,b,c\rangle \in P$ となる c を掲げる．存在しない場合は×で示している． a と b が近い値であるときは c は小さい値となる傾向がある程度見て取れる．特に $a = b$ である場合は次の命題が成り立つ．

命題 5　$\langle a,a,c\rangle \in P$ ならば，$a \ge c$ である．

証明 $\langle a,a,c\rangle \in P$ かつ $a < c$ をみたす a,c が存在すると仮定する．このとき $\langle a,a,1\rangle, \langle a,a,2\rangle, \langle a,a,3\rangle, \ldots, \langle a,a,a\rangle$ はすべて $\mathcal{N}$ 局面である ($*$)．特に $\langle a,a,a\rangle \in N$ であることから，この局面から一手で移すことのできる $\mathcal{P}$ 局面が存在する．しかし $\langle a,a,a\rangle$ から移せる局面は $\langle a,a,i\rangle$（$i < a$）または $\langle a,a',a''\rangle$（$a'+a'' = a$）のいずれかであり，前者が $\mathcal{P}$ 局面であれば ($*$) に反し，後者が $\mathcal{P}$ 局面であれば $\langle a,a,c\rangle$ が $\mathcal{P}$ 局面であることに反する．　□

$\langle a,b,c\rangle \in P$ であるための条件を得る前段階である，a,b に対して $\langle a,b,c\rangle \in P$ となる c が存在する条件もまだ得られず，$\mathcal{P}$ 局面と $\mathcal{N}$ 局面の完全な分類には至っていない．

6.　まとめ

削除ニムにおける「山の削除」と「山の分割」の手順の前後を入れ換えた新たなゲーム「分割削除ニム」を導入し，石の山の数が 2 つである場合の勝敗判定条件を示した．このゲームを従来から知られているニム，Wythoff のニム，削除分割ニムと比較し考察を行った．さらにこのゲームの山数を増やす拡張の 1 つとして 4 山半数分割削除ニムを考え，その勝敗判定条件を示した．今後も様々な拡張ゲームの勝敗判定条件を調べるとともに，これらの様々な石取りゲームを俯瞰する観点からの研究を行っていく．

表 9 a, b に対して $\langle a, b, c\rangle \in P$ となる c

$a\backslash b$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	×	3	4	7	×	5	×	10	9	14	×	13	11	15	16	18	17	×	20
2	×	2	5	×	3	6	7	×	13	11	10	×	9	×	17	19	15	23	16	25
3	3	5	1	×	2	9	×	8	6	12	17	10	18	19	×	×	11	13	14	26
4	4	×	×	1	×	10	8	7	12	6	18	9	17	20	×	×	13	11	22	14
5	7	3	2	×	×	11	1	×	14	16	6	12	15	9	13	10	×	21	20	19
6	×	6	9	10	11	2	×	×	3	4	5	×	19	×	21	×	20	22	13	17
7	5	7	×	8	1	×	2	4	×	14	16	×	22	10	23	11	21	29	28	30
8	×	×	8	7	×	×	4	3	17	18	×	15	16	21	12	13	9	10	23	31
9	10	13	6	12	14	3	×	17	×	1	×	4	2	5	×	×	8	24	×	32
10	9	11	12	6	16	4	14	18	1	×	2	3	×	7	×	5	22	8	24	33
11	14	10	17	18	6	5	16	×	×	2	×	×	×	1	×	7	3	4	21	×
12	×	×	10	9	12	×	×	15	4	3	×	5	×	×	8	20	×	27	29	16
13	13	9	18	17	15	19	22	16	2	×	×	×	1	×	5	8	4	3	6	×
14	11	×	19	20	9	×	10	21	5	7	1	×	×	×	25	23	×	30	3	4
15	15	17	×	×	13	21	23	12	×	×	×	8	5	25	1	×	2	×	×	×
16	16	19	×	×	10	×	11	13	×	5	7	20	8	23	×	1	×	×	2	12
17	18	15	11	13	×	20	21	9	8	22	3	×	4	×	2	×	×	1	×	6
18	17	23	13	11	21	22	29	10	24	8	4	27	3	30	×	×	1	×	×	×
19	×	16	14	22	20	13	28	23	×	24	21	29	6	3	×	2	×	×	×	5
20	20	25	26	14	19	17	30	31	32	33	×	16	×	4	×	12	6	×	5	1

謝辞　本研究はJSPS科研費 JP21K12191, JP22K13953 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Abuku,T. and Suetsugu,K. : Delete Nim, *Journal of Mathematics, Tokushima University* **55**, 75-81 (2021).

[2] 安福智明, 坂井公, 篠田正人, 末續鴻輝：拡張削除ニム，情報処理学会研究報告，Vol. 2022-GI-48, No.14, 1-5 (2022).

[3] Albert,M.H., Nowakowski, R.J. and Wolfe, D.（川辺治之訳）：組合せゲーム理論入門-勝利の方程式-，共立出版 (2011).

[4] Bouton, C.L.: Nim, a Game with a Complete Mathematical Theory, *Annals of Mathematics* **3**, 35-39 (1902).

[5] Fraenkel,A.S. and Lorberbom, M. : Nimhoff games, *Journal of Combinatorial Theory Series A*, **58**, 1-25 (1991).

[6] 一松信: 石取りゲームの数理，森北出版 (1968).

[7] 宮寺良平，福井昌則，井上理哲人，中屋悠資，戸國友貴: Corner the Queen problem の変種についての研究，情報処理学会研究報告，Vol. 2016-GI-35，No.6，1-6 (2016).

[8] 坂井公: 数学でピザを切り分ける！パズルの国のアリス 4，日経サイエンス社 (2021).

[9] 佐藤文広: 石取りゲームの数学：ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).

[10] 篠田正人: Delete Nim の一般化と勝敗判定，情報処理学会研究報告，Vol. 2022-GI-47, No.5, 1-8 (2022).

[11] Stankova Z. and Rike T. (eds.) : *A Decade of the Berkeley Math Circle Vol.1*, Mathematical Circles Library, 159 (2008).

[12] 末續鴻輝: 不偏ゲームの必勝局面判定における 2 進展開の様々な利用，情報処理学会研究報告，Vol. 2019-GI-41, No.22, 1-7 (2019).

[13] Wythoff, W.A. A modification of the game of Nim, *Nieuw Archief voor Wiskunde* **7**, 199-202 (1907).

付　　録

A.1　命題 2 の証明

$$
\begin{aligned}
P &= \{\langle a, a\rangle \mid v_2(a) \text{ が偶数 }\},\\
N_1 &= \{\langle 2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}\rangle \mid l \in \mathbb{N}\},\\
N_2 &= \{\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \mid l \in \mathbb{N}\},\\
N_3 &= \{\langle 2(2k+1), 2(2k+1)\rangle \mid k \in \mathbb{N}\},\\
N_4 &= \{\langle 2^{l+1}(2k+1)-1, 2^{l+1}(2k+1)+1\rangle \mid k, l \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

を再掲する．定理 1 により P に含まれる局面の Grundy 数は 0 である．$N^1 = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$ とする．N^1 に含まれる局面の Grundy 数は 1 であることをここで示す．証明に先立ち，$i \neq j$ に対し $N_i \cap N_j = \emptyset$ であること，$k, l \in \mathbb{N}$ のとき $2^{l+1}(2k+1)$ は「3 以上の奇数因数を持つ 4 の倍数」であること，4 の倍数はすべて $2^{2l}, 2^{2l+1}, 2^{l+1}(2k+1)$ のいずれか 1 つの形で表せること，を注意しておく．

命題 2 の証明　以下で k, l はいずれも正の整数とする．まず $\langle a, b\rangle$（$a \leq b$ とする）が P および N^1 に含まれないとき，一手で N^1 に含まれる局面に移せることを示す．

局面 $\langle a, a\rangle$（$v_2(a) = 2l+1$）において，$a = 2^{2l+1}$ であるときは $\langle 2^{2l+1}-1, 2^{2l+1}\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l+1}(2k+1)$ であるときは $\langle 2^{2l}(2k+1)-1, 2^{2l}(2k+1)+1\rangle \in N_4$ に移せる．

以下，$a < b$ である局面 $\langle a, b\rangle$ について，a による場合

分けをして順に示す．

(i) $v_2(a) \geq 3$ とする．$a = 2^{2l+1}$ のとき $\langle 2^{2l+1}-1, 2^{2l+1}\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l+2}$ かつ $b > a+1$ のとき $\langle 2^{2l+2}, 2^{2l+2}+1\rangle \in N_2$ に移せる．それ以外の a については，$b > a+1$ であれば $\langle a/2-1, a/2+1\rangle \in N_4$ に移せる．

(ii) $v_2(a) = 2$ とする．$a = 4$ かつ $b > 5$ のときは $\langle 4, 5\rangle \in N_2$ に移せる．$a \neq 4$ のときは $\langle a/2, a/2\rangle \in N_3$ に移せる．

(iii) $v_2(a) = 1$ とする．$a = 2$ のときは $\langle 1, 2\rangle \in N_1$ に移せる．$a \neq 2$ のときは $\langle a, a\rangle \in N_3$ に移せる．

(iv) $v_2(a) = 0$ であり，$a-1$ が 4 の倍数であるとする．$a = 1$ かつ $b > 2$ のときは $\langle 1, 2\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l}+1$ のときは $\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \in N_2$ に移せる．$a = 2^{2l+1}+1$ のときは $\langle 2^{2l}, 2^{2l}+1\rangle \in N_2$ に移せる．それ以外の a については $\langle a-2, a\rangle \in N_4$ に移せる．

(v) $v_2(a) = 0$ であり，$a+1$ が 4 の倍数であるとする．$a = 2^{2l}-1$ のときは $\langle 2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}\rangle \in N_1$ に移せる．$a = 2^{2l+1}-1$ かつ $b > a+1$ のときは $\langle 2^{2l+1}-1, 2^{2l+1}\rangle \in N_1$ に移せる．それ以外の a については，$b > a+2$ ならば $\langle a, a+2\rangle \in N_4$ に移せる．$b = a+1$ のときは，もし $a+1$ が 8 の倍数であれば $\langle (a-1)/2, (a+3)/2\rangle \in N_4$ に移せる．もし $a+1$ が 8 の倍数でなければ $\langle (a+1)/2, (a+1)/2\rangle \in N_3$ に移せる．

次に，N^1 に含まれる局面は一手で N^1 に含まれる局面に移せないことを示す．N^1 に含まれる局面の石の数に現れる

$$
\begin{gathered}
2^{2l-1}-1, 2^{2l-1}, 2^{2l}, 2^{2l}+1, 2(2k+1), \\
2^{l+1}(2k+1)-1, 2^{l+1}(2k+1)+1
\end{gathered} \tag{A.1}
$$

は $k, l \in \mathbb{N}$ に対して全く重複しないため，分割削除ニムにおける「1 つの山を分割し，分割されてできた 2 山の片方を削除する」（=片方の山から正の整数個の石を取る）という一手では，N^1 に含まれる局面から N^1 に含まれる局面には移せないことがわかる．よって「1 つの山を分割し，分割されなかった山を削除する」という一手で不可能であることを示せばよい．この一手によって局面を移すとき，後続局面の石数の和は元の局面の片方の山の石数に等しくなければならない．N_1, N_2, N_3, N_4 それぞれに含まれる局面について石数の和を求めると

$$
\begin{aligned}
&(2^{2l-1}-1)+2^{2l-1} = 2^{2l}-1, \\
&2^{2l}+(2^{2l}+1) = 2^{2l+1}+1, \\
&2(2k+1)+2(2k+1) = 4(2k+1), \\
&(2^{l+1}(2k+1)-1)+(2^{l+1}(2k+1)+1) = 2^{l+2}(2k+1)
\end{aligned}
$$

であり，これらの右辺の数は (A.1) とは全く重複しない．よって一手で N^1 に含まれる局面に移すことが不可能だと示された．　□