ソフトウェア工学　87－7
(1992. 9. 29)

関数型言語の風景 [II]

杉藤　芳雄
電子技術総合研究所　情報アーキテクチャ部　言語システム研究室

あらまし　関数型言語の基本構造あるいは基本原理というものを、写像中心の考え方、即ち、圏理論の初等的な観点から見直す試みの続報である。具体的には、関数型言語をラムダ計算と同一視することにして、圏理論におけるラムダ計算の基本モデルであるカルテシアン閉包圏について、その視覚的な把握をめざす。そこで、普遍射および随伴関手という鍵になる概念の存在を共時的に理解できるように、両者の概念を結合／共存させた３次元的可換図 (これを立体図とよぶ) を導入し、その意義を検討する。

Scenery of Functional Language[II]

Yoshio SUGITO
Computer Language Section, Computer Science Division
ELECTROTECHNICAL LABORATORY
1-1-4 Umezono, Tsukuba-shi, Ibaraki-ken, 305, JAPAN

Abstract　This is a second paper for reviewing the basic structures or principles of functional language from the introductory view of category theory, To be more concrete, we identify functional language with λ-calculus, and then we intend to grasp visually Cartesian closed category which is known as a kind of categorical models for λ-calculus. Therefore, we introduce a three-dimensional commutative diagram where coexist the key concepts of adjoint functor and universal arrow for the purpose of our understanding the both concepts simultaneously, and discuss its significance.

1 はじめに

既に一定の地位を獲得している関数型言語ではあるものの、その基本的な構造 (いわば syntax の領域) と機能 (いわば semantics の領域) とを見直すべく、写像中心の考え方、即ち圏論 (Category Theory) の基本概念により徘徊しつつ、視覚的に描写しようという試み [7] の続報である。

とは言うものの、本稿では前回の内容をより広く浅く発展させることよりも、説明不足や不正確と思われる箇所、例えば随伴関手の3次元的可換図 (これを "立体図" と称する)、をより深く掘り下げていくことに主眼がある。

基本的な姿勢としては、前回同様、圏論に殆どなじみのない読者にもいくらかはその雰囲気を理解していただくため、なるべく多くの図解を付与して述べていく。

圏論の成書 (例えば [1][2][3]) を見れば済むような基本概念の定義については、本稿の展開上に必要な範囲にできるだけ限定しながら充てられていることも、前回の流儀の踏襲である。

以降では、形式的な話題を非形式的に紹介する方針は変らず、関数型言語の基本概念のモデル化について軽く触れたあと、圏論の基本的な概念による見方や考え方を、とくに随伴関手と普遍射との関係に重点を置きつつ段階的に諸定義の積み重ねと共に進めていき、最終的には関数型言語の風景図である "立体図" を導入して、その有用性を検討する。

2 関数型言語とモデル化

関数型言語とは、単純化すれば、関数名とその引数という対が syntax 上の基本構造になっており、semantics 上でもその対の機能を基本としつつ、引数として関数名をも許容することで奥行を増しているものである、と捉えることができよう。

関数型言語が関数名と引数とから成る形態であるということは、関数名自体も引数になりうるという前提から、関数型言語はすべてが引数というデータの並びだけで構成されている言語であるとも言えるが、一方、逆にすべてが関数名というデータ (あるいは一連のデータに対して当該関数としての一定の効果を付与する作用素) の並びだけで構成されている言語であるとも言える。

このような関数名と引数 (ならびにそれらの評価結果) との同一視という考え方は、理論的にも興味のある対象として、いくつかの数学的モデルが提案されている。

例えばラムダ計算 (λ-calculus)[4] では、関数型言語がデータの並びから成るという側面は、2つのデータを並置した対を基本単位とし、あとはその重ね合わせにより全体を構成できるものとして、この対の形態を application と称している。また、この対における関数名というデータが実際に関数たりうる作用を引起こすためには、データの関数化という何らかの仕掛けあるいは概念が必要となるが、ラムダ計算では、この概念を abstraction と称している。

このように、関数型言語の基本的／原始的な構造あるいは原理は、ラムダ計算を考えれば充分であるので、以下では関数型言語の基本として前回同様にラムダ計算を想定し、そこから他の (数学上の) 世界への投影あるいはモデル化 (例えば Koymans[5]) として、圏論の世界への投影の一端を、あくまでも入門的、直観的、非形式的な取扱いにより見ていくことにする。

3 圏論初歩

本章からは圏論の入口に焦点をあてて、しばらくは基本概念のいくつかの定義を累積していく。本格的な定義等は成書を参照していただくことにして、ここでは必要最小限に留めておく。

[定義] **C** が圏 (category) であるとは、次の6つの公理により定められるものである。

1. 対象 (object) の集まり、および、射 (morphism) の集まりがある。[以降、圏は **A**,**B**,**C** のように英大文字の太字で、対象は a,b,c 等の英小文字で、射は f,g,h 等のイタリック英小文字で、それぞれ表わすことにする。また、射は矢 (arrow) と称することもある。]
2. 任意の2つの対象 a,b に対して、射の集合 Hom(a,b) が定まる。$f \in$Hom(a,b) のとき、f は a から b への射であるといい、f: a⟶b あるいは $a \xrightarrow{f} b$ と表わす。[Hom(a,b) のことを b^a と表記することもある。]
3. 任意の射 f に対して、f:a⟶b となる対象 a,b がそれぞれ一意に定まる。このとき、a を f の定義域 (domain)、b を f の余域 (codomain) という。
4. 射 f:a⟶b, g:b⟶c に対して、$g \circ f$:a⟶c となる射 $g \circ f$ が定まる。これを射 f,g の合成という。[このとき f の余域と g の定義域との一致が前提である。]

5. 各対象 a に対して、射 1_a:a⟶a が定まり、射 f が f:a⟶b ならば $f\circ 1_a=f$、射 g が g:b⟶a ならば $1_a\circ g=g$ が成立する。1_a を a の恒等射という。

6. 3つの射 f:a⟶b, g:b⟶c, h:c⟶d に対して　$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ が成立する。 ■

[定義] 圏 C の対象 i が始対象 (initial object) であるとは、C 内の任意の対象 x に対して射 i_x:i⟶x が唯一存在することをいう。双対的に、圏 C の対象 t が終対象 (terminal object) であるとは、C 内の任意の対象 x に対して射 t_x:x⟶t が唯一存在することをいう。 ■

[定義] 圏 C の対象 a,b に対して、次の2つの条件を満足する対象 a×b が C のなかに存在すれば、それを a,b の直積という。[次図を参照のこと。同図で点線矢印 h は唯一存在の射を意味する。この便法は、以降でも用いることがある。]

1. 射 p:a×b⟶a, q:a×b⟶b がある。

2. 任意の2つの射 f:d⟶a と g:d⟶b に対して、$f=p\circ h$, $g=q\circ h$ を満足する射 h:d⟶a×b が唯一存在する。この h を $\langle f,g\rangle$ で表現する。

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle\ h"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a\times b \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & b \end{tikzcd}$$

■

3.1 カルテシアン閉包圏

カルテシアン閉包圏 (CCC: Cartesian Closed Category) は、2章で述べた関数名と引数 (ならびにそれらの評価結果) との同一視という考え方を具現化する数学的モデルの例であり、要するにラムダ計算の abstraction や application の概念が常に成立するような"場"を提供するものである。カルテシアン閉包圏の適切な解説としては文献 [6] を参照されたい。

カルテシアン閉包圏の定義の仕方には種々考えられるが、ここでは次のようにする。

[定義] 圏 C がカルテシアン閉包圏 であるとは、C が以下の条件を満たすとき、かつ、そのときに限る。[次図参照のこと。]

1. 終対象 t をもつ。

2. 任意の対象 a,b に対し、直積対象 a×b および射 p:a×b ⟶a, q:a×b⟶b が存在し、かつ、任意の対象 d からの射 f:d⟶a と g:d⟶b に対して、唯一の射 $\langle f,g\rangle$:d⟶a×b が存在し、$p\circ\langle f,g\rangle=f$, $q\circ\langle f,g\rangle=g$ が成立する。

3. 任意の対象 a,b に対し、巾対象 b^a および射 e:b^a ×a⟶b が存在し、かつ、d を任意の対象とするときの総ての射 f:d×a⟶b に対して唯一の射 $\bar f$:d ⟶b^a が存在し、$f=e\circ\langle \bar f\circ p,q\rangle$ が成立する。

$$\begin{tikzcd} & b^a\times a \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] \arrow[drr, "e"] & & \\ b^a & & a & b \\ d \arrow[u, "\bar f"] & d\times a \arrow[l, "p"] \arrow[uu, dashed, "\langle \bar f\circ p,q\rangle"] \arrow[ul, "\bar f\circ p"] \arrow[ur, "q"'] \arrow[urr, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

■

上記定義の 3. は次のような巾の存在公理を意味している。

[公理] 圏 C の任意の対象 a,b に対して巾対象 $b^a \in C$ および射 $e{:}b^a \times a \longrightarrow b$ が存在し、任意の射 $f{:}d \times a \longrightarrow b$ に対し次図を満たす $\bar{f}{:}d \longrightarrow b^a$ が唯一存在する。

$$\begin{tikzcd} b^a \times a \arrow[r, "e"] & b \\ d \times a \arrow[u, dashed, "\bar{f}"] \arrow[u, "1"'] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

■

射 f は引数 (対象 a) を従えた関数名 (対象 d) と、その効果あるいは結果 (対象 b) とみなすことができ、射 e は evaluationmap と称するもので関数 (対象 a から対象 b への射の集合 b^a) の評価 (即ち、 application を施すこと) に相当する。また、 $\bar{f}$ は関数名 (対象 d) の関数化 (即ち、 abstraction) に相当し、関数型言語で言えば Curry 化に該当するものである。圏論では、 $\bar{f}$ は f の transpose と称されている。

3.2 普遍射 (Universal Arrow)

本稿での重要な概念の 1 つである普遍射の定義のために、まず関手 (functor) の定義から出発する。関手とは、簡単にいえば圏と圏との間における射の結合に関する準同型対応のことである。

[定義] 圏 **A** から圏 **B** への関手 $F{:}\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ とは、対象 $a \in \mathbf{A}$ に対して対象 $F(a) \in \mathbf{B}$ が、射 $f \in \mathbf{A}$ に対して射 $F(f) \in \mathbf{B}$ が、それぞれ対応し、

1. $f{:}a \longrightarrow a'$ に対し $F(f){:}F(a) \longrightarrow F(a')$
2. $F(1_a) = 1_{F(a)}$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

を満足するものである。

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ a \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "f"'] & & F(a) \arrow[d, "F(f)"] \\ a' \arrow[rr, "F"'] & & F(a') \end{tikzcd}$$

■

以降では、 $F(a)$, $F(f)$ を単に Fa, Ff と記す。そして、関手には F, G 等のようにイタリック英大文字を用いることにする。また、関手の合成や結合則等は射の場合と同様に定義されるので、省略する。

[定義] 圏 **A** から圏 **B** への 2 つの関手 $F, G{:}\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ に対して F から G への自然変換 (natural transformation)ν とは、任意の対象 $a \in \mathbf{A}$ に対して $\nu a{:}Fa \longrightarrow Ga \in \mathbf{B}$ が対応しており、任意の $f{:}a \longrightarrow a' \in \mathbf{A}$ に対し、次図が可換となることである。とくに、 νa が常に同型射であるとき、 ν は自然同型 (natural isomorphism) であるという。

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & Fa \arrow[r, "\nu a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ a' & Fa' \arrow[r, "\nu a'"] & Ga' \end{tikzcd}$$

■

圏論の文献では前述の図を用いるのが慣例であるが、次図の方が自然変換の意味をより直観的に理解しやすくなるのではないかと考え、参考までに供する。

$$
\begin{tikzcd}
 & & Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[dd, "\nu a"] & Fa' \arrow[dd, "\nu a'"] \\
a \arrow[r, "f"] \arrow[urr, "F"] \arrow[drr, "G"'] & a' \arrow[urr, "F"] \arrow[drr, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \nu"] & & \\
 & & Ga \arrow[r, "Gf"'] & Ga'
\end{tikzcd}
$$

ようやく、普遍射の定義に着手することになる。

[定義] 圏 $\mathbf{D}$ から圏 $\mathbf{C}$ への関手 S:$\mathbf{D}\longrightarrow\mathbf{C}$ に対して、c∈$\mathbf{C}$ とする。
c から S への**普遍射** (universal arrow) とは、対象 r∈$\mathbf{D}$ と射 u:c$\longrightarrow S$r∈$\mathbf{C}$ との対 $\langle \mathrm{r}, u\rangle$ であり、任意の対 $\langle \mathrm{d}, f\rangle$ [ここで d∈$\mathbf{D}$ かつ f:c$\longrightarrow S$d∈$\mathbf{C}$] に対し、射 f':r$\longrightarrow$d∈$\mathbf{D}$ が一意に定まり、$Sf' \circ u=f$ が成立すること、即ち、次図が可換になることである。

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"'] & r \arrow[l, "S"'] \arrow[d, dashed, "f'"'] \\
c \arrow[r, "f"'] & Sd & d \arrow[l, "S"]
\end{tikzcd}
$$

双対的に、S から c への普遍射 (universal arrow) とは、対象 r∈$\mathbf{D}$ と射 v:Sr$\longrightarrow$c∈$\mathbf{C}$ との対 $\langle \mathrm{r}, v\rangle$ であり、任意の対 $\langle \mathrm{d}, g\rangle$ [ここで d∈$\mathbf{D}$ かつ g:Sd$\longrightarrow$c∈$\mathbf{C}$] に対し、射 g':d$\longrightarrow$r∈$\mathbf{D}$ が一意に定まり、$v \circ Sg'=g$ が成立すること、即ち、次図が可換になることである。

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, equal] & Sr \arrow[l, "v"'] & r \arrow[l, "S"'] \\
c & Sd \arrow[l, "g"] \arrow[u, dashed, "Sg'"] & d \arrow[l, "S"] \arrow[u, dashed, "g'"]
\end{tikzcd}
$$

■

ここで、上記定義後半の普遍射に関して、対象 r として巾対象 b^{a} をとり、関手 S として関手 (- × a) をとることにすれば、次図のような状況となり、evaluation map である射 e が射 v に相当するものであることが分る。

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, equal] & b^a \times a \arrow[l, "e"'] & b^a \arrow[l, "(-\times a)"'] \\
b & d \times a \arrow[l, "f"] \arrow[u, "\bar{f}\times 1"] & d \arrow[l, "(-\times a)"] \arrow[u, "\bar{f}"]
\end{tikzcd}
$$

3.3 随伴関手

本稿でのもう１つの重要な概念である随伴関手の定義にとりかかる。

[定義] $\mathbf{A}$,$\mathbf{X}$ は圏、F,G は F:$\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{A}$, G:$\mathbf{A}\longrightarrow\mathbf{X}$ のような関手とする。
このとき、圏 $\mathbf{A}$ の総ての対象 a と圏 $\mathbf{X}$ の総ての対象 x に対して、次のような自然同型の対応が存在するならば、

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(F\mathrm{x}, \mathrm{a}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathrm{x}, G\mathrm{a}) \qquad (\text{ここで、} \mathrm{a}\in\mathbf{A},\ \mathrm{x}\in\mathbf{X})$$

F, G は互に随伴関手 (adjoint functor) であり、F は G の左随伴 (left adjoint)、G は F の右随伴 (right adjoint) である。 ■

この定義での自然同型の対応を直観的に理解するため、3次元的な可換図である“立体図”を導入するが、そのための準備として次のような圏を定義する。

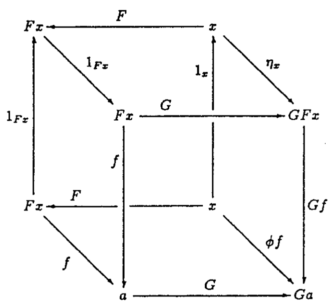
[定義] 圏 $\mathbf{C}$ の双対圏 $\mathbf{C}^{op}$ とは、対象はもとの圏 $\mathbf{C}$ と同じであり、射については矢の向きを逆にしたものがもとの圏 $\mathbf{C}$ に存在する場合に限り存在すると定めるものである。 ■

[定義] 圏 $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ の直積の圏 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とは、対象として $\mathbf{A}$ の対象と $\mathbf{B}$ の対象との対 (a,b)、射として $\mathbf{A}$ の射と $\mathbf{B}$ の射との対 (a,b) からなる圏である。[例えば $\mathbf{A}$ の射 $a{:}\mathrm{a}_1 \longrightarrow \mathrm{a}_2$ と $\mathbf{B}$ の射 $b{:}\mathrm{b}_1 \longrightarrow \mathrm{b}_2$ から $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の射を $(a,b){:}(\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1) \longrightarrow (\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2)$ とする。] ■

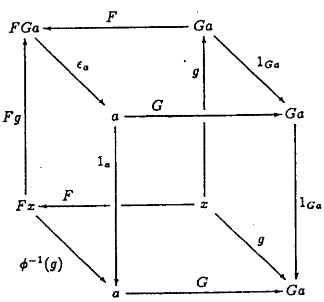
随伴関手の定義に戻ると、そこでの自然同型に登場する $\mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}$ および $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}$ は、いずれも $\mathbf{X}^{op} \times \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{Set}$ という関手である。(ここで $\mathbf{Set}$ は集合の圏を意味する。) 両関手間の自然変換 ϕ を仮に次のように定めることにする。

$$\phi{:}\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(F\mathrm{x},\mathrm{a}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{X}}(\mathrm{x},G\mathrm{a})$$

このとき、$\mathrm{a}=F\mathrm{x}$ と置き、$f{:}F\mathrm{x}\longrightarrow\mathrm{a}$ とするときの自然変換に関する可換図を構成すると次の“立体図”が得られる。同図で可換が成立すること (即ち、自然であること) とは、左側面および右側面を下方向の射とみなし、上面および底面を右方向の射 (即ち、ϕ) とみなすとき、上面と右側面との射の合成が、左側面と底面との射の合成と等しくなることである。同図の右上辺の射 η_{x} は $F\mathrm{x}$ の恒等射の自然変換である。即ち、$\eta_{\mathrm{x}}=\phi\,(1_{F\mathrm{x}})$ が成立している。



同様にして、自然変換 ϕ が逆方向にも成立する (即ち、自然同型である) ことの可換図は、その逆向き自然変換 (上記の ϕ の定義式の矢印を逆にしたもの) を ϕ^{-1} と記すことにして、$\mathrm{x}=G\mathrm{a}$ と置き、$g{:}\mathrm{x}\longrightarrow G\mathrm{a}$ として構成すれば、次の“立体図”が得られる。同図で可換が成立すること (即ち、逆向きでの自然であること) とは、左側面および右側面をやはり下方向の射とみなし、上面および底面を今度は左方向の射 (即ち、ϕ^{-1}) とみなすとき、上面と左側面との射の合成が、右側面と底面との射の合成と等しくなることである。同図の左上辺の射 ϵ_{a} は $G\mathrm{a}$ の恒等射の (逆向き) 自然変換である。即ち、$\epsilon_{\mathrm{a}}=\phi^{-1}(1_{G\mathrm{a}})$ が成立している。



3.4 随伴関手と普遍射との関係

前節の自然同型立体図は主に随伴関手の役割を見るためのものであったが、ここで普遍射との関係を眺めてみたい。

普遍射の定義で用いた図に対応する箇所を前節の立体図に探し求め、両者を比較対照できるように、左側が普遍射定義図、右側が立体図内の対応箇所となるように並べたものが以下のものである。(既出立体図において η 関連立体図では前面と右側面とが該当し、ϵ 関連立体図では左側面と背面とが該当している。)

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"'] & r \arrow[l, "S"'] \arrow[d, dashed, "f'"'] \\
c \arrow[r, "f"'] & Sd & d \arrow[l, "S"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, equal] & GFx \arrow[d, dashed, "Gf"'] & Fx \arrow[l, "G"'] \arrow[d, dashed, "f"'] \\
x \arrow[r, "\phi f"'] & Ga & a \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, equal] & Sr \arrow[l, "v"'] & r \arrow[l, "S"'] \\
c & Sd \arrow[l, "g"] \arrow[u, dashed, "Sg'"] & d \arrow[l, "S"] \arrow[u, dashed, "g'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, equal] & FGa \arrow[l, "\epsilon_a"'] & Ga \arrow[l, "F"'] \\
a & Fx \arrow[l, "\phi^{-1}(g)"] \arrow[u, dashed, "Fg"] & x \arrow[l, "F"] \arrow[u, dashed, "g"]
\end{tikzcd}
$$

これらから明らかなように、c から S への普遍射 $\langle \mathrm{r}, u\rangle$ に対応するものは、x から G への普遍射 $\langle F\mathrm{x}, \eta_{\mathrm{x}}\rangle$ であり、S から c への普遍射 $\langle \mathrm{r}, v\rangle$ に対応するものは、F から a への普遍射 $\langle G\mathrm{a}, \epsilon_{\mathrm{a}}\rangle$ である。

実際、随伴関手との絡みで普遍射の構成要素 u、v はそれぞれ unit、co-unit と称するものであるが、立体図での η_{x} や ϵ_{a} の構成法 (即ち、恒等射に由来すること) を考慮すれば理解が増すであろう。

実は、η は $I_{\mathbf{X}} \longrightarrow GF$(ここで $I_{\mathbf{X}}$ は圏 $\mathbf{X}$ の恒等関手) という自然変換でもあり、同様に ϵ は $FG \longrightarrow I_{\mathbf{A}}$ という自然変換でもある。

3.5 立体図の統合

立体図に関する次の、そして最後の段階は、上記の 2 種類の立体図 (即ち、η 関連立体図および ϵ 関連立体図) を統合して 1 つにすることである。

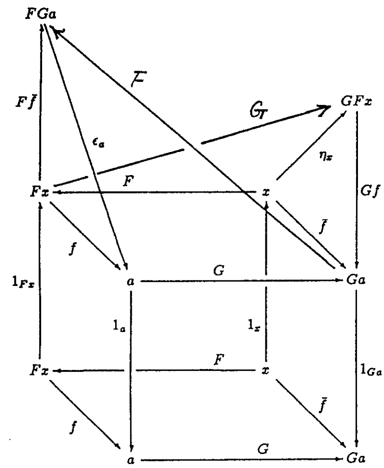
そのためには、自然同型 ϕ が成立していることの同型対応の枠組みを基盤とし、適宜恒等射を導入していけばよい。また、射 g は $f=\phi^{-1}(g)$ として射 f に吸収させ、かつ、ϕf は $\bar{f}$ と表記することにする。そのようにして、次の左側の立体図が得られることになる。

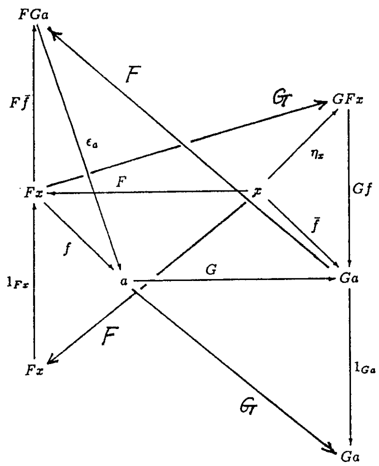
同図で、右側面は圏 $\mathbf{X}$ 側、左側面は圏 $\mathbf{A}$ 側であり、両側面を連絡するものが 2 種類の関手 F, G である。

f と $\bar{f}$ とを両関手で結ぶ四辺形が自然同型 ϕ であるのみならず、η_{x} と $1_{F\mathrm{x}}$ とを両関手で結ぶ捩れ四辺形や、ϵ_{a} と $1_{G\mathrm{a}}$ とを両関手で結ぶ捩れ四辺形も実は自然同型である。

これら 3 種類の自然同型の四辺形をより明示的にするため、不要な射や関手を除去して整理したものが、右隣の立体図である。同図での $F\bar{f}$ や Gf の "柱" も前述の四辺形の表示自体には不要であろうが、"屋根" の頂点の位置付け

を明確にするために残してある。

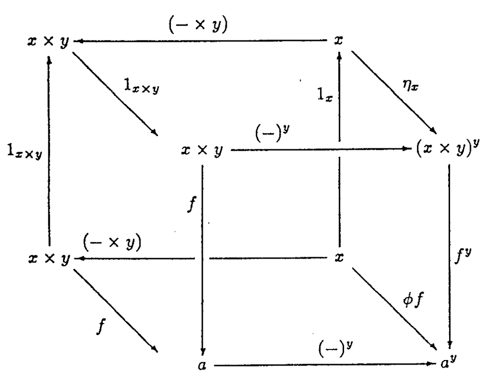


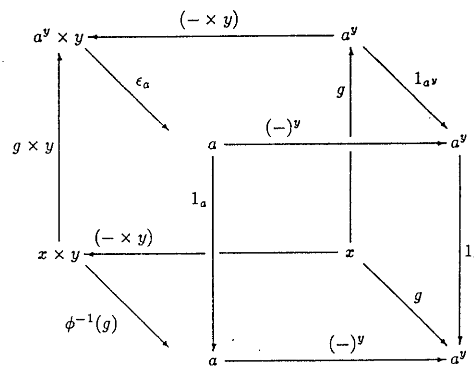


4　関数型言語と立体図

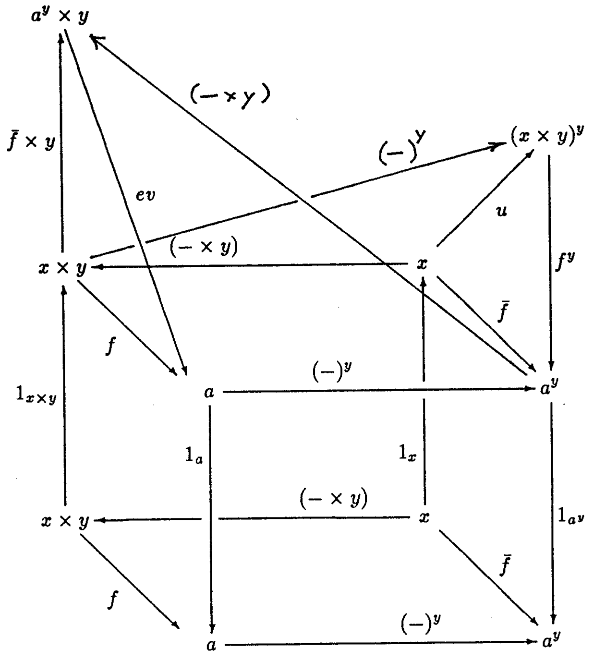
関数型言語 (即ち本稿ではラムダ計算と同一視) に関連する随伴関手は、既述の定義において F に相当するものが関手 (- × y)、 G に相当するものが関手 $(-)^y$ である。即ち、関手 (- × y) は関手 $(-)^y$ の左随伴、関手 $(-)^y$ は関手 (- × y) の右随伴である。(これらの関手の由来については後述する。)

これをもとにして、随伴関手の定義に登場した自然変換 ϕ に関する2種類の立体図を描くと次図のようになる。





今度は、最終目標である統合版の立体図を描くと次図のようになる。



関手 (- × y) がｙに関する application(即ち、ｙを引数として後置させること) に、関手 $(-)^y$ がｙに関する abstraction(即ち、ｙを定義域とする関数化) に、それぞれ対応していることは式の形から明らかである。

そして、圏Ｘの対象ｘは単なる関数名 (まだ関数化されていない状態)、圏Ａの対象ａは application の結果 (あるいは評価値)、圏Ａの射 ev は既に関数化された関数名 (即ち、a^y) と引数 (即ち、y) との application により評価値 (即ち、a) を得ることに相当する evaluation map、圏Ａの射 f は単なる関数名 (即ち、x) と引数 (即ち、y) との application(juxtaposition[並置] とでも称する状態) により評価値 (即ち、a) を得ること (concatenation 操作とでもいうべきもの)、圏Ｘの射 $\bar{f}$ は単なる関数名 (即ち、x) を関数化 (ただし、定義域がｙで余域がａとなる関数) させる abstraction(または Curry 化)、にそれぞれ対応していることも認識できる。

圏Ｘの射 u の直観的解釈は難しいが、もとの立体図で考えれば、要するに関手を F,G の順序で対象ｘに適用することであるから、単なる関数名ｘを引数ｙと application(並置) してからｙに関して abstraction することである。

圏Ｘの射 f^y の直観的解釈も難しいが、引数ｙに関する abstraction はそのままで、対の内容である並置形 (即ち、x × y) を評価値 (即ち、a) に変換させることである。

一方、圏Ａの射 ($\bar{f}$ × y) の直観的解釈は、既に巾の存在公理のところでも言及したように、引数ｙを後置させたままで単なる関数名ｘを関数化 (ただし、定義域がｙで余域がａとなる関数) させることである。

ここで、関手 (- × y) および $(-)^y$ の由来について説明しよう。

実は、随伴関手の定義での自然同型の関係式において、２つの圏 **A**,**X** を１つの圏 **C** として書き直せば、その関係式の成立を許すような圏 **C** がカルテシアン閉包圏に他ならないのであり、そのときに登場する随伴関手が (- × y) および $(-)^y$ となる次第である。

具体的に言えば、次のような自然同型が成立している圏 **C** をカルテシアン閉包圏と定義するのである。

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathrm{x} \times \mathrm{y}, \mathrm{a}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathrm{x}, \mathrm{a}^{\mathrm{y}})$$

即ち、関手 (- × y) および $(-)^y$ を用いて書き直せば

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}((-\times \mathrm{y})\mathrm{x}, \mathrm{a}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathrm{x}, (-)^{\mathrm{y}}\mathrm{a})$$

となり、随伴関手の定義における自然同型の関係式において、(- × y), $(-)^y$ をそれぞれ F,G とすれば確かに一致している。

そのとき、関数名 (即ち、x)、引数 (即ち、y)、ならびにそれらの評価結果 (即ち、a) の同一視ということが、立体図における同一圏 **C** 内での関手経由の交流という形で表現されていることになる。

5 おわりに

関数型言語の振舞いを圏論の世界で眺めるため、関数型言語をラムダ計算と同一視させ、ラムダ計算の圏論モデルとしての基本であるカルテシアン閉包圏を定義して、その圏論上の操作とラムダ計算との関連を述べた。そして、普遍射と随伴関手の概念をやや詳細に説明したあと、両者の関係を同一の場で概観できる立体図を導入して、それらの概念の役割が把握しやすくなることを意図した。

圏論の創始者の一人とされる MacLane[1] によれば、普遍射や随伴関手の概念で把握できる (数学的) 事象が少なくない (あるいは多い) ということで、これらの概念の重要性を力説しているが、本稿の事例はその典型的なものであろう。

尚、本稿の圏図でも Taylor[8] を活用させていただいたことを付言しておく。

References

[1] S.MacLane:"Categories for the Working Mathematician", Springer-Verlag, 1971.

[2] 竹内外史："層・圏・トポス"、日本評論社,1978.

[3] R.Goldblatt:"Topoi", North-Holland, 1979.

[4] H.P.Barendregt:"The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics", North-Holland, 1984.

[5] C.P.J.Koymans:"Models of the Lambda Calculus", Information and Control, 52, 306-332(1982).

[6] 疋田輝雄："カテゴリ理論とプログラミング — カルテシアン閉カテゴリー"、コンピュータソフトウェア、Vol.8, No.1,1991.

[7] 杉藤芳雄："関数型言語の風景"、電子情報通信学会ソフトウェアサイエンス研究会、ss91-35(1992 年 3 月 23 日)

[8] P.Taylor:"Commutative Diagrams in TEX", Imperial College of Science, Technol ogy and Medicine, 1990.