ソフトウェア工学 90－16
（1993. 2. 5）

関数型言語と写像について

杉藤　芳雄
電子技術総合研究所　情報アーキテクチャ部　言語システム研究室

あらまし　関数型言語の基本的な構造および機能について、写像関係を中心とする見方、即ち、特に圏論の基本概念に基づく観点から、視覚的に把握することを重視しつつ概観する。先ず、関数型言語をラムダ計算と同一視したあと、圏論におけるラムダ計算の基本モデルとして知られるカルテシアン閉包圏を写像関係で把握するために、随伴関手および普遍射という圏論の重要概念を共存させた３次元的可換図(立体図と称する)をやや詳細に導入し、最後に立体図の意義を考察する。

On Functional Languages and Mappings

Yoshio SUGITO
Computer Language Section, Computer Science Division
ELECTROTECHNICAL LABORATORY
1-1-4 Umezono, Tsukuba-shi, Ibaraki-ken, 305, JAPAN

Abstract　We review the basic structures and functions of functional language from the mapping oriented view, that is, the point of view based on the fundamental concepts in category theory, emphasizing their visual grasp. First of all we identify functional language with λ-calculus, and then we intend to grasp in the frame of mapping relations Cartesian closed category which is known as a kind of categorical models for λ-calculus. To do this, we introduce rather precisely a three-dimensional commutative diagram where coexist the important concepts of category theory, that is, adjoint functor and universal arrow, and finally discuss its significance.

1　はじめに

関数型言語は既に一定の評価が確立された言語ではあるものの、その基本的な形式あるいは構造 (syntax の領域) と、振舞いあるいは機能 (semantics の領域) とを見直すことは無益ではあるまい。

ここでは、写像関係を重視する見方で検討を進めていくことにするが、一口に写像に力点を置くと言うだけでは、そもそも関数型言語自体が“写像”そのものだという考え方が成立し得るし、例えば写像理論 [1] という分野も存在している。

そこで以降では、特に圏論 (category theory)[2][3][4][5] の基本概念に基づく写像関係を採用することにして、関数型言語の写像関係を視覚的に把握しようという試み [7] を、圏論上の写像の捉え方になるべく忠実かつ理解しやすい形態で補強していくことにする。

従来同様、圏論に殆どなじみのない読者にも多少はその雰囲気を理解していただくため、図解をできる限り添えて述べていく。

以降では、関数型言語の取扱い方について軽く触れたあと、圏論の基本的な概念およびその考え方を、とくに随伴関手に重点を置きつつ段階的に進めていき、最終的には関数型言語の写像関係図である“立体図”を導入して、その意義を検討する。

2　関数型言語の考え方

関数型言語とは、関数名とその引数という対が syntax 上の基本構造になっており、semantics 上でもその対の振舞いを基本としていて、特に関数名は引数という入力から評価値という出力を写像する機能 (まさに関数そのもの) を有しており、しかも引数として関数名 (正確には、関数名と引数との対、より正確には評価値) をも許容することで機能に厚みを増しているものである、と見ることができよう。

このような引数と関数名 (最終的には評価値) との同一視という考え方が、理論的な興味の対象となることは必然であり、実際に各種の数学的モデルが提案されてきた。

一例として、ラムダ計算 (λ-calculus)[6] では、関数型言語が対を基本構造としているという側面に関しては、２つのデータを並置した対を基本単位とし、全体は基本単位の重ね合わせにより構成できるものとして、この対の形態を application と称している。また、関数型言語において、この対における関数名というデータが実際に関数たり得る作用 (即ち、写像) を引起こすためには、データの関数化という何らかの仕組みが必要となるという側面に関しては、ラムダ計算では、この仕組みのことを abstraction と称している。

以上のように、関数型言語の基本的な構造あるいは機能は、ラムダ計算を考えれば充分であるので、以降では関数型言語の基本として従来同様にラムダ計算を想定し、そこから圏論の世界への投影の一端を、段階的に見ていくことにする。

3　圏論の基礎の基礎

圏論の入口において、しばらくは基本的な定義をいくつか累積していく。本格的な定義等は成書に委ねることにして、ここでは当面必要なものに留めておく。(そもそも、圏の定義にしても、いくつかの流儀が存在している。)

[定義] $\mathcal{C}$ が圏 (category) であるとは、以下の６つの公理により規定されるものである。

1. 対象 (object) の集まり、および、射 (morphism)[または矢 (arrow)] の集まりがある。[以降、圏は $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ のように花文字体 (calligraphic) で、対象は a,b,c 等の小文字で、射は f,g,h 等のイタリックで、それぞれ表わすことにする。]
2. 任意の２つの対象 a,b に対して、射の集合 Hom(a,b) が定まる。$f \in$Hom(a,b) のとき、f は a から b への射であるといい、f: a$\longrightarrow$b あるいは a$\longrightarrow$b と表わす。[Hom(a,b) のことを b^a と表記することもある。]
3. 任意の射 f に対して、f:a$\longrightarrow$b となる対象 a,b がそれぞれ一意に定まる。このとき、a を f の定義域 (domain)、b を f の余域 (codomain) という。
4. 射 f:a$\longrightarrow$b, g:b$\longrightarrow$c に対して、$g \circ f$:a$\longrightarrow$c となる射 $g \circ f$ が定まる。これを射 f,g の合成という。[このとき f の余域と g の定義域との一致が前提である。]
5. 各対象 a に対して、射 1_{a}:a$\longrightarrow$a が定まり、射 f が f:a$\longrightarrow$b ならば $f\circ 1_{\mathrm{a}}=f$、射 g が g:b$\longrightarrow$a ならば $1_{\mathrm{a}} \circ g=g$ が成立する。1_{a} を a の恒等射という。
6. ３つの射 f:a$\longrightarrow$b, g:b$\longrightarrow$c, h:c$\longrightarrow$d に対して　$h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$ が成立する。 ■

3.1　自然変換

本稿での有効な概念の１つである自然変換の定義のために、まず関手 (functor) の定義から出発する。

[定義] 圏 $\mathcal{A}$ から圏 $\mathcal{B}$ への関手 F:$\mathcal{A}$ $\longrightarrow\mathcal{B}$ とは、対象 a$\in\mathcal{A}$ に対して対象 F(a)$\in\mathcal{B}$ が、射 $f\in\mathcal{A}$ に対して射 $F(f)\in\mathcal{B}$ が、それぞれ対応し、

1. f:a$\longrightarrow$a' に対し　$F(f)$:F(a)$\longrightarrow F$(a')
2. $F(1_a)=1_{F(a)}$,　$F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$

を満足するものである。

$\mathcal{A}$　　　　　　　　$\mathcal{B}$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & F(a) \arrow[d, "F(f)"] \\
a' \arrow[r, "F"'] & F(a')
\end{tikzcd}$$

■

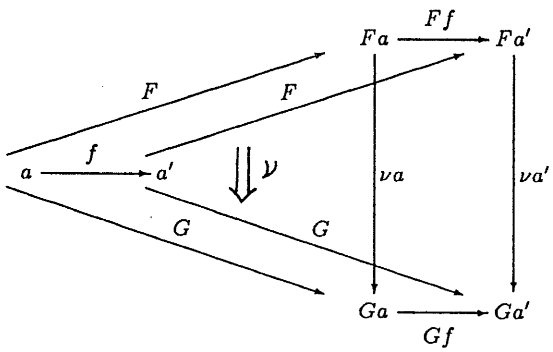
以降では、F(a), $F(f)$ を単に Fa, Ff と記す。そして、関手には F,G 等のように大文字イタリックを用いることにする。また、関手の合成や結合則等は射の場合と同様に定義されるので、省略する。

[定義] 圏 $\mathcal{A}$ から圏 $\mathcal{B}$ への２つの関手 F,G:$\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ に対して F から G への**自然変換** (natural transformation)ν とは、任意の対象 a$\in\mathcal{A}$ に対して νa:Fa$\longrightarrow G$a$\in\mathcal{B}$ が対応しており、任意の f:a$\longrightarrow$a'$\in\mathcal{A}$ に対し、次図が可換となることである。とくに、νa が常に同型射であるとき、ν は**自然同型** (natural isomorphism) であるという。

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & Fa \arrow[r, "\nu a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
a' & Fa' \arrow[r, "\nu a'"] & Ga'
\end{tikzcd}$$

■

圏論では前述の図を用いるのが慣例であるが、次図の方が自然変換の意味をより直観的に把握しやすくなるのではないかと考え、以降でも採用する。



3.2　随伴関手

本稿での鍵となる概念である随伴関手の定義にとりかかる。

[定義] $\mathcal{A},\mathcal{X}$ は圏、F,G は F:$\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{A}$, G:$\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{X}$ のような関手とする。

このとき、圏 $\mathcal{A}$ の総ての対象 a と圏 $\mathcal{X}$ の総ての対象 x に対して、次のような自然同型の対応が存在するならば、

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F\mathrm{x},\mathrm{a})\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathrm{x},G\mathrm{a})\qquad(\text{ここで、 a}\in\mathcal{A},\ \mathrm{x}\in\mathcal{X})$$

F,G は互に**随伴関手** (adjoint functor) であり、F は G の**左随伴** (left adjoint)、G は F の**右随伴** (right adjoint) である。

■

4 立体図

前章の随伴関手の定義での自然同型の対応を視覚的、直観的に理解するため、3次元的な可換図である“立体図”[7]という概念を導入するが、そのための準備として次のような圏を定義する。

[定義] 圏 $\mathcal{C}$ の双対圏 $\mathcal{C}^{op}$ とは、対象はもとの圏 $\mathcal{C}$ と同じであり、射については矢の向きを逆にしたものがもとの圏 $\mathcal{C}$ に存在する場合に限り存在すると定めるものである。 ■

[定義] 圏 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ の直積の圏 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ とは、対象として $\mathcal{A}$ の対象と $\mathcal{B}$ の対象との対 (a,b)、射として $\mathcal{A}$ の射と $\mathcal{B}$ の射との対 $[f,g]$ からなる圏である。 ■

例えば $\mathcal{A}$ の射 f:$\mathrm{a}_1 \longrightarrow \mathrm{a}_2$ と $\mathcal{B}$ の射 g:$\mathrm{b}_1 \longrightarrow \mathrm{b}_2$ から $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ の射を $[f,g]$:$(\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1) \longrightarrow (\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2)$ とする。

このとき、圏 $\mathcal{A}$ の双対圏 $\mathcal{A}^{op}$ と圏 $\mathcal{B}$ との直積の圏 $\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{B}$ における射 $[f,g]$:$(\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_1) \longrightarrow (\mathrm{a}_2,\mathrm{b}_2)$ は、次図のように射 h を考えることにすれば、$[f,g]$:$h \longrightarrow g\circ h\circ f$ として定義すればよい。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A} & \mathcal{B} & & \mathcal{A}^{op}\times\mathcal{B} & \\
\begin{tikzcd} a_1 \arrow[d, "f"'] \\ a_2 \end{tikzcd} &
\begin{tikzcd} b_1 \arrow[d, "g"] \\ b_2 \end{tikzcd} & &
\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, phantom, "{[f,g]}"] & b_1 \arrow[d, "g"] \\ a_2 \arrow[u, "f"] \arrow[r, dashed, "g\circ h\circ f"'] & b_2 \end{tikzcd} &
\begin{tikzcd} (a_1,b_1) \arrow[d, "{[f,g]}"] \\ (a_2,b_2) \end{tikzcd}
\end{array}$$

随伴関手の定義に戻ると、そこでの自然同型対応に登場する $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(-,G-)$ および $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F-,-)$ は、いずれも $\mathcal{X}^{op}\times\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{SET}$ という関手である。(ここで $\mathcal{SET}$ は集合の圏を意味する。)

両関手間の自然変換 ϕ を仮に次のように定めることにする。

$$\phi_{x,a}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F\mathrm{x},\mathrm{a}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathrm{x},G\mathrm{a})$$

ここで、ϕ が実際に自然変換の定義を満足していることは、次図のように考えると明らかである。

$$\begin{tikzcd}
 & & (Fx_1,a_1) \arrow[r, "{[Ff,g]}"] \arrow[dd, "\phi_{x_1,a_1}"] & (Fx_2,a_2) \arrow[dd, "\phi_{x_2,a_2}"] \\
(x_1,a_1) \arrow[r, "{[f,g]}"] \arrow[urr, "Hom_{\mathcal{A}}(F-,-)"] \arrow[drr, "Hom_{\mathcal{X}}(-,G-)"'] & (x_2,a_2) \arrow[urr, "Hom_{\mathcal{A}}(F-,-)"] \arrow[drr, "Hom_{\mathcal{X}}(-,G-)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\phi"] & & \\
 & & (x_1,Ga_1) \arrow[r, "{[f,Gg]}"'] & (x_2,Ga_2)
\end{tikzcd}$$

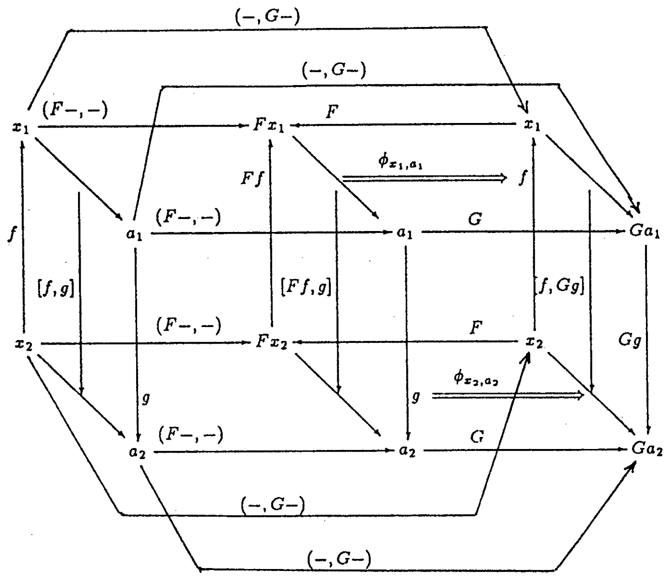
$\mathcal{X}^{op}\times\mathcal{A}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{SET}$

前図は、次図のようにも変形できる。

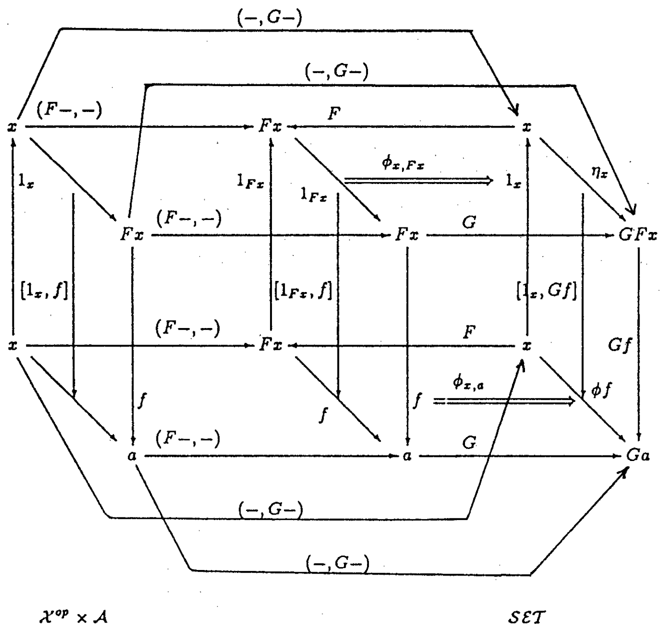
$$\begin{tikzcd}
(x_1,a_1) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(F-,-)"] \arrow[d, "{[f,g]}"'] \arrow[rr, bend left, "Hom_{\mathcal{X}}(-,G-)"] & (Fx_1,a_1) \arrow[r, "\phi_{x_1,a_1}"] \arrow[d, "{[Ff,g]}"] & (x_1,Ga_1) \arrow[d, "{[f,Gg]}"] \\
(x_2,a_2) \arrow[r, "Hom_{\mathcal{A}}(F-,-)"'] \arrow[rr, bend right, "Hom_{\mathcal{X}}(-,G-)"'] & (Fx_2,a_2) \arrow[r, "\phi_{x_2,a_2}"'] & (x_2,Ga_2)
\end{tikzcd}$$

更に、次図のように3次元的に変形することもできる。(ここで $\mathrm{Hom}_{\mathcal{X}}(-,G-)$ 等は $(-,G-)$ 等のように略記して

いる。この略記法は以降でも多用する。)



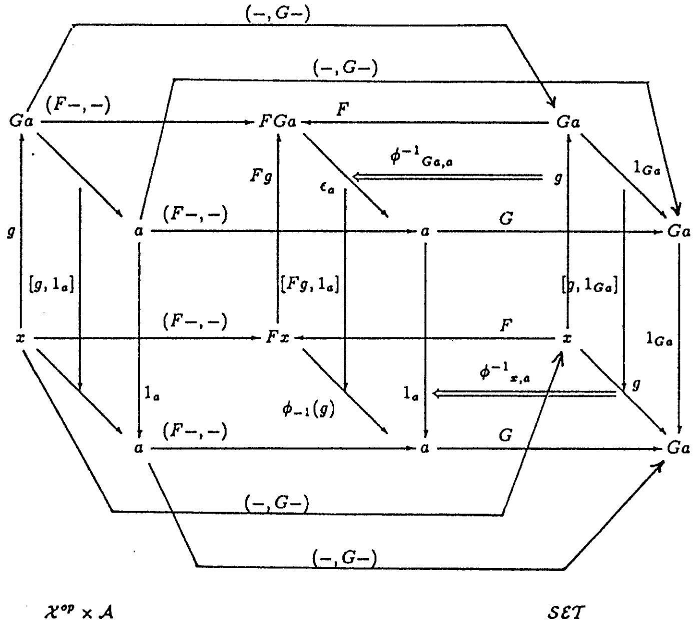
このとき、a=Fx と置き、f:Fx⟶a とするときの自然変換 ϕ に関する 3 次元的可換図を構成すると次図が得られる。



同図で可換が成立すること (即ち、自然であること) とは、右半分の直方体において、左側面 $[1_{Fx}, f]$ および右側面 $[1_x, 1_{Gf}]$ を下方向の射とみなし、上面 $\phi_{x,Fx}$ および底面 $\phi_{x,a}$ を右方向の射とみなすとき、上面と右側面との射の合成が、左側面と底面との射の合成と等しくなることである。即ち、$[1_x, Gf] \circ \phi_{x,Fx} = \phi_{x,a} \circ [1_{Fx}, f]$ が成立している。同直方体の右上辺の射 η_x は左上辺の射 1_{Fx}(即ち、Fx の恒等射) の自然変換の結果である。即ち、$\eta_x = \phi\ (1_{Fx})$ が成立している。

この状況において、上述の右半分の直方体だけを抽出したものが、[7]で"立体図"と呼ぶものである。立体図は、いわば随伴関手に付随する写像関係のエッセンスを詰めた箱とでも言えよう。今の場合の立体図を ϕ 立体図と称することにする。

同様にして、自然変換 ϕ が逆方向にも成立する(即ち、自然同型である)場合の可換図は、その逆向き自然変換(上記の ϕ の定義式の矢印を逆にしたもの)を ϕ^{-1} と記すことにして、x=Ga と置き、g:x⟶ Ga として構成すれば、次の3次元的可換図が得られる。

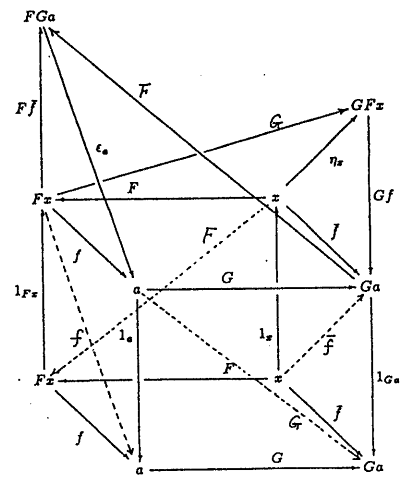


同図で可換が成立すること(即ち、逆向きでの自然であること)とは、右半分の直方体において、左側面および右側面をやはり下方向の射とみなし、上面および底面を今度は左方向の射(即ち、ϕ^{-1})とみなすとき、上面と左側面との射の合成が、右側面と底面との射の合成と等しくなることである。

即ち、$[Fg, 1_a]\circ\phi^{-1}{}_{Ga,a} = \phi^{-1}{}_{x,a}\circ[g, 1_{Ga}]$ が成立している。同直方体の左上辺の射 ϵ_a は右上辺の射 1_{Ga}(Ga の恒等射)の(逆向き)自然変換である。即ち、$\epsilon_a=\phi^{-1}(1_{Ga})$ が成立している。

この状況において、上述の右半分の直方体だけを抽出したものもやはり"立体図"に相当しており、この場合は ϕ^{-1} 立体図と呼ぶことにする。

尚、[7]では上記の2種類の立体図(ϕ 立体図および ϕ^{-1} 立体図)を、統合して1つの立体図にしている。ここでは、その結果だけを示す。



5　関数型言語と写像関係

カルテシアン閉包圏 (CCC: Cartesian Closed Category) は、2章で言及した引数と関数名 (最終的には評価値) との同一視という考え方を表現する数学的モデル (即ち、圏論的モデル) の一例である。つまり、ラムダ計算の abstraction や application の概念が (常に) 成立するような“場”を提供するものである。

関数型言語をラムダ計算と同一視することから、関数型言語における随伴関手とはラムダ計算における随伴関手、即ち、カルテシアン閉包圏に随伴関手がどのように組込まれているかを見ることに他ならない。先ず、カルテシアン閉包圏を定義したあと、それを随伴関手の世界に投影し、最後は立体図に配置する。

5.1　カルテシアン閉包圏

準備として、いくらかの概念の定義を行なう。

[定義] 圏 C の対象 i が始対象 (initial object) であるとは、C 内の任意の対象 x に対して射 i_x:i⟶x が唯一存在することをいう。双対的に、圏 C の対象 t が終対象 (terminal object) であるとは、C 内の任意の対象 x に対して射 t_x:x⟶t が唯一存在することをいう。 ■

[定義] 圏 C の対象 a,b に対して、次の2つの条件を満足する対象 a×b が C のなかに存在すれば、それを a,b の直積という。[次図参照。同図で点線矢印 h は唯一存在の射を意味する。]

1. 射 p:a×b⟶a, q:a×b⟶b がある。

2. 任意の2つの射 f:d⟶a と g:d⟶b に対して、f=$p\circ h$, g=$q\circ h$ を満足する射 h:d⟶a×b が唯一存在する。この h を $\langle f,g\rangle$ で表現する。

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[d, dashed, "{\langle f,g\rangle\ h}"] & \\
a & a\times b \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & b
\end{tikzcd}$$

■

以上の準備によりカルテシアン閉包圏の定義を行なう。

[定義] 圏 C がカルテシアン閉包圏 であるとは、C が以下の条件を満たすとき、かつ、そのときに限る。[次図参照。]

1. 終対象 t をもつ。

2. 任意の対象 a,b に対し、直積対象 a×b および射 p:a×b ⟶a, q:a×b⟶b が存在し、かつ、任意の対象 d からの射 f:d⟶a と g:d⟶b に対して、唯一の射 $\langle f,g\rangle$:d⟶a×b が存在し、$p\circ\langle f,g\rangle=f$, $q\circ\langle f,g\rangle=g$ が成立する。

3. 任意の対象 a,b に対し、巾対象 b^{a} および射 e:b^{a} ×a⟶b が存在し、かつ、d を任意の対象とするときの総ての射 f:d×a⟶b に対して唯一の射 $\bar{f}$:d ⟶b^{a} が存在し、f=$e\circ\langle\bar{f}\circ p,q\rangle$ が成立する。

$$\begin{tikzcd}
 & b^a\times a \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] \arrow[drr, "e"] & & \\
b^a & & a & b \\
d \arrow[u, "\bar{f}"] & d\times a \arrow[l, "p"] \arrow[ul, "\bar{f}\circ p"] \arrow[uu, dashed, "{\langle \bar{f}\circ p,q\rangle}"] \arrow[ur, "q"'] \arrow[urr, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

■

5.2 カルテシアン閉包圏と立体図

前節のカルテシアン閉包圏の定義に随伴関手の概念を適用する訳であるが、実は随伴関手の定義において、2つの圏$\mathcal{A},\mathcal{X}$を1つの圏$\mathcal{C}$で置き換え、巾と直積に関する自然同型の関係式として書き直せば、その関係式の成立を許すような圏$\mathcal{C}$がカルテシアン閉包圏に他ならないのである。具体的には、次のような自然同型が成立している圏$\mathcal{C}$をカルテシアン閉包圏と定義する。($\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}$は、いずれも$\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{SET}$という関手。)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x \times y, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, a^y)$$

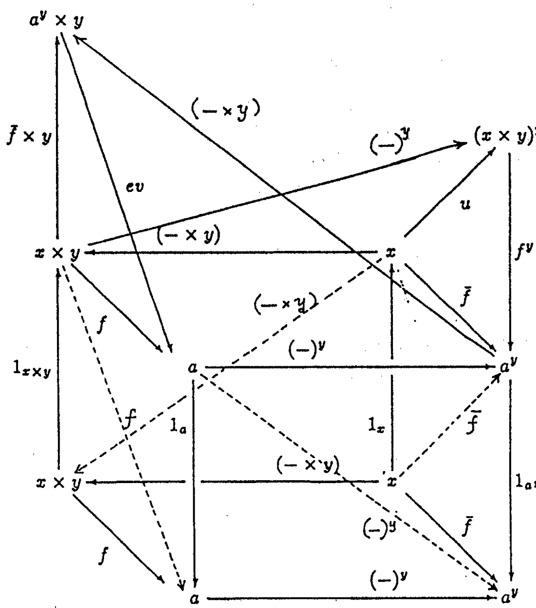
ここで、関手$(- \times y)$および$(-)^y$を用いて上式を書き直せば

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((- \times y)x, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, (-)^y a)$$

となり、随伴関手の定義での自然同型の関係式において、$(- \times y)$, $(-)^y$をそれぞれF,Gとすれば確かに定義を満たしている。即ち、関手$(- \times y)$は関手$(-)^y$の左随伴、関手$(-)^y$は関手$(- \times y)$の右随伴である。

この結果を前章末尾の統合立体図に適用すると右図のようになる。関数型言語あるいはラムダ計算の世界との対応をつけると、関数名x、引数y、ならびに評価値aが、圏$\mathcal{C}$内での関手あるいは射を経由しての輪廻という形で表現されている。

関手$(- \times y)$はyに関するapplication(即ち、引数yの後置)に、関手$(-)^y$はyに関するabstraction(即ち、定義域yでの関数化)に、それぞれ対応している。



6 おわりに

関数型言語を写像中心の世界、即ち、圏論の世界で眺めるため、関数型言語をラムダ計算と同一視させ、ラムダ計算の圏論モデルとして知られるカルテシアン閉包圏を写像関係でできるだけ視覚的に把握することを目論んだ。そこで、そのための鍵となる概念である随伴関手をやや詳細に段階的に追求する過程で、写像関係理解の宝庫としての"立体図"を導入した。(このあたりの著述が本稿の主要部であると考えている。)そして、カルテシアン閉包圏を随伴関手の枠組みで視覚的に把握するために、その立体図を構成した。

紙面の制約から、今回は、もう一つの鍵となる概念の普遍射(universal arrow)には意識的に全く言及しなかったが、ご関心の向きには[7]をも参照されたい。

本稿でも、圏図にTaylor[8]を活用させていただいたことを付言しておく。

References

[1] K.Grue:"Map theory", Theoretical Computer Science, 102, 1-133(1992).

[2] S.MacLane:"Categories for the Working Mathematician", Springer-Verlag, 1971.

[3] 竹内外史:"層・圏・トポス"、日本評論社,1978.

[4] R.Goldblatt:"Topoi", North-Holland, 1979.

[5] 河田敬義:"ホモロジー代数"、岩波書店,1990.

[6] H.P.Barendregt:"The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics", North-Holland, 1984.

[7] 杉藤芳雄:"関数型言語の風景[II]"、電子情報通信学会ソフトウェアサイエンス研究会(情報処理学会ソフトウェア工学研究会と共催)、SS92-14(1992年9月29日)

[8] P.Taylor:"Commutative Diagrams in TEX", Imperial College of Science, Technology and Medicine, 1990.