

# 多面体の共通展開図の非存在性

Elena Arseneva<sup>1</sup> Erik D. Demaine<sup>2</sup> 鎌田 斗南<sup>3,a)</sup> 上原 隆平<sup>3,b)</sup>

**概要:** 多面体の表面を辺に限らず自由に切り開いて得られる多角形を展開図と呼ぶ。展開図についての重要な問題の一つに、共通展開図問題がある。これは、与えられた2つの多面体に対して、共通の多角形を展開図を持つかどうかを問う問題である。共通展開図をもつ多面体のペアがいくつか知られている一方、共通展開図を持たない多面体のペアは一つも知られていない。本稿では、多面体の間に共通展開図が存在しないことを証明するための手法を提案する。

## Nonexistence of Common Unfolding Between Polyhedra

ELENA ARSENEVA<sup>1</sup> ERIK D. DEMAINE<sup>2</sup> TONAN KAMATA<sup>3,a)</sup> RYUHEI UEHARA<sup>3,b)</sup>

### 1. 導入

2つの多面体のペア  $Q^0, Q^1$  に対して、 $Q^0, Q^1$  が合同な多角形を展開図を持つ時、 $Q^0$  と  $Q^1$  は共通展開図を持つという。ここで、多面体  $Q^i$  の展開図とは、 $Q^i$  の表面を（辺に限らず）自由に切り開くことで得られる多角形のことである。共通展開図についての研究は数多く行われており、いくつかの多面体のペアの間に共通展開図が存在することが示されている [1][2][3][4][5]。しかし、共通展開図の非存在性、つまり2つの多面体が共通展開図を持たないことは、いかなる多面体のペアの間でも証明されていない。これは、一つの多面体から得られる展開図が連続的な選択肢を持ち、全探索による検証が困難であることに起因する。本稿稿では、代数的かつ有理数上線形独立な内角を持つ三角形二面体を対象として、共通展開図の非存在性を示す。これは、2つの多面体の間で共通展開図が存在しないことを示した初めての結果である。

### 2. 準備

#### 2.1 三角形二面体

本稿では、三角形二面体と呼ばれる多面体のクラスを対

象とする。三角形二面体とは、2枚の合同な三角形の対応する辺を張り合わせることで得られる体積0の多面体である (Figure 1)。  $Q^0, Q^1$  を三角形二面体のペアとし、  $Q^i$  の頂点を  $v_0^i, v_1^i, v_2^i$  とする。また、各面での  $v_j^i$  における内角の和を  $\theta_j^i$  で表す。つまり、  $Q^i$  の片面において、  $v_j^i$  における内角は  $\frac{\theta_j^i}{2}$  である (図1)。それぞれの辺長は、  $Q^0, Q^1$  の表面積が一致するように定められているものとする。

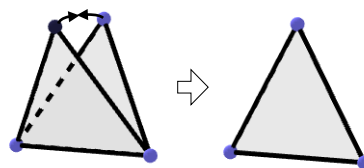


図1 三角形二面体

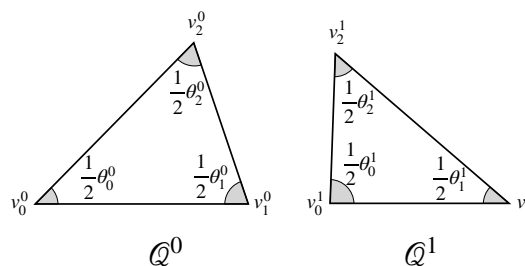


図2 三角形二面体のペア

<sup>1</sup> St Petersburg State University

<sup>2</sup> CSAIL, MIT

<sup>3</sup> Japan Advanced Institute of Science and Technology

a) kamata@jaist.jp

b) uehara@jaist.jp

三角形二面体  $Q^0, Q^1$  が代数的かつ独立であることを次で定義する.

- 1) 三角形二面体  $Q^i$  が代数的であるとは,  $\theta_0^i, \theta_1^i \in \mathbb{Q}^*$  が成り立つことである. ここで,  $\mathbb{Q}^*$  は  $\mathbb{Q}$  上の代数閉体である. ( $\theta_2^i = 2\pi - (\theta_0^i + \theta_1^i)$  が成り立つことから,  $Q^i$  が代数的であるとき,  $\theta_2^i \notin \mathbb{Q}^*$  となることに注意する).
- 2) 2つの三角形二面体  $Q^0, Q^1$  が独立であるとは,  $\forall m_i (\neq 0) \in \mathbb{Q}, m_0\theta_0^i + m_1\theta_1^i + m_3\theta_0^i + m_4\theta_1^i \neq 0$  が成り立つことである.

以下,  $Q^0, Q^1$  はどちらも代数的であり,  $Q^0$  と  $Q^1$  は独立であるとする. つまり,  $Q^0, Q^1$  はいずれも二等辺三角形でなく, 全ての内角が  $\pi$  の有理数倍ではない. 例えば,  $(\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \theta_0^1, \theta_1^1, \theta_2^1) = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\pi - \sqrt{2} - \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 2\pi - \sqrt{5} - \sqrt{7})$  としたとき,  $Q^0, Q^1$  は独立かつ代数的である.

## 2.2 切断木

三角形二面体  $Q^i$  を多角形  $P$  に展開するとき, 切断線を形成する  $Q^i$  の表面上の点集合を  $T^i$  で表す. この時,  $T^i$  は  $Q^i$  の表面における木構造をなす [1].  $Q^i$  が三角形二面体であることから,  $T^i$  の形状は, 面の中に次数3の頂点  $b^i$  を持つ木グラフ (Y-form) か, 多面体の全ての頂点を通るパス (V-form) のいずれかに分類される (図3).

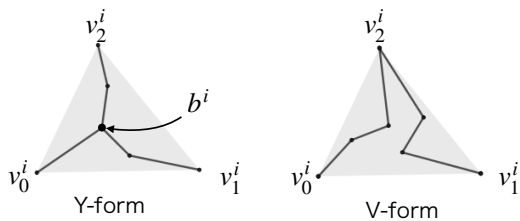


図3 三角形二面体の切断木の形状

## 3. Result

本稿では, 次の定理を示す.

**定理1**  $Q^0, Q^1$  を独立かつ代数的な三角形二面体であるとする.  $Q^0, Q^1$  は共通展開図を持たない.

$Q^0, Q^1$  がそれぞれ切断木  $T^0, T^1$  によって多角形  $P$  に展開できると仮定し, 矛盾を導く. 前述の通り,  $T^i$  の形状は Y-form か V-form のいずれかである. 本稿では,  $T^0, T^1$  が共に Y-form である場合のみを扱う (残りの場合については Appendix A.1 を参照せよ).

$P$  が多面体  $Q^i$  の  $T^i$  による展開図であることから,  $\partial(P)$  の点は  $Q^i$  上で  $T^i$  上の点に対応する. この対応関係を  $f^i: \partial(P) \rightarrow T^i$  で表す.  $T^i$  が Y-form であることから, 各  $v_j^i \in T^i$  には,  $f^i(l_j^i) = v_j^i$  を満たす点  $l_j^i \in \partial(P)$

が存在する. また,  $T^i$  の次数3の頂点  $b^i$  に対して,  $b^i = f^i(m_0^i) = f^i(m_1^i) = f^i(m_2^i)$  を満たす点  $m_j^i \in \partial(P)$  が存在する. ここで,  $L^i := \{l_0^i, l_1^i, l_2^i\}, M^i := \{m_0^i, m_1^i, m_2^i\}$  と定める (図4). それぞれの  $i = 0, 1$  に対して,  $l_j^i$  と  $m_j^i$  は  $P$  の周上で反時計回りに  $m_0^i, l_0^i, m_1^i, l_1^i, m_2^i, l_2^i$  の順に並んでいると仮定しても一般性を失わない. また, それぞれの  $i = 0, 1$  に対して,  $\angle(l_j^i) = \theta_j^i, \angle(m_0^i) + \angle(m_1^i) + \angle(m_2^i) = 2\pi$  が成り立つ.

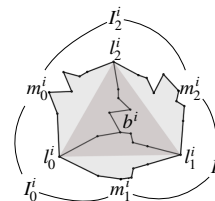


図4  $L^i = \{l_0^i, l_1^i, l_2^i\}, M^i = \{m_0^i, m_1^i, m_2^i\}$

ここで,  $T^i$  によって定められる  $P$  の周上の自己写像  $gl^i: \partial(P) \rightarrow \partial(P)$  を次で定める.

**定義2** (Glueing map)

- $p \in L^i \cup M^i$  ならば,  $gl^i(p) := p$  と定める.
- $p \notin L^i \cup M^i$  ならば,  $f^i(p) = f^i(p')$  を満たす  $p'$  が一意的に決まるので,  $gl^i(p) := p'$  と定める.

$gl^i$  は,  $p \in \partial(P)$  に対して,  $P$  の周上を貼り合わせて  $Q^i$  を得るときに  $p$  に接着される点を与える写像を表している. よって,  $p \notin L^i \cup M^i$  ならば,  $\angle(p) + \angle(gl^i(p)) = 2\pi$  が成り立つ.

### 3.1 Spreading Sequence

$P$  が多面体  $Q^0, Q^1$  の両方の展開図であるという仮定から,  $P$  の周上には, 2つの自己写像  $gl^0, gl^1$  が定められる. ここで,  $l_j^i$  に対して,  $gl^{i+1}$  を適用して得られる点  $gl^{i+1}(l_j^i)$  を考える\*1.  $gl^{i+1}(l_j^i)$  の内角は,  $\angle(l_j^i) + \angle(gl^{i+1}(l_j^i)) = 2\pi$  より,  $2\pi - \theta_j^i$  である. また,  $gl^i(gl^{i+1}(l_j^i))$  の内角は,  $2\pi - (2\pi - \theta_j^i) = \theta_j^i$  である. このように,  $l_j^i$  に  $gl^{i+1}$  と  $gl^i$  を適用する操作を,  $\bigcup_i L^i \cup M^i$  の点 that 得られるまで繰り返すことで, 奇数番目の内角が  $\theta_j^i$ , 偶数番目の内角が  $2\pi - \theta_j^i$  である点列が得られる. この列を  $l_j^i$  の Spreading Sequence と呼び,  $spr(l_j^i)$  で表す. ここで  $Q^0, Q^1$  が独立であることに注目すると, 異なる Spreading Sequence では点 that 共有されないことがわかる. 従って, Spreading Sequence の終点が  $\bigcup_i L^i$  の点となることはない. ここで, Spreading Sequence を改めて次で定義する.

**定義3** (Spreading Sequence)

$l_j^i$  の Spreading Sequence  $spr(l_j^i)$  とは,  $l_j^i$  に対して,  $\bigcup_i M^i$  に含まれる点 that 得られるまで,  $gl^{i+1}$  と  $gl^i$  を繰り返し適用して得られる点の列である.

\*1 添字においては, 2の剰余系をとる.

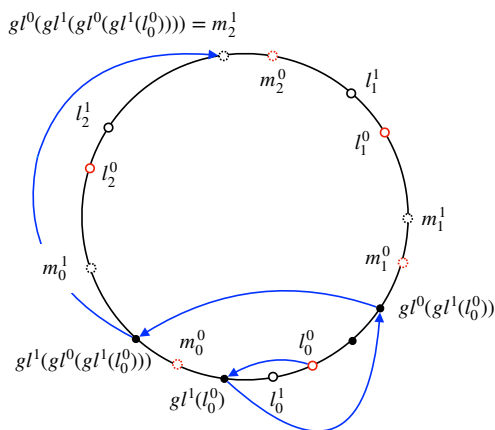


図 5  $l_0^0$  の Spreading Sequence

定義より、 $P$  の周上には 6 つの Spreading Sequence が定義され、それぞれが異なる  $\cup_i M^i$  の要素を終点にもつ。ここで、次の命題が成り立つ。

**系 4**  $spr(l_0^0), spr(l_1^0), spr(l_2^0)$  の終点は  $M^1$  に含まれ、 $spr(l_0^1), spr(l_1^1), spr(l_2^1)$  の終点は  $M^0$  に含まれる。

**証明**  $spr(l_j^i)$  の終点の内角は、長さが奇数のときには  $\theta_j^i$ 、偶数の時には  $2\pi - \theta_j^i$  である。また、それぞれの  $i$  において  $\angle(m_0^i) + \angle(m_1^i) + \angle(m_2^i) = 2\pi$  が成り立つ必要がある。 $Q^0, Q^1$  が独立であることから、 $\theta_j^i, \overline{\theta}_j^i$  の 3 つ組の中で和が  $2\pi$  となるのは、 $\theta_0^i + \theta_1^i + \theta_2^i$  と  $\overline{\theta}_0^i + \overline{\theta}_1^i + \overline{\theta}_2^i$  のみである。従って、それぞれの Spreading Sequence は奇数長であり、 $M^i$  の要素を終点にもつ 3 つの Spreading Sequence の組合せは、 $spr(l_0^{i+1}), spr(l_1^{i+1}), spr(l_2^{i+1})$  に限られる。□

以上の考察より、各 Spreading Sequence は奇数長である。従って、Spreading Sequence の要素数の総和は 4 の倍数ではない偶数である。

ここで、Spreading Sequence に含まれる点の集合  $S_j^i := \{p : p \in spr(l_j^i)\}$  に対して、次の補題が成り立つ。

**補題 5**  $\cup_{i,j} S_j^i$  の要素は、 $P$  の周に等間隔に現れる。また、 $\cup_j S_j^0$  と  $\cup_j S_j^1$  の要素は交互に現れる。

**証明** まず、それぞれの  $i$  について、 $\cup_j S_j^i$  が  $P$  の周上に等間隔で現れることを示す。

$i = 0, 1$  を一方に固定する。 $p \in \cup_j S_j^i$  に対して、 $P$  の周上で最も近い  $\cup_j S_j^i$  の要素までの距離を  $d_+(p)$  とする。時計回りに対しても同様に  $d_-(p)$  とする。 $\cup_j S_j^i$  の要素が  $P$  の周に等間隔に現れることを示すためには、任意の  $p \in \cup_j S_j^i$  に対して、 $d_+(p) = d_-(p)$  が成り立つことを示せばよい。これは Spreading Sequence に沿って帰納的に示すことができる。 $l_j^i$  を任意に選び、反時計回りに最も近い  $\cup_j S_j^i$  の要素を  $s$  とする。ここで、 $gl^i(s)$  について考えると、 $T^i$  上では  $f^i(s) = f^i(gl^i(s))$  が成り立つため、 $P$  の周上において  $l_j^i$  は  $s$  と  $gl^i(s)$  の中点にある。従って、 $l_j^i$  から時計回りに最も近い  $\cup_j S_j^i$  の要素は  $gl^i(s)$  であり、 $d_+(l_j^i) = d_-(l_j^i)$  が成り立つ (図 6)。

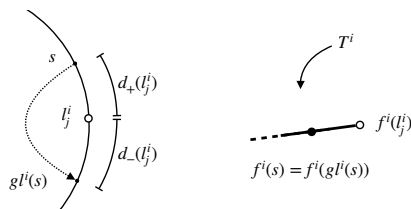


図 6  $l_j^i$  から両隣の点までの距離

次に、 $spr(l_j^i)$  の 2 番目の要素である  $gl^{i+1}(l_j^i)$  について考える。この時、 $gl^{i+1}(l_j^i)$  に反時計回りに最も近いのは  $gl^{i+1}(gl^i(s))$  であり、時計回りに最も近いのは  $gl^{i+1}(s)$  である (もしそれよりも近い点  $s'$  があれば、 $s$  よりも  $l_j^i$  に近い点  $gl^{i+1}(s')$  が存在することになり矛盾)。 $gl^{i+1}$  は距離を保存する写像であり、 $d_+(gl^{i+1}(l_j^i)) = d_-(gl^{i+1}(l_j^i))$  が成り立つ (図 7)。以上の議論を帰納的に繰り返すことで、任意の  $p \in \cup_j S_j^i$  に対して、 $d_+(p) = d_-(p)$  が成り立つことを確認できる。

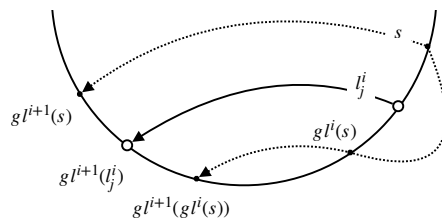


図 7  $gl^{i+1}(l_j^i)$  から両隣の点までの距離

以上によって、 $\cup_j S_j^0$  と  $\cup_j S_j^1$  がそれぞれ  $P$  の周上に等間隔に現れることが示された。主張を示すためには、 $\cup_{i,j} S_j^i$  全体が  $P$  の周上に等間隔に現れることを示す必要があるが、これは  $p \in \cup_j S_j^0$  を任意に選んで、時計回りと反時計回りそれぞれに最も近い  $\cup_j S_j^1$  の要素までの距離を比較することで確認できる。□

### 3.2 共通展開図の標準形

前節で定めた Spreading Sequence を用いて、共通展開図の標準形を次で定義する。

**定義 6**  $Q^0$  と  $Q^1$  の展開図  $P$  の全ての頂点  $\cup_{i,j} S_j^i$  に含まれるとき、 $P$  を標準形の共通展開図と呼ぶ。

$Q^0, Q^1$  の共通展開図  $P$  を考えるとき、 $P$  は標準形ではない場合、つまり  $\cup_j S_j^1$  に含まれない頂点をもつ場合がある。しかし、次の補題が成り立つため、 $Q^0, Q^1$  の共通展開図の存在性を考えるときには、標準形の共通展開図についてのみ考えれば十分である。

**補題 7** もし  $Q^0$  と  $Q^1$  が共通展開図をもつならば、標準形の共通展開図をもつ。

**証明** 補題 5 より、 $P$  の頂点には、 $\cup_j S_j^0$  と  $\cup_j S_j^1$  の要素が交互に並んでいる。任意に選んだ隣接する 2 つの要素が挟む  $P$  の周上の区間を  $m$  とし、 $m$  上に存在する  $P$  の頂点を  $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_k)$  とする。 $P$  を一方の多面体に折ると

き,  $m$  は異なる区間  $m'$  に接着され,  $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_k)$  は,  $\alpha(p_i) = 2\pi - \alpha(p'_i)$  を満たす  $m'$  上の頂点  $(p'_0, p'_1, p'_2, \dots, p'_k)$  に接着される. この操作は, 補題 5 の証明と同様, 全ての区間に対して繰り返される. 従って,  $\bigcup_{i,j} S_j^i$  に含まれる頂点を除き,  $P$  の頂点の内角には  $\alpha(p_0), \dots, \alpha(p_k)$  と  $2\pi - \alpha(p_k), \dots, 2\pi - \alpha(p_0)$  が繰り返し現れる (図 8).

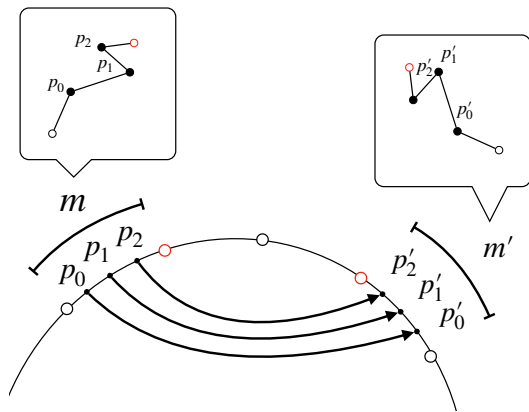


図 8 区間  $m$  上の頂点  $(p_0, p_1, \dots, p_m)$ .

ここで,  $P$  を一方の多面体に折る際の切断木  $T$  に注目する.  $T'$  を  $T$  の各区間を直線に置き換えた切断木とすると, この変形によって  $\bigcup_{i,j} S_j^i$  における内角は変化しない (図 9). 従って,  $T'$  によって得られる新たな展開図  $P'$  を考えれば, 標準形の共通展開図が得られる. □

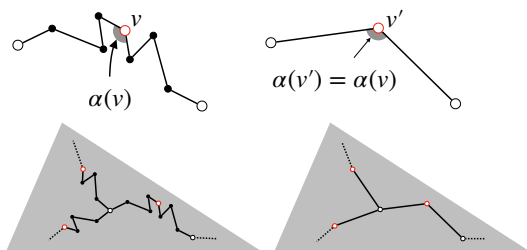


図 9 共通展開図から標準形の共通展開図への帰着.

### 3.3 線分列が閉じた多角形をなすための条件

ここまでの考察により,  $Q^0, Q^1$  が共通展開図をもつかどうかを考えるためには, 標準形の共通展開図, つまり等長かつ全ての頂点が Spreading Sequence に含まれる展開図を考えれば良いことを確認した. ここで, 各  $\theta_j^i$  を単なる記号みなし, Spreading Sequence が矛盾なく定義されるよう円周上に並べた列  $\phi$  について考える. 例えば,  $\phi = (\theta_2^1, \theta_2^0, \bar{\theta}_2^1, \theta_2^0, \theta_1^1, \theta_1^0, \theta_0^1, \theta_0^0, \theta_2^1, \bar{\theta}_2^1)$  とすると, 図 10 の通り図示できる.

$\phi$  が実際に標準形の共通展開図であるためには,  $\phi$  の要素を順に内角としながら等長な線分を並べて得られる線分列

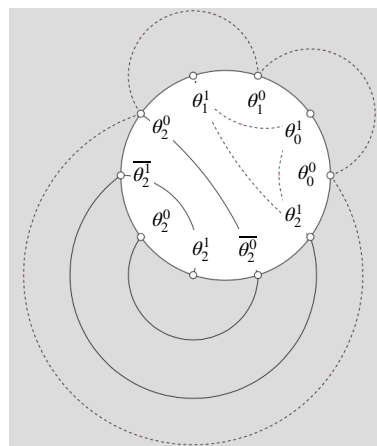


図 10 実線は Spreading Sequence を表し, 点線は  $m_j^i$  を結んでいる

$Poly_\phi$  が, 自己交差を持たず, 始点と終点が一致している必要がある. 実際, 図 10 の例で,  $\theta_0^0 = \sqrt{2}, \theta_0^1 = \sqrt{3}, \theta_2^0 = 2\pi - \sqrt{2} - \sqrt{3}, \theta_0^1 = \sqrt{5}, \theta_1^1 = \sqrt{7}, \theta_2^1 = 2\pi - \sqrt{5} - \sqrt{7}$  としたときには,  $Poly_\phi$  は閉じた多角形とならない. (図 11).

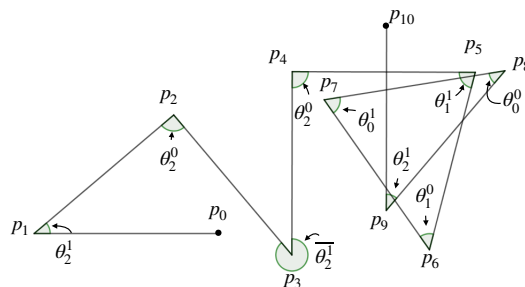


図 11 閉じた多角形が得られない場合の例

ここで,  $Poly_\phi$  の始点と終点が一致することは, 次の補題によって特徴づけられる.

**補題 8**  $\theta_j^i$  と  $\bar{\theta}_j^i$  を並べた列  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  に対して,  $Poly_\phi$  の始点と終点が一致するための必要十分条件は,  $\phi$  が次の条件 (\*) を満たすことである.

(\*) それぞれの  $1 \leq i \leq n$  に対して, 相異なる  $j$  で  $j - i$  が奇数となるものが存在し,  $\phi_i + \phi_{i+1} + \dots + \phi_{j-1}$  が  $2\pi$  の整数倍となる.

**証明**  $Poly_{\phi,\lambda} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  を複素数平面  $\mathbb{C}$  に以下の規則に従って描画する.

$$p_0 = 1, p_1 = 0 \in \mathbb{C},$$

$$p_{i+1} - p_i = (p_{i-1} - p_i)e^{\sqrt{-1}\phi_i}.$$

また,  $p_i$  から  $p_{i+1}$  に向けて描画される辺に沿うベクトルを  $\vec{w}_i$  とする.

ここで, 2つのベクトル  $\vec{w}_i, \vec{w}_j$  が逆ベクトルとなるための条件について考える. 2つのベクトルが逆ベクトルとなるためには, なす角が  $\pi$  である必要がある.  $\vec{w}_i$  と  $\vec{w}_j$  のなす角は,  $j - i$  が偶数の場合  $\phi_i + \phi_{i+1} + \dots + \phi_{j-1} + \pi$  であ



り、奇数の場合  $\phi_i + \phi_{i+1} + \dots + \phi_{j-1}$  である。  $Q^0, Q^1$  が独立であることから、  $\theta_j^i$  の和は  $\pi$  の倍数にならない。従って、  $\vec{w}_i, \vec{w}_j$  が逆ベクトルとなるための必要十分条件は、  $j-i$  が奇数かつ、  $\phi_i + \phi_{i+1} + \dots + \phi_{j-1}$  が成り立つことである。従って、条件 (\*) は、それぞれの  $i$  に対して、相異なる  $j$  が存在し、  $\vec{w}_j$  が  $\vec{w}_i$  の逆ベクトルとなる事と同値である。

$Poly_\phi$  の始点と終点が一致することは、  $\sum_{1 \leq i \leq n-1} \vec{w}_i = 0$  が成り立つことと同値であるため、主張を示すためには、  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n$  から選んだ同一ベクトルと逆ベクトルを含まない部分集合  $\vec{w}'_1, \vec{w}'_2, \dots, \vec{w}'_k$  が  $\mathbb{Z}$  上で線型独立であることを示せば良い。ここで、超越数論における古典的な定理を用いる。

**定理 9** (Lindemann の定理)

任意の異なる代数的数  $a_1, a_2, \dots, a_m$  に対して、  $e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_m}$  は  $\mathbb{Q}^*$  上で線型独立である。ここで、  $\mathbb{Q}^*$  は  $\mathbb{Q}$  の代数閉体である。

ベクトル  $\vec{w}_i$  は、その傾きを  $\psi_i$  として、  $e^{\sqrt{-1}\psi_i}$  と表現できる。  $\vec{w}'_1, \vec{w}'_2, \dots, \vec{w}'_k$  に同一ベクトルと逆ベクトルが含まれない事と、  $Q^0, Q^1$  が代数的であることから、  $\psi_1, \dots, \psi_k$  は相異なる代数的数である。Lindemann の定理から、  $e^{\sqrt{-1}\psi_1}, \dots, e^{\sqrt{-1}\psi_k}$  は  $\mathbb{Q}^*$  で線型独立である。従って、  $\mathbb{Z}$  上でも同様に線型独立である。よって主張は示された。 □

以上で、定理 1 を示す準備が整った。

**証明** (定理 1)

$P$  を  $Q^0, Q^1$  の標準形の共通展開図とし、  $P$  の各頂点の内角の列  $\phi$  が補題 8 の条件 (\*) を満たすと仮定して矛盾を導く。  $\phi$  には  $\cup_j S_j^0$  と  $\cup_j S_j^1$  の要素が交互に並んでいる。そこから  $\cup_j S_j^0$  の要素だけを抜き出してきた列  $\phi^0 = (\phi_1^0, \phi_2^0, \dots, \phi_m^0)$  を考える。ここで、  $P$  の頂点数が 4 の倍数でない偶数であることから、  $m$  は奇数であることに注意する。  $\phi$  が条件 (\*) を満たすためには、  $\phi^0$  が以下の条件 (\*) を満たすことが必要である。

(\*) それぞれの  $1 \leq i \leq n$  に対して、相異なる  $j (j \neq i)$  で、

$$\phi_i^0 + \phi_{i+1}^0 + \dots + \phi_{j-1}^0 \text{ が } 2\pi \text{ の整数倍となる。}$$

$\phi^0$  は  $\theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \overline{\theta_0^0}, \overline{\theta_1^0}, \overline{\theta_2^0}$  のいずれかの要素が並んだ列である。それぞれの要素を

$$\begin{aligned} \theta_0^0 &\rightarrow (1, 0), \theta_1^0 \rightarrow (0, 1), \theta_2^0 \rightarrow (-1, -1) \\ \overline{\theta_0^0} &\rightarrow (-1, 0), \overline{\theta_1^0} \rightarrow (0, -1), \overline{\theta_2^0} \rightarrow (1, 1) \end{aligned}$$

と変換することで (図 12)、  $\phi^0$  を三角格子上の Tour とみなすことができる (図 13)。

この格子において、  $\theta_j^i, \overline{\theta_j^i}$  の列がサイクルをなすことは、和が  $2\pi$  の整数倍になることと同値である。従って、  $\phi^0$  が条件 (\*) を満たすとき、各頂点を始点とする、全体に一致しない部分サイクルが存在する。つまり、Tour 全体を多重

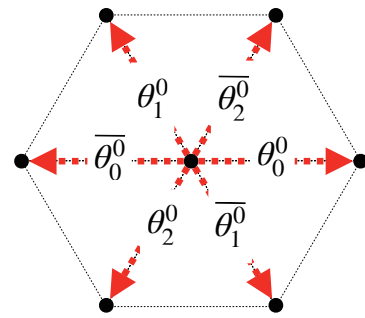


図 12  $\theta_j^i, \overline{\theta_j^i}$  の基底への変換

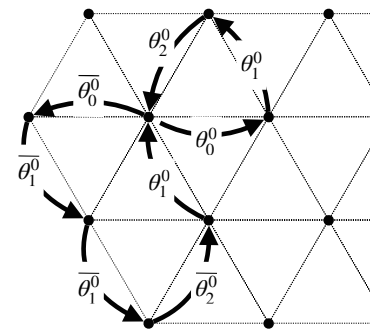


図 13  $\phi^0 = (\overline{\theta_2^0}, \theta_1^0, \theta_0^0, \theta_1^0, \theta_2^0, \overline{\theta_0^0}, \overline{\theta_1^0}, \overline{\theta_1^0})$  を Tour に変換した例

辺グラフと見做した時、全ての頂点の次数は 4 の倍数である。よって、全頂点の次数の総和は 4 の倍数である。従って、握手補題より、辺の本数は偶数となる。これは  $\phi^0$  の頂点数  $m$  が奇数であることに矛盾する。 □

**4. まとめ**

本稿では、代数的かつ独立な独立な三角形二面体の間に、共通展開図が存在しないことを証明した。

この結果は、代数性や独立性の条件のない三角形二面体や、4 頂点以上の多面体への一般化が期待できる。

**謝辞** A part of this research is supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers JP18H04091, JP20H05961, JP20H05964, JP20K11673, JP22J10261.

**参考文献**

[1] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke. *Geometric folding algorithms: linkages, origami, polyhedra*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2007. OCLC: ocm76416607.

[2] Yoshiaki Araki, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara. Common Unfolding of Regular Tetrahedron and Johnson-Zalgaller Solid. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, Vol. 20, No. 1, pp. pp. 101–114, 2016.

[3] Amartya Shankha Biswas and Erik D. Demaine. Common Development of Prisms, Anti-Prisms, Tetrahedra, and Wedges. pp. pp. 202–207, 2017.

[4] Dawei Xu, Takashi Horiyama, Toshihiro Shirakawa, and

Ryuhei Uehara. Common developments of three incongruent boxes of area 30. *Computational Geometry*, Vol. 64, pp. 1–12, August 2017.

- [5] Toshihiro Shirakawa, Takashi Horiyama, and Ryuhei Uehara. On Common Unfolding of a Regular Tetrahedron and a Cube. *Journal of Science Origami*, Vol. 4, No. 1, pp. 45–54, 2015.
- [6] Elena Arseneva, Erik D. Demaine, Tonan Kamata and Ryuhei Uehara. *Discretization to Prove the Nonexistence of "Small" Common Unfoldings Between Polyhedra*. 34th Canadian Conference on Computational Geometry, 2022, accepted.

## 付 録

### A.1 Appendix

本節では、 $T^0, T^1$  の一方、もしくは両方が V-form である場合について考える。少なくとも  $T^0$  が V-form であり、 $v_0^0, v_1^0$  における次数が 1、 $v_2^0$  における次数が 2 であると仮定しても一般性を失わない。

$P$  の周上には、 $f^0(d_0^0) = f^0(d_1^0) = v_3^0$  を満たす二点  $d_0^0, d_1^0$  が存在する。そこで、 $L^0 := \{l_0^0, l_1^0\}, M^0 := \emptyset, D^0 := \{d_0^0, d_1^0\}$  と定める。もし  $T^1$  も V-form であれば、 $L^1, M^1, D^1$  を同様に定め、Y-form であれば  $L^1 := \{l_0^1, l_1^1, l_2^1\}, M^1 := \{m_0^1, m_1^1, m_2^1\}, D^1 := \emptyset$  と定める。 $gl^i : \partial P \rightarrow \partial P$  の定義を以下で与える。

#### 定義 10 (Glueing map)

- $p \in L^i \cup M^i \cup D^i$  ならば、 $gl^i(p) := p$  と定める。
- $p \notin L^i \cup M^i \cup D^i$  ならば、 $f^i(p) = f^i(p')$  を満たす  $p'$  が一意的に決まるので、 $gl^i(p) := p'$  と定める。

ここで、 $L^0 \cup L^1$  の各点に対して定められる Spreading Sequence を考える。定義より、各 Spreading Sequence の終点は  $M^i \cup D^i$  に含まれる。 $T^1$  が Y-form と V-form のいずれの場合にも  $|L^0 \cup L^1| = |M^0 \cup M^1 \cup D^0 \cup D^1|$  が成り立つ。よって、 $M^0 \cup M^1 \cup D^0 \cup D^1$  の各元は全て異なる Spreading Sequence の終点となる。従って、 $v_3^0$  は Spreading Sequence の終点が 2 つ接着されて形成されている。これは、 $\theta_3^0$  が  $\theta_j^i + \theta_{j'}^{i'}$ ,  $\theta_j^i + \overline{\theta_{j'}^{i'}}$ ,  $\overline{\theta_j^i} + \overline{\theta_{j'}^{i'}}$  のいずれかで表されることを意味する。これは  $Q^0, Q^1$  が独立であることに反する。

よって、 $T^0, T^1$  が共に Y-form である場合だけを考えれば良い。