緑タイルを追加した「タイル返し」を中心とする、全象ゲームに関する研究

末續 鴻輝[1,a)]

概要：本研究では，ボードゲーム「タイル返し」に，緑色のタイルという要素を加えたゲームについて，組合せゲーム理論的な観点で見たとき，非常に小さな盤面でも様々な値が表現できることを示す．様々なゲームの値が表現できるという性質は，このゲームに関して，様々な「次の一手問題」を構成できることを示唆しており，AI の性能評価研究などへの発展が期待できる．また，以前発表した Go on lattice というゲームが全象ゲームであるという主張について，不備が見つかったため訂正するとともに，新しい全象ゲームである扉の向こうへを紹介する．

1. 組合せゲーム理論

組合せゲーム理論は，偶然や運，伏せられた情報のないゲームの数学的な構造を研究する理論である．本理論の詳細については，[2], [5], [7] などに詳しい．本稿では，ゲームはすべて二人で行う，引き分けは存在しない，有限の手数で必ず終了するという条件を最初に仮定する．また，**正規形**と呼ばれる条件で勝者を決める．具体的には，最後の着手者を勝者とする（合法手を打てなくなったプレイヤーを敗者とする）．本研究では，ゲームのプレイヤーはそれぞれ，左と右という名前で呼ばれる．また，以下でプレイヤーが使う色が青と赤に分かれる場合は，青を左の色，赤を右の色とする．

第一に，集合を用いたゲームの定義を行う．

定義 1.

- $\{|\}$ はゲームである．
- $G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L, G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R$ がゲームであるとき，$\{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ はゲームである．片側が空である場合も含む．

このとき，$G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L$ をそれぞれ $\{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ の**左選択肢**，$G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R$ をそれぞれ $\{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ の**右選択肢**と呼ぶ．

二つのゲーム G, H のゲーム木が同型であるとき，$G \cong H$ と書く．

ゲームにおいては，局面が小さな成分に分割され，プレイヤーはそれぞれいずれかの成分を選び，一手着手して相手の手番に代わる，という状況になるものがある．このとき，全体の局面をそれらの成分の**直和**であるという．直和は以下のように定義される．

定義 2 (ゲームの直和)**.**
$G \cong \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}, H \cong \{H_1^L, H_2^L, \ldots, H_{k'}^L \mid H_1^R, H_2^R, \ldots, H_{l'}^R\}$ とする．再帰的に，$G + H \cong \{G_1^L + H, G_2^L + H, \ldots, G_k^L + H, G + H_1^L, G + H_2^L, \ldots, G + H_{k'}^L \mid G_1^R + H, G_2^R + H, \ldots, G_l^R + H, G + H_1^R, G + H_2^R, \ldots, G + H_{l'}^R\}$ と定義する．

定義 3 (ゲームの逆元)**.** $G \cong \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とする．再帰的に，$-G \cong \{-G_1^R, -G_2^R, \ldots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \ldots, -G_k^L\}$ と定義する．$G + (-H)$ を $G - H$ と書くこととする．

定義 4 (ゲームの帰結類)**.** ゲームの局面の集合 $\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ を以下のように定義する．$G \cong \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とし，$\mathcal{G}^L = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L\}, \mathcal{G}^R = \{G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$．とする．$G^L, G^R$ をそれぞれ，$\mathcal{G}^L, \mathcal{G}^R$ の元とする．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{G \mid (\forall G^L(G^L \in \mathcal{N} \cup \mathcal{R})) \wedge (\forall G^R(G^R \in \mathcal{N} \cup \mathcal{L}))\} \\
\mathcal{N} &= \{G \mid (\exists G^L(G^L \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}) \wedge (\exists G^R(G^R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}))\} \\
\mathcal{L} &= \{G \mid (\exists G^L(G^L \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L})) \wedge (\forall G^R(G^R \in \mathcal{N} \cup \mathcal{L}))\} \\
\mathcal{R} &= \{G \mid (\forall G^L(G^L \in \mathcal{N} \cup \mathcal{R}) \wedge (\exists G^R(G^R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}))\}
\end{aligned}
$$

また，$o(G)$ を $\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ のうち G が属するものと定義する．定義によりこれは唯一に定まる．$o(G)$ を G の帰結類と呼ぶ．

$\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ はそれぞれ，後手，先手，左，右に必勝戦略

1 国立情報学研究所
National Institute of Informatics, Chiyoda, Tokyo 101–8430, Japan
a) suetsugu.koki@gmail.com

がある局面の集合として意味づけることができる．

二つのゲームの帰結類が，双方にどのようなゲームを直和として付け足しても常に等しいとき，二つのゲームは等価であるという．これは，直和という条件下において二つのゲームが，必勝戦略保持者という観点について互いに同一視できるということを意味している．

定義 5 (等価なゲーム)**.** ゲーム G, H があって，任意のゲーム X に対して $o(G+X) = o(H+X)$ のとき，G と H は等価であるといい，$G = H$ とかく．

明らかに，$G \cong H$ ならば $G = H$ である．また，この $=$ は同値関係の性質を満たす．

また，ゲームには大小関係も定義される．二つのゲーム G, H があって，G が H と比べて，左にとって常に悪くはないとき，$G \geq H$ という．$G \leq H$ も同様である．より厳密には，以下のように定義される．

定義 6 (ゲームの大小関係)**.**
- ゲーム G, H があって，任意のゲーム X に対して $o(H+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P} \to o(G+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}, o(H+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N} \to o(G+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ を満たすとき，$G \geq H$ とかく．
- ゲーム G, H があって，任意のゲーム X に対して $o(H+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P} \to o(G+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}, o(H+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \to o(G+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$ を満たすとき，$G \leq H$ とかく．

$G \geq H \Leftrightarrow H \leq G$ が常に成り立つ．

ゲームの等価や大小関係は帰結類とよい対応関係を持っており，帰結類を調べることでゲームの等価や大小関係を知ることができる．具体的には，ゲームと帰結類は，以下の性質を満たす．

定理 1. 任意のゲーム G, H に対し，以下が成り立つ．
- $G > 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{L}$
- $G < 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{R}$
- $G = 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$
- $G \,||\, 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{N}$
- $G > H \Leftrightarrow G - H > 0$
- $G < H \Leftrightarrow G - H < 0$
- $G = H \Leftrightarrow G - H = 0$
- $G \,||\, H \Leftrightarrow G - H \,||\, 0$
- $G + 0 = G$
- $G - G = 0$

ただし，$0 \cong \{|\}$. また，$||$ は $\not\leq$ かつ $\not\geq$ を意味し，比較不能と呼ぶ．

等価なゲームは多く存在するが，等価なゲーム同士の中で，もっとも単純な構造を持つ代表元を取ることができると知られている．そのために，まず等価性を保ったままゲームを変えることのできる以下の二つの定理を紹介する．

定理 2 (劣位な選択肢の削除)**.** $G \cong \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とする．$G_1^L \leq G_2^L$ ならば $G = \{G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ である．右選択肢についても同様．

定理 3 (打ち消し可能な選択肢の短絡)**.** $G \cong \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とする．G_1^L のある右選択肢 $H \cong \{H_1^L, H_2^L, \ldots, H_{k'}^L \mid H_1^R, H_2^R, \ldots, H_{l'}^R\}$ が存在して，$G \geq H$ を満たすとき，$G = \{H_1^L, H_2^L, \ldots, H_{k'}^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ が成り立つ．左右逆の場合についても同様．

これらの定理が成り立つことは，定義をもとに数学的に証明することができる．一方，ゲームとしての意味づけは，劣位な選択肢の削除は，『自分にとってより不都合な選択肢は，どうせ選ばれないのでないものとして考えても影響ない』，打ち消し可能な選択肢の短絡は，『相手の着手に即座に応手して，相手が打つ直前よりも自分にとってよくできるなら，その応手を打たない必要性はない』ということだと考えることができる．

定理 4. $G_1 = G_2$ を満たすゲーム G_1 と G_2 に対して，劣位な選択肢の削除と打ち消し可能な選択肢の短絡を可能な限り適用する．得られたゲームをそれぞれ G_1', G_2' とすると，$G_1' \cong G_2'$ が成り立つ．

このように，劣位な選択肢の削除と打ち消し可能な選択肢の短絡を可能な限り適用して得られたゲームのことを、もとのゲームの**標準形**と呼ぶ．

これらの定理により，多くの局面を同一視することができる．また同一視された局面同士は入れ替えても，勝敗に影響を与えず，ゲームを解析するうえで意味のある同一視であると言える．

ここまで紹介してきた性質や，ゲームの値同士の和の計算によって，様々なルールの局面を解析することができると知られている．

1.1 全象ゲームと「タイル返し」

ある正規形のゲームのルールが与えられたときに，そのルールの中で任意のゲームの値を持つ局面が存在するかは，興味深い問題である．もしも任意のゲームの値が存在するならば，そのルールはある観点では「最も複雑」な類のものであるとの見方ができ，様々な局面が登場するという意味で，面白いゲームになる可能性を示唆していると考えることができる．

任意のゲームの値が登場するルールのことを，全象（Universal）ゲームと呼ぶ．最初に全象ゲームであると証明されたのは一般化コナネである [4]．また，「タイル返し」は著者によって考案され，全象性が証明された [6]．そのルールは以下の通りである．

定義 7 (「タイル返し」のルール)**.** タイルが敷き詰められており，その色は青，赤，黒のいずれかである．青と赤のタイルは裏返すと黒になる．ある黒タイルの上に駒が乗っ

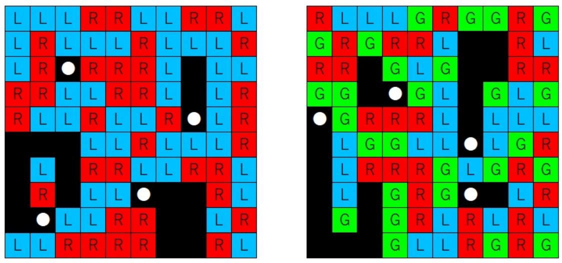

図 1 「タイル返し」と，緑タイルつき「タイル返し」の局面の例

ている．プレイヤーは，青プレイヤーと赤プレイヤーに分かれる．着手は駒を取り，自分の色のタイルが続いている限り，任意の方向に好きなだけ動かしてよいというものである．途中で方向転換をすることはできない．駒が通過したタイルは裏返り，黒タイルになる．着手できなくなったプレイヤーの負けである．

「タイル返し」は駒の数が一つであるという制限を加えても，全象ゲームであることが示せる．実際に遊ぶ際には，駒の数を複数に増やし，着手の際はどれかの駒を選んで動かすという条件にしてもよい．複数の駒で遊ぶ場合は，プレイの進行につれて局面が分割されるため，直和の構造が出現し，その点でも組合せゲーム理論との相性がよいルールである．

図 1 の左は，駒を 4 つ用いた「タイル返し」の局面の例である．R,L はそれぞれ，赤，青のタイルを表す．丸印は駒である．

赤と青を二人のプレイヤーに割り振ったゲームにおいて，さらに中間色として緑を導入することがある．ハッケンブッシュにおいて緑色の辺を導入するなどが代表的な例である．ここでは,「タイル返し」に緑色のタイルを導入したゲームについて考察する．

定義 8 (緑タイルつき「タイル返し」のルール)．タイルが敷き詰められており，その色は青，赤，黒，緑のいずれかである．黒以外のタイルは裏返すと黒になる．ある黒タイルの上に駒が乗っている．プレイヤーは，青プレイヤーと赤プレイヤーに分かれる．着手は駒を取り，自分の色のタイルまたは緑色のタイルが続いている限り，任意の方向に好きなだけ動かしてよいというものである．途中で方向転換をすることはできない．駒が通過したタイルは裏返り，黒タイルになる．着手できなくなったプレイヤーの負けである．

図 1 の右は，緑タイルつき「タイル返し」の局面の例である．G は緑のタイルを表す．

定理 5. 緑タイルつき「タイル返し」は全象ゲームである．

Proof. 緑タイルつき「タイル返し」の局面には必ずしも緑タイルが登場しなければならないわけではないので，通常の「タイル返し」の局面はすべて緑タイルつき「タイル返し」の局面としても考えられる．よって,「タイル返し」が全象ゲームであるため，緑タイルつき「タイル返し」もまた全象ゲームとなる． □

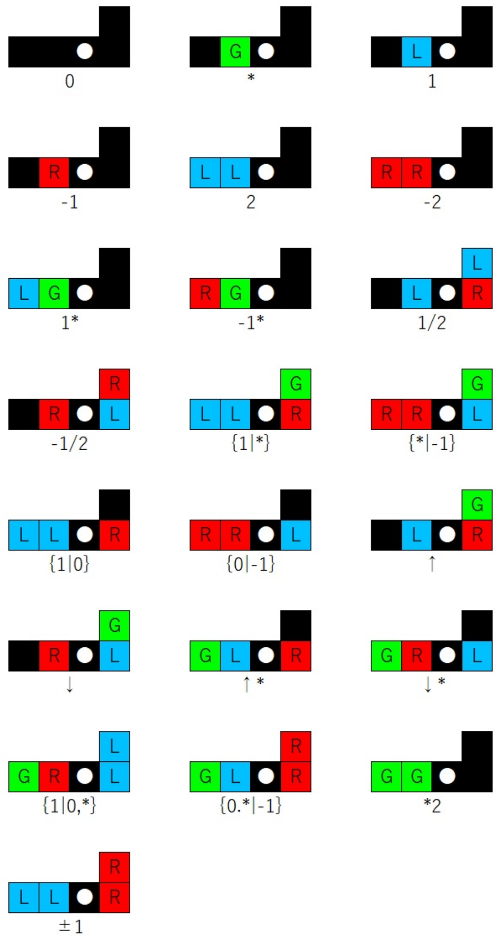

図 2 2 日目までに生まれたゲームの値を持つ局面

ゲーム木の高さが n 以下のゲームの値を，n 日目までに生まれたゲームの値と呼ぶ．0 日目，1 日目，2 日目，3 日目までに生まれた標準形はそれぞれ，$1, 4, 22, 1474$ 個あることが知られている．緑タイルを導入することで，小さな局面でも多様な値を表現することができる．以下はその一例である．

定理 6. *2* 日目までに生まれたすべてのゲームの値は，*L* 字型ペントミノ上で行われる緑タイルつき「タイル返し」の局面として表現できる．

図 2 に各値と等価な局面を掲載する．各値の意味について詳しくは参考文献 [2], [5] などを参照いただきたい．

なお、タイルの数が 4 以下の場合についても考察した．タイルの数が 4 以下の場合は場合の数がさほど大きくないので，すべての場合を全探索したが，2 日目までに生まれたゲームの値のうち，$\{1|*\}, \{*|-1\}, \{1|0,*\}, \{0,*|-1\}$ が構成でき

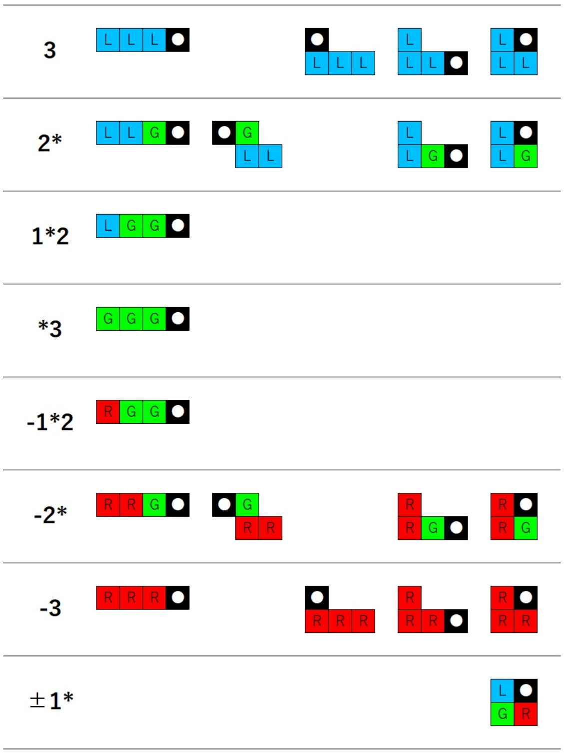

図 3　タイルの数が 4 以下で，3 日目に生まれたゲーム

なかった．一方で，タイルの数が 4 以下の局面には，3 日目に生まれたゲームとして，$3, 2*, 1*2, *3, , -1*2, -2*, -3, \pm 1*$ が構成された．図 3 にそれらを示す．回転・反転して一致するものは省いている．

コナネおよび「それはオレの魚だ！」において 2 日目までに生まれたすべてのゲームの値を構成した研究がある [1], [2]．これらと比較しても小さい局面で 2 日目までに生まれたすべての値が構成されており，緑タイルつき「タイル返し」の方が多様な局面を小さな局面で表現しやすいのではと期待できる．

2.　そのほかの全象ゲーム

2.1　Go on lattice に関する訂正

筆者は [6] で「タイル返し」が全象ゲームであることを利用し，Go on lattice という新たに定義したルールについても全象ゲームであると主張した．しかし，その証明に不備があったことが判明した．

Go on lattice のルールは以下の通りである．

定義 9 (Go on lattice).
- 格子状の盤面があり，格子点上に駒が置かれている．また，各辺は色付けられており，青，赤，および点線辺の 3 種が存在する．
- プレイヤーは駒を好きな方向に好きなだけ進めることができるが，点線辺か自分の色の辺上を通らなければならず，途中で方向転換はできない．また，点線辺は各着手の最初の一本目でなければ通れない．
- 一度通過した頂点は通過済みとなり，二度と通過できない．
- 最後の着手者が勝者である．

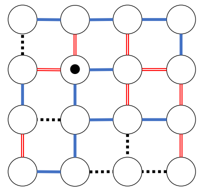

図 4　Go on lattice の局面の例

図 4 に Go on lattice の局面の例を挙げる．白黒表記の場合に備え，赤辺を二重辺にしておく．

このルールについて，筆者は以下の通り主張した．「任意のタイル返しの局面に対して，Go on lattice の局面を以下のように構成する．
- 青，赤，ないし黒のタイルに対応して，格子状に頂点を用意する．黒タイルに対応する頂点は，すでに通過済みとして扱う．
- 青同士，赤同士の隣接に対応して，青辺，赤辺を用意し，青と赤の隣接に対応して，点線辺を用意する．黒タイルとの隣接には辺を用意しない．
- 駒があるタイルに対応する頂点に駒を置く．

このとき，タイル返しで同色のタイル上を駒が移動する着手は，Go on lattice において同色の辺上を駒が移動する着手に対応する．また，一手目の着手は，タイル返しにおいては異なる色同士の隣接で行われるが，この着手とは Go on lattice における点線辺が対応している．

従って，もとのタイル返しの局面のゲーム木と，対応させて作った Go on lattice の局面のゲーム木は等しくなり，二つの値は等しくなる．任意の値を持つタイル返しの局面が存在するため，任意の値を持つ Go on lattice の局面も存在し，Go on lattice は全象となる．」

しかし，実際にはこの方法で「タイル返し」の局面から対応する Go on lattice の局面を構築した場合，青タイルと赤タイルが隣接している部分において，その青タイルの場所に駒を動かした際，右プレイヤーしか次に赤タイルの場所へ駒を動かすことはできないが，対応する Go on lattice の局面においては，両方のプレイヤーがその場所に駒を動かせることになってしまった．そのため，局面の値は等しくなるという主張は誤りであったため，ルールの訂正を行い，駒の移動に関するルールを，「プレイヤーは駒を好きな

方向に好きなだけ進めることができるが，このとき自分の色の辺上を通らなければならず，途中で方向転換はできない．また，動かしたあと駒が到達した頂点に点線辺が接続している場合は，その点線辺は相手の色になる」．に変更する．このようにすることで，上記の問題を回避できる．

なお，「タイル返し」と対応する Go on lattice の局面の作り方で最初に駒があるタイルに対応する頂点の扱いがわかりにくいため補足するが，このときそのタイルが青タイルと隣接している方向については，対応する辺を青辺にし，赤タイルと隣接している方向については，対応する辺を赤辺にする．

Proof. 対応する「タイル返し」の局面と Go on lattice の局面を用意する．各着手についてそれぞれの局面に対応する着手が存在することを示す．初手からある時点までは対応する着手があると仮定して，帰納法で示す．「タイル返し」において左がタイル A_0 からタイル $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ を通過しタイル A_n まで駒を移動させる着手が存在すると仮定する ($n > 0$)．このとき，タイル $A_1, A_2, \ldots, A_n$ はいずれも青いタイルである．また，対応する Go on lattice の局面において，タイル $A_0, A_1, \ldots, A_n$ に対応する頂点を $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ とする．このとき，辺 $(A'_1, A'_2), (A'_2, A'_3), \ldots, (A'_{n-1}, A'_n)$ はいずれも青い辺である．また，タイル A_0 がもともと青タイルであった場合，辺 (A'_0, A'_1) は青辺であり，タイル A_0 がもともと赤タイルであった場合は，辺 (A'_0, A'_1) はもともと点線辺であったが，赤の着手によって頂点 A'_0 に到達した際に，青辺に変わっている．従っていずれの場合においても，左は頂点 A'_0 から $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$ を通過して駒を A'_n まで動かすことができる．

逆に，Go on lattice のある局面について，頂点 A'_0 から $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$ を通過して A'_n まで左が駒を動かせると仮定する．このとき，対応する「タイル返し」の局面のタイル $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ は青いタイルである．よって対応する「タイル返し」の局面において，左は $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ を通過して A_n まで駒を動かせる．

右の着手についても同様である． □

2.2 扉の向こうへについて

以下ではさらに，扉の向こうへというルールを定義して，全象ゲームであることを示す．

定義 10 (扉の向こうへ)．

- 格子状の盤面があり，マスの中に駒が置かれている．マスは通過できるマスと通過できないマスがある．通過できるマス同士の間には，表側と裏側に，それぞれ赤か青の色のついた扉が置かれている．
- プレイヤーは駒を前後左右に動かす．このとき，駒の側から見て自分の色の扉が続いている限りは，どこまでも動かせる．ただし，途中で方向転換することはできないし，通過できないマスの上も通過することはできない．
- 一度コマが通過したマスは通過できないマスに変わる．
- 最後の着手者が勝者である．

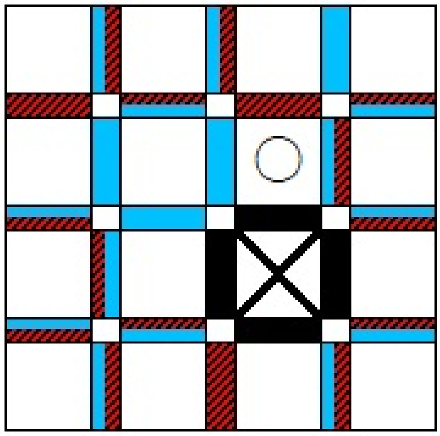

図 5　扉の向こうへの局面の例

図 5 は扉の向こうへの局面の例である．丸印は駒，×印のついたマスは通過できないマスを意味する．白黒印刷の場合に備え，赤色の扉は斜線を入れている．

定理 7. 扉の向こうへは全象ゲームである．

Proof. 「タイル返し」の局面が与えられたとき，扉の向こうへの局面を以下のように定義する．

- 「タイル返し」の各タイルに対応する位置に，マスを置く．各駒に対応する位置に，駒を置く．
- 「タイル返し」の局面の隣接する二枚のタイルを A, B とする．それぞれに対応するマスを，A', B' とする．A' と B' の間に置く扉は，A' 側をタイル B と同じ色に，B' 側をタイル A と同じ色にする．最初に駒が置かれているマスについて，駒が置かれていないマスの側の扉の色は何色でも構わない．

図 6 にこの対応を表す．このとき，「タイル返し」の局面のゲーム木と扉の向こうへの局面のゲーム木は等しくなる．

対応する「タイル返し」の局面と扉の向こうへの局面を用意する．各着手についてそれぞれの局面に対応する着手が存在することを示す．「タイル返し」において左がタイル A_0 からタイル $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ を通過しタイル A_n まで駒を移動させる着手が存在すると仮定する ($n > 0$)．このとき，タイル $A_1, A_2, \ldots, A_n$ はいずれも青いタイルである．対応する扉の向こうへの局面において，タイル $A_0, A_1, \ldots, A_n$

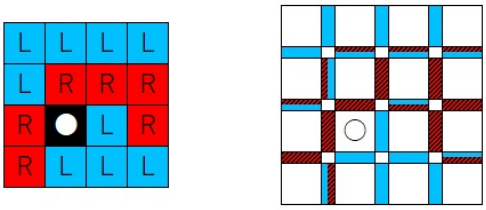

図 6　対応関係

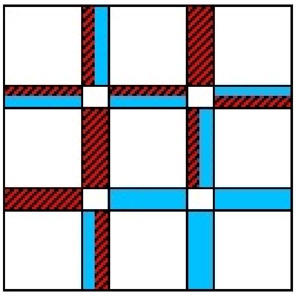

図 7　逆の対応がそのままは使えない局面の例

に対応するマスを $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ とする．ここで，$A' \to B'$ は A', B' 間の扉のうち A' 側を指すとする．このとき，扉 $A'_0 \to A'_1, A'_1 \to A'_2, \ldots, A'_{n-1} \to A'_n$ はいずれも青い扉である．従って，左はマス A'_0 から $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$ を通過して駒を A'_n まで動かすことができる．

逆に，扉の向こうへのある局面について，マス A'_0 から $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$ を通過して A'_n まで左が駒を動かせると仮定する．このとき，対応する「タイル返し」の局面のタイル $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$ は青いタイルである．よって対応する「タイル返し」の局面において，左は $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ を通過して A_n まで駒を動かせる．

右の着手についても同様である．

□

この対応は逆は成り立たない．すなわち，図 7 のような扉の向こうへの局面があったとすると，上記のような対応を取るためには，真ん中のマスに対応するタイルが，赤であっても青であっても矛盾が生じる．駒が真ん中のマスの上側のマスにあるときには赤プレイヤーのみが真ん中のマスに駒を移動させることができて，駒が真ん中のマスの下側のマスにあるときには青プレイヤーのみが真ん中のマスに駒を移動させることができるが，「タイル返し」のルールでは，同じタイルに，上側からなら赤が，下側からなら青が駒を移動させられる，という状況は起こらないからである．

従って，二つのルールは自明に等しいわけではないが，

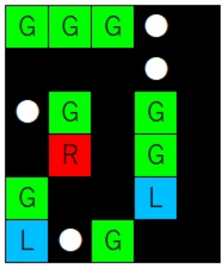

図 8　次の一手は？

それにも関わらず，扉の向こうへは「タイル返し」の結果から，全象ゲームであることが示された．

3. まとめと今後の課題

本研究では，緑タイルを導入した「タイル返し」について，小さな盤面であっても多様なゲームの値を取る局面を構成できることを示した．

様々なゲームの値を取る局面が構成できるということは，様々な「次の一手問題」を構成できるということにつながる．このことは，人間やゲーム AI の棋力を測定しやすいことを意味している．

1990 年代に，組合せゲーム理論を用いて，人間のトッププロにも正解が分からないが，組合せゲーム理論を用いることで最善の着手を判定できる囲碁の「次の一手問題」を構成することができると示された [3]．このような研究は，人間のトッププロではなくゲーム AI を対象にしても行えるのではないかと考えられる．現代のゲーム AI の棋力は人間の実力を上回ることができるが，多くのゲームでは完全な全探索ができているわけではなくあくまで単に人間よりはよい手を打てるだけであるため，最善手を判定でき，かつ非常に難解な局面を構成できれば，AI がどのようなときに誤り，どのようなときに最善手を見つけられるのかを詳しく調べられることが期待できる．その観点において，緑タイルつき「タイル返し」は非常に小さな大きさの局面で様々な値を表現することができるため，それらを組合せて難解な「次の一手問題」についても小さな大きさで構成することができる．さらに全象性が証明されてるため，ゲームの値ごとに，AI が判定しやすいかしにくいかを調べることができるのも，おそらく全象ではないと考えられていて，まだ構成できていない値がたくさんある囲碁と比べたときの強みであり，今後はこのような AI の棋力判定に関する研究への利用を目指したい．

謝辞

本研究に際し，国立情報学研究所特任研究員の安福智明氏に多くの助言をいただいた．ここに深く感謝申し上げる．

参考文献

[1] 安福智明，末續鴻輝：2 日目までに生まれたゲームの構成，ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集，41-48，2019.

[2] Albert M. H., Nowakowski R. J., Wolfe D., 川辺治之訳：組合せゲーム理論　勝利の方程式，共立出版 (2011).

[3] Berlekamp E., Wolfe D., *Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point*, A K Peters/ CRC Press(1997).

[4] Carvalho A., Dos Santos C. P., *A nontrivial surjective map onto the short Conway group*, Games of No Chance 5, 70, 271(2019).

[5] Siegel A. N.: *Combinatorial Game Theory*, American Mathematical Society(2013).

[6] 末續鴻輝：新たな全象（universal）ゲーム「タイル返し」のルールと全象性の証明，情報処理学会研究報告，Vol. 2020-GI-43, No. 26, pp. 1-6, 2020.

[7] 末續鴻輝，安福智明：組合せゲームとその数学的構造，システム／制御／情報，Vol.65, No.10, pp. 391-396, 2021.