

ボロノイ分割モデルを用いた オパールの遊色効果のビジュアルシミュレーション

横田 壮真^{1,a)} 杉田 俊平^{2,b)} 藤代 一成^{1,c)}

概要: オパールは、遊色効果とよばれる光学特性を有する準鉱物であり、その内部に美しく複雑な虹色の模様を発現させることから、古くから宝石として利用されてきた。遊色効果の写実的なビジュアルシミュレーションは、宝石の質感設計の観点から有用である。本研究では、オパールの内部構造を三次元ボロノイ分割を用いてモデリングする手法を提案する。これにより、結晶学に基づく模様の発現を試みる。また、ボロノイ図を距離関数を用いて表現することにより、空間計算量の削減とモデルの解像度向上を試みる。

Visual Simulation of ‘Play of color’ Observed in Opal Using Voronoi-tessellation Model

YOKOTA SOMA^{1,a)} SUGITA SHUMPEI^{2,b)} FUJISHIRO ISSEI^{1,c)}

Abstract: Opal is a mineraloid with a distinctive optical effect—‘play of color;’ it has been used as a gemstone since ancient times because it displays beautiful and complex, iridescent patterns inside. Realistic visual simulation of play of color is in demand from a viewpoint of textural design of gemstones. In this study, we propose a new method for modeling the internal structure of opal using three-dimensional Voronoi tessellation, and build on crystallography to represent its play of color patterns. In addition, we attempt at improving the resolution of the model with less space complexity by introducing a distance function based on Voronoi diagram.

1. 序論

オパールは、遊色効果 (play of color) とよばれる光学特性を有する準鉱物であり、古くから宝石として利用されてきた。遊色効果とは、物体表面の微細構造により、視点や光の入射角度を変化させることでその色彩が変化する現象である。遊色効果をもつオパールの画像を図1に示す。オパールはカボションカットとよばれる楕円体状への研磨を経ることで、その魅力を最大限に引き出すことができる。しかし、この研磨は専門性を要するため、宝石の質感設計 [11] の観点から、オパールをビジュアルシミュレーショ

ンすることには意義がある。これを実現するには、オパールの内部構造を考慮した忠実なモデリングや回折現象を考慮した写実的なレンダリングが必要である。

本研究では、オパールをはじめとするコロイド結晶の生成過程が、ボロノイ図生成に用いられる波面法のアルゴリズムに類似している点に着目し、その内部構造を三次元ボロノイ分割によってモデリングする。これによって結晶学に基づく模様の発現を試みる。また、ボロノイ図の距離関数を定義することでモデルの境界を幾何学的に表現し、モデルの解像度向上に伴う空間計算量の増大といった格子表現特有のトレードオフの解消を試みる。

先行報告 [12] ではオパールの屈折現象および回折現象のみを取り扱っていたが、本稿では散乱現象を計算の対象に加え、写実性を向上させる。

¹ 慶應義塾大学 理工学部
Faculty of Science and Technology, Keio University

² 慶應義塾大学 大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Technology, Keio University

a) soma.yokota@fj.ics.keio.ac.jp

b) shumpei.sugita@fj.ics.keio.ac.jp

c) fuji@ics.keio.ac.jp



図 1: 実物のオパール (山梨宝石博物館より提供)。内部に有色効果が確認できる。

2. 関連研究

オパールの遊色効果のビジュアルシミュレーションに関連する研究を紹介し、提案手法の位置づけを明確にする。

2.1 階層モデルによるモデリング

Imura らは、オパールを構成するシリカ球列をある程度の大きさでまとめて配置し、このモデルに対して双方向パストレーシングによるスペクトラルレンダリングを行う手法 [5] を提案している。規則格子上にオパールの境界を定義し、境界内のボクセルに対して、乱数を用いてシリカ球列を格納するボクセルと空洞のボクセルに振り分けるモデリングを行う。これにより、遊色効果のビジュアルシミュレーションを実現した。

この手法においては、散乱現象が考慮されていない。また、シリカ球列に対する空洞のスケールが不適切である。加えて、規則格子ボリューム表現を用いたことにより、表出する遊色効果の解像度が格子間隔によって制限されている。

2.2 手書きによるモデリング

田淵らは、オパールの内部構造を手書きのベクトル画像によって定義し、このモデルに対してフォトンマッピングによるスペクトラルレンダリングを行う手法 [10] を提案している。規則格子上にオパールの境界を定義し、手書きのベクトル画像を用いて境界内を回折領域と散乱領域に分けるモデリングを行う。レンダリング時に散乱領域においてオパール内部に含まれる不純物の吸収係数を用いて減衰を計算することで、オパールの地色の表現を可能にした。

この手法はユーザの主観によって内部がモデリングされるため、直観的なデザインを行うことができる反面、結晶生成のプロセスを無視している。また、フォトンマッピングを行う際には、規則格子に格納されたモデルに加えフォトン格納するデータ構造を保持する必要がある、空間計算量が大きくなる。

2.3 提案手法と関連研究の相違点

本研究では、関連研究と同様にスペクトラルレンダリングを採用しているが、データ構造として3次元ボロノイ図を用いている点が他の手法と異なる。ボロノイ図の導入により、結晶学に基づいたモデリングと空間計算量削減の実現、さらに表出する模様幾何学的な表現を目指す。

3. ボロノイ図を用いたオパールの表現

本節では、オパールの組成について取り扱う。そのうえで、ボロノイ図を用いたオパールの表現の妥当性について説明する。

3.1 オパールの構造

オパールは、可視光の波長程度の大きさのシリカ球の配列によって構成される。可視光の波長程度の粒径の粒子をコロイド粒子とよぶ。シリカ球は、二酸化ケイ素を主成分とする直径 150–450 nm 程度の球体である。非晶質であり、シリカ球内部には周期的な構造をもたない。また少量の不純物を含んでおり、散乱を起こす。

シリカ球はオパール内で整列し、面心立方格子をとる。結晶内で原子が整列し格子を生成する様子と類似しているため、シリカ球をはじめとするコロイド粒子が整列したものをコロイド結晶とよぶ。コロイド結晶は格子間隔が可視光の波長程度の大きさになるため、表面で回折を起こす。遊色効果の色彩はこの回折に由来する。

オパールは、複数のコロイド結晶がランダムに併合した多結晶構造をとる [13]。換言すれば、シリカ球は短距離的には面心立方格子をとるが、長距離的には構成するシリカ球の粒径や結晶の傾きは無秩序である。この特性によって、オパールの内面に複雑で多彩な模様を表出する。

以上の階層的関係を図 2 に示す。

3.2 ボロノイ図生成と多結晶の成長

ボロノイ図の定義やその応用について説明し、ボロノイ図の生成法と多結晶生成の対応関係を明らかにする。本項では簡単のため二次元のボロノイ分割について説明する。

Aurenhammer [1] によれば、ボロノイ図は以下のように定義される。まず、平面上に n 個の点の集合 S を考える。

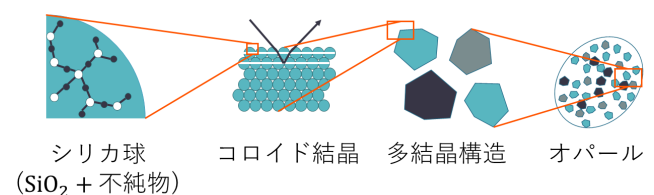


図 2: オパールの構成要素。オパールは整列したシリカ球によって構成され、そのシリカ球列は通常、多結晶構造をとる。

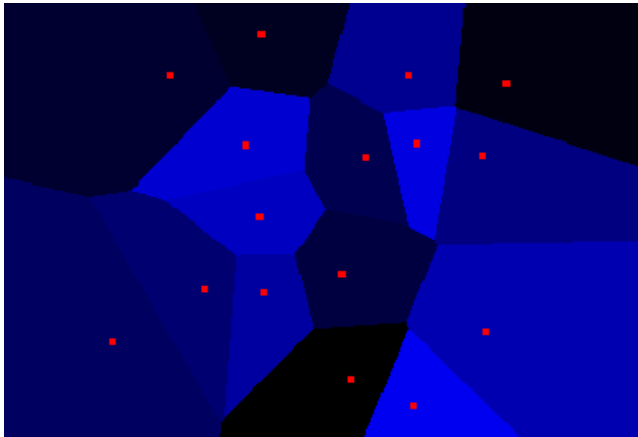


図 3: 母点数 $n = 16$ によるボロノイ分割. 母点を赤色で, 各ボロノイ領域を同色で塗り分けた.

S の要素を母点とよぶ. 相異なる二つの母点 $p, q \in S$ に対し, q に対する p の支配領域 $dom(p, q)$ を, q よりも p に近い等距離にある平面上の点の集合とする:

$$dom(p, q) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \delta(x, p) \leq \delta(x, q)\}.$$

ここで, δ はユークリッド距離を返す関数である. $dom(p, q)$ は, p と q の垂直二等分線を境界とする半平面となる. 母点 $p \in S$ の領域 $reg(p)$ は,

$$reg(p) = \bigcap_{q \in S - \{p\}} dom(p, q)$$

で与えられる. 領域は $n - 1$ 個の半平面の共通部分となるため, 凸多角形となる. よって境界の領域は, 最大で $n - 1$ 個の辺と頂点からなる. 領域は平面の多面体分割を形成しており, この分割をボロノイ分割とよぶ. また, 分割された各領域をボロノイ領域とよぶ. さらに, ボロノイ領域の境界をボロノイ境界とよぶ. 図 3 に母点数 $n = 16$ のボロノイ分割の結果を示す.

ボロノイ図の生成アルゴリズムとして, 波面法が知られている. 波面法では, 母点ごとに近傍点を探索し, 順に自分の領域としていく.

多結晶は結晶核をもとに近傍の粒子を取り込んで成長していくが, この過程は波面法のアルゴリズムと類似している. 実際, 材料工学の分野において, 金属の多結晶構造の表現手段としてボロノイ図が用いられている [7].

本研究では, 図 4 に示すように, コロイド結晶をボロノイ領域に一対一に対応させる. 各コロイド結晶における格子の傾きと粒径が一定であると仮定することで, これらの情報を母点に格納する. 定義に従えば母点からボロノイ図を復元できるため, オパール内部の情報を規則格子に格納しておく必要がない. ボロノイ図によるオパールのモデリングによって, コロイド結晶の組成を踏まえつつ, 大幅な空間計算量の削減が見込まれる.

4. 提案手法

本節では, 提案手法を詳説する.

4.1 母点の生成

ボロノイ分割を行うための母点を生成する. C 言語で表現された下記の構造体 `site` を各母点に対して用いる.

```
struct site {
    float x, y, z;           \ \ 母点の座標
    short plane;            \ \ k-d 木で使用
    short alpha, beta, gamma; \ \ 結晶の傾き
    float radius;          \ \ 粒径
};
```

母点のデータ構造は文献 [6] から着想を得た. 一つの母点は 24 Bytes で表されるため, 2,048 個程度であればコンスタントメモリに格納することができ, 高速な参照が可能である.

結晶の傾きは, 3 種類の固定角 α, β, γ を用いて表現する (図 5). また, 結晶の対称性から, 各々の角は 0° から 90° までとすれば十分である. 時間計算量と空間計算量を削減するため, 角度を直接格納するのではなく, 正弦, 余弦の値を呼び出すルックアップテーブルのインデックスを `short` 型で格納する. 本手法では, 母点の座標, 結晶の傾き, 粒径の値を指定した範囲内で一様乱数によって決定する.

生成した母点は整列 k-d 木に格納することで, 高速な近傍探索を可能にする [2].

4.2 レイマーチングによる大域照明計算

生成したモデルに対し, レイマーチングによって大域照明計算を実行する. 本手法では球面トレーシング (sphere tracing) [4] を用いた.

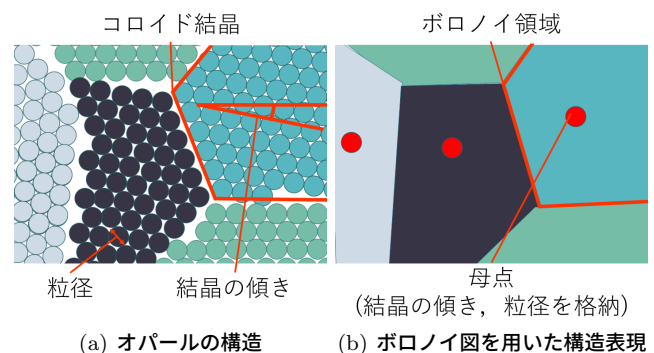


図 4: オパールの構造とボロノイ図によるモデリングの関係. コロイド結晶をボロノイ領域に対応づけ, コロイド結晶の粒径, 結晶の傾きの情報を母点に格納する.

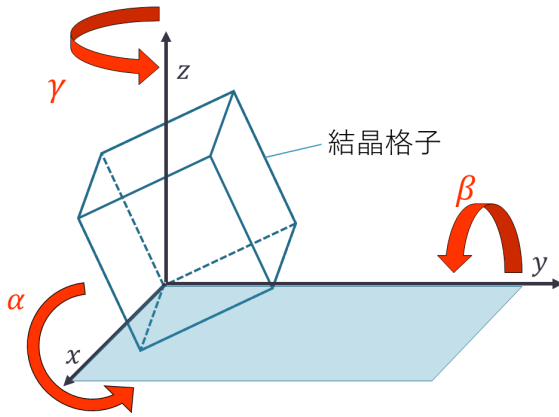


図 5: 結晶格子の傾きと固定角のとり方。結晶格子の対称性から、 α, β, γ はそれぞれ 0° から 90° までとすれば十分である。

オパールの境界面は楕円体の距離関数によって定義し、衝突時には屈折および反射処理を行う。レイの先端の座標を \mathbf{x} とすると、楕円体の距離関数 $sdf_{\text{ellipsoid}}(\mathbf{x})$ は、

$$sdf_{\text{ellipsoid}}(\mathbf{x}) = \frac{k_1(k_1 - 1.0)}{k_2},$$

$$k_1 = \left| \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}} \right|, k_2 = \left| \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}^2} \right|$$

と定義できる。ここで、 \mathbf{r} は楕円体における各軸方向の半径を決める 3 次元ベクトルである。

近傍の母点 2 個の座標をそれぞれ $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ とすると、ポロノイ境界の距離関数 $sdf_{\text{voronoi}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ は以下のように定義できる：

$$sdf_{\text{voronoi}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{m})}{|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|},$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2}.$$

4.3 スペクトラルレンダリング

コロイド結晶表面での回折現象を再現するため、レンダリング手法としてスペクトラルレンダリング [8] を採用した。本手法では 360–830 nm の範囲を、5 nm 間隔でサンプリングする。

ポロノイ境界に衝突した場合、回折処理を行う。まず、結晶の傾きから格子面の法線 \mathbf{n}'_i を決定する。今回、計算時間を短縮するために、代表的な格子面である $\langle 111 \rangle$ 面のみを対象とする。立方晶の $\langle 111 \rangle$ 面を図 6 に示す。具体的には、最近傍の母点から結晶の傾き α, β, γ を参照し、 $\langle 111 \rangle$ 面の各法線ベクトル \mathbf{n}_i を回転行列 $\mathbf{R}_x(\alpha), \mathbf{R}_y(\beta), \mathbf{R}_z(\gamma)$ によって回転させて \mathbf{n}'_i を得る：

$$\mathbf{n}'_i = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\gamma)\mathbf{n}_i.$$

\mathbf{n}'_i とレイの入射方向から入射角 θ を求め、回折する波長を決定する。竹岡 [9] によれば、 $\langle 111 \rangle$ 面で回折する光の波長 λ は次式によって計算できる：

$$\lambda = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{d}{m} \sqrt{\sum n_i^2 \phi_i - \sin^2 \theta}},$$

ここで、 d はシリカ球の粒径、 m はブラッグの反射次数、オパールを構成する各物質 i に対し、 n_i は屈折率、 ϕ_i は体積分率である。可視光の波長の範囲においては、 $m = 1$ を考えれば十分である。また、オパールは二酸化ケイ素と水から構成されると仮定して、各屈折率は $n_{\text{SiO}_2} = 1.50$, $n_{\text{H}_2\text{O}} = 1.35$, 各体積分率は $\phi_{\text{SiO}_2} = 0.74$, $\phi_{\text{H}_2\text{O}} = 0.26$ とする。現在追跡している波長が求めた波長 λ と等しければ反射処理を行い、異なっていればレイを透過させる。

二つの格子面の波の重ね合わせを考え、反射光の振幅は入射光の 2 倍とした。波長の強度は振幅の 2 乗に比例することから、反射光の強度は入射光の 4 倍とした。

レイがオパールの境界内にあるとき、一定確率で散乱処理を行う。シリカ球内の不純物は可視光の波長 λ と比較し十分小さいといえるので、レイリー散乱を考えればよい。レイリー散乱の散乱係数 $\beta(\lambda)$ は

$$\beta(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

で与えられ、短波長のレイほど散乱しやすくなる。レイが進んだ距離 d_{sum} を保持しておき、一様乱数 u を用いて

$$d_{\text{sum}} > -\frac{1}{\beta} \log(1 - u)$$

のときに散乱処理を行う。レイリー散乱における位相関数の重点的サンプリングは文献 [3] を参考とした。

λ_{\min} から λ_{\max} まで波長別に光の経路を追跡し、得られた波長ごとのエネルギー分布 $L_e(\lambda)$ を、以下の式によって XYZ 表色系に変換する：

$$X = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \bar{x}(\lambda) L_e(\lambda) d\lambda,$$

$$Y = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \bar{y}(\lambda) L_e(\lambda) d\lambda,$$

$$Z = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} \bar{z}(\lambda) L_e(\lambda) d\lambda.$$

ここで、 $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$ は等色関数である。

得られた XYZ 値を以下の式によって RGB 値に変換することで画像を得る：

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.3655 & -0.8971 & -0.4683 \\ -0.5151 & 1.4264 & -0.0887 \\ 0.0052 & -0.0144 & -1.0089 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

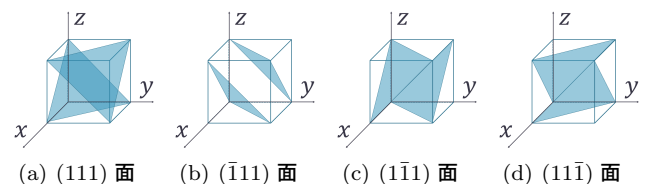


図 6: $\langle 111 \rangle$ 面の種類。立方晶において $\langle 111 \rangle$ 面は 4 種類存在するため、格子面の法線は 8 本である。

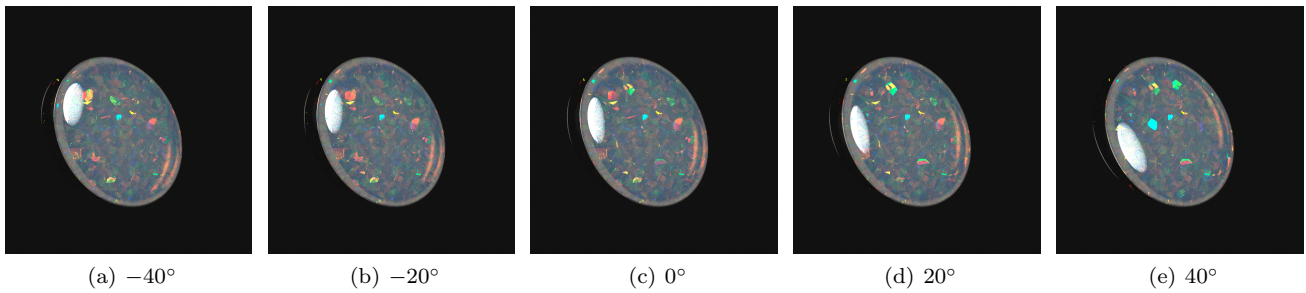


図 7: 提案手法によるシミュレーションの実行例. 同じ視点から見ても光源方向 θ を変えることでオパール内に異なる模様が現れ, 遊色効果の表出が確認できる. なお, シリカ球の粒径は $d = 200\text{--}350\text{ nm}$.

5. 結果

本節では, 本手法の実行結果について報告する.

5.1 実行環境

実行環境として, CPU : Intel(R) Core(TM) i9-10900X, RAM : 128 GB, GPU : NVIDIA GeForce RTX 3070 を用いた.

5.2 実行結果

遊色効果の表出, シリカ球の粒径指定による発色の制御, 視点位置を変更した際のポロノイ境界の解像度の変化を確認した.

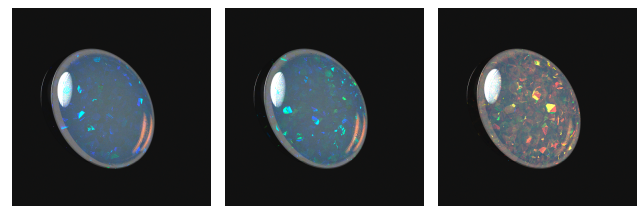
以下に示す結果は, すべて母点数を 2,048 として実行したものである. 楕円体の半径は x 軸方向 : 2.0, y 軸方向 : 0.5, z 軸方向 : 2.5 として設定し, 原点を中心として設置した. また, 背景として平面 $y = -0.6$ を鏡面として定義し, さらに半径 5.0 の球光源を (1.3, 15.0, -6.0) においた.

なお, 生成した画像のオパール表面に見られる白いハイライトは, 楕円体の境界面で球光源を直接反射したものである.

シリカ球の粒径を 200–350 nm とし, 視点を固定したまま光源を y 軸を中心として -40° から 40° まで回転させた結果を図 7 に示す. 光源方向を変化させることによってオパール内に発生する模様に変化していく様子が確認できる.

シリカ球の粒径を 190–210 nm, 200–235 nm, 250–350 nm に指定し, 実行した結果を図 8 に示す. 190–210 nm では青色, 200–235 nm では緑色, 250–350 nm では赤色が発色し, 粒径の指定により色効果の発色が制御可能であることを確認できる.

オパールとカメラ位置の距離を変化させたシミュレーション結果を図 9 に示す. ポロノイ境界が距離関数によって定義されているため, オパールとカメラ位置の距離にかかわらず明瞭な境界を表示することが可能である.



(a) $d = 190\text{--}210\text{ nm}$ (b) $d = 200\text{--}235\text{ nm}$ (c) $d = 250\text{--}350\text{ nm}$

図 8: シリカ球の粒径を変化させたときの本手法のシミュレーション結果. 粒径の範囲を変化させることで発色を制御可能である.

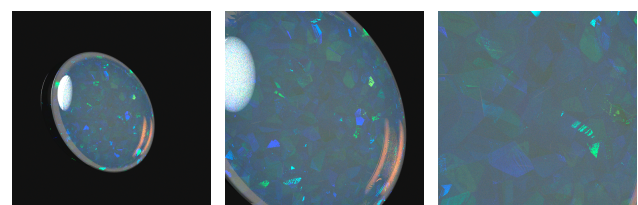
5.3 時間計算量の測定

各シーンの実行時間を表 1 に示す. ここで, モデリングの実行時間は, 母点の生成を開始してから整列 k - d 木の生成が終了するまでの時間であり, レンダリングの実行時間は 512×512 の画素数に対し 2,048 samples / pixel の計算が終了するまでの時間である. なお, 図 7 と図 9 においては, 共通のモデルを用いている.

表 1 から, 本手法においてはレンダリングの実行時間が支配的であることがわかる.

5.4 空間計算量における規則格子ボリューム表現との比較

規則格子ボリューム表現を用いる場合, 文献 [10] と同様に $180 \times 40 \times 220$ 個の格子点を使用すると仮定し, さらに, 各格子点へ以下に示す 10 Bytes の構造体 point



(a) 距離 : 10.5 (b) 距離 : 5.2 (c) 距離 : 2.7

図 9: オパールとカメラ位置との距離を変化させたシミュレーション結果. 距離にかかわらず明瞭な境界を表示することが可能である. なお, シリカ球の粒径は $d = 200\text{--}235\text{ nm}$.

表 1: 各シーンにおける実行時間

図	モデリング [sec]	レンダリング [min]
7(a)		8.091
7(b)		8.197
7(c)	3.753×10^{-1}	8.210
7(d)		8.057
7(e)		8.084
8(a)	2.104×10^{-1}	7.808
8(b)	3.147×10^{-1}	8.421
8(c)	3.414×10^{-1}	7.894
9(a)		7.764
9(b)	3.713×10^{-1}	2.187×10^1
9(c)		1.929×10^1

```
struct point {
    short alpha, beta, gamma;  \  結晶の傾き
    float radius;             \  粒径
}
```

を格納すると仮定すれば、約 15.8 MBytes のメモリが必要である。一方で、本手法による場合、一つの母点に必要なメモリは 24 Bytes であるから、母点数が 66,000 個未満であれば、本手法の方が空間計算量を削減できる。

本稿においては 2,048 個の母点を使用したため、使用したメモリは約 49.1 KBytes であり、大幅に空間計算量を削減した。ただし、実物のオパールがどの程度の母点数で近似できるかに関しては、結晶学の観点からさらに詳細な調査が必要である (6.2 項参照)。

6. 結論と今後の課題

本稿では、三次元ボロノイ分割による結晶構造のモデリングによって、オパールの遊色効果のシミュレーション手法を提案した。遊色効果の表出を確認し、また、オパールとカメラの位置にかかわらず明瞭な結晶の境界を表示させることに成功した。これにより、オパールのビジュアルシミュレーションにおける写実性を向上させることができた。本研究に関して、今後取り組むべき課題を以下に示す。

6.1 規則格子ボリューム表現との計算量における比較評価

本手法では、距離関数を呼び出すごとに母点の最近傍探索が必要になるため、時間計算量の増大が懸念される。母点のみによるボリューム表現と規則格子ボリューム表現を用いる手法について、時間計算量を測定し、空間計算量とのトレードオフを比較評価する必要がある。

6.2 使用する母点数の適切なスケール

オパールの外形に対するコロイド結晶の大きさの比から、シミュレーションを行う際に適切な母点の個数が求ま

るはずである。コロイド結晶の現実的な物性値について、結晶学の観点から引き続き調査を進めていく必要がある。

6.3 パス形成の効率化

通常のパストレーシングでは、光源からオパール内部を經由し視点へと到達するパスを形成する確率が低いため、収束に時間を要する。効率の良いパス形成を行うレンダリング手法として、フォトンマッピング [6] 当の採用を検討する。

謝辞

オパールの接写動画やオパールの組成に関する資料を提供していただいた、山梨宝石博物館 専務 山雄一郎様に感謝する。本研究の一部は、令和 3 年度科研費基盤研究 (A) 21H04916 の支援により実施された。

参考文献

- [1] Aurenhammer, F.: Voronoi Diagrams—A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure, *ACM Computing Surveys*, Vol. 23, No. 3, pp. 345–405 (1991).
- [2] Bentley, J. L.: Multidimensional Binary Search Trees Used for Associative Searching, *Communications of the ACM*, Vol. 18, No. 9, pp. 509–517 (1975).
- [3] Frisvad, J. R.: Importance Sampling the Rayleigh Phase Function, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 28, No. 12, pp. 2436–2441 (2011).
- [4] Hart, J. C., Sandin, D. J., and Kauffman, L. H.: Ray Tracing Deterministic 3-D Fractals, *SIGGRAPH Computer Graphics*, Vol. 23, No. 3, pp. 289–296 (1989).
- [5] Imura, M., Abe, T., Kanaya, I., Yasumuro, Y., Manabe, Y., and Chihara, K.: Rendering of 'Play of Color' Using Stratified Model Based on Amorphous Structure of Opal, *Proceedings of the Seventh International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications*, pp. 349–358 (2003).
- [6] Jensen, H. W.: *Realistic Image Synthesis Using Photon Mapping*, A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA (2001).
- [7] Pimpinelli, A., Tumbek, L., and Winkler, A.: Scaling and Exponent Equalities in Island Nucleation: Novel Results and Application to Organic Films, *The Journal of Physical Chemistry Letters*, Vol. 5, No. 6, pp. 995–998 (2014).
- [8] Radziszewski, M., Boryczko, K., and Alda, W.: An Improved Technique for Full Spectral Rendering, *Journal of WSCG*, Vol. 17, No. 1 (2009).
- [9] 竹岡 敬和: コロイド粒子集合体を利用した刺激応答性構造発色性材料の開発, *光学*, Vol. 43, No. 11, pp. 516–523 (2014).
- [10] 田淵 宏一, 河合 利幸: ベクトル画像を用いたオパールのボリュームモデル構築とフォトンマッピング法による映像化, 第 30 回バイオメディカル・ファジィ・システム学会年次大会講演論文集, pp. 349–358 (2017).
- [11] 藤代 一成 (編著): *CAD/CAM*, 丸善, 東京 (1990).
- [12] 横田 壮真, 藤代 一成: 遊色効果のビジュアルシミュレーションのためのボロノイ分割ベースのオパールモデリング, 情報処理学会第 84 回全国大会講演論文集, 7ZG-02 (2022).
- [13] 蓮 精, 嘉村 茂邦: 人工オパール結晶の話, *日本結晶学会誌*, Vol. 23, No. 3, pp. 217–226 (1981).