

ハンディキャップのある対戦に対する Bradley-Terry モデルの適用

新沼 広大¹ 廣瀬 善大^{2,3,†1} 今井 英幸^{2,3,a)}

受付日 2021年3月26日, 採録日 2021年11月2日

概要: 一対比較によるデータに用いられる Bradley-Terry モデルを, 実力差に応じたハンディキャップのある対戦による勝敗のデータに適用する手法を提案する. この手法は, 順序効果を取り入れた Bradley-Terry モデルを複数種類のハンディキャップのある対戦の結果に対して適用できるように拡張したものである. 順序効果とは, 比較や対戦などの順番が結果に与える影響のことで, 加法的順序効果と乗法的順序効果に関する研究がある. それに対応して, ハンディキャップも, 加法的ハンディキャップと乗法的ハンディキャップを定式化し, ハンディキャップを取り入れた複数のモデルの中から, データに最も適合したものを選択する手法を提案した.

キーワード: 一対比較, Bradley-Terry モデル, 順序効果

An Extension of the Bradley-Terry Model to Ordered Handicaps in Paired Comparisons

KODAI NIINUMA¹ YOSHIHIRO HIROSE^{2,3,†1} HIDEYUKI IMAI^{2,3,a)}

Received: March 26, 2021, Accepted: November 2, 2021

Abstract: We propose a method to apply the Bradley-Terry model, which is used for paired comparison data, to the data of match results with a handicap according to the difference in ability. This method is an extension of the Bradley-Terry model with an order effect, so that it can be applied to the results of handicapped matches. The order effect is the effect of the order in comparison or competition on the result, and the additive order effect and the multiplicative order effect have been proposed. Correspondingly, the handicap is formulated the additive handicap and the multiplicative handicap, and proposed a method to select the one that best fits the data from multiple models incorporating the handicap.

Keywords: paired comparison, Bradley-Terry model, order effect

1. はじめに

球技などのスポーツ競技や対人型ゲーム, あるいは官能

検査などでは, 対戦結果や一対比較によるデータから, チームやプレイヤーの強さ, あるいは製品の品質を決めることがしばしば行われる. このようなデータの分析には Bradley-Terry モデル [4] (以下, B-T モデル) や Thurston-Mosteller モデル [11] が用いられることが多い. いずれのモデルも, プレイヤーの強さや品質に

- 一次元尺度で比較可能である,
- 三すくみの関係がない,

を仮定して, 強さや品質を適当な間隔尺度あるいは比例尺度によって表し, それらの優劣を決めようとするものである.

B-T モデルはオッズ比に基づくモデルであり, 対数線形

¹ 北海道大学大学院情報科学院
Graduate School of Information Science and Technology,
Hokkaido University, Sapporo, Hokkaido 060-0814, Japan
² 北海道大学大学院情報科学研究院
School of Information Science and Technology Hokkaido University, Sapporo, Hokkaido 060-0814 Japan
³ 北海道大学国際連携研究教育局
Global Station for Big Data and Cybersecurity, Hokkaido University, Sapporo, Hokkaido 060-0808 Japan
^{†1} 現在, 明治大学総合数理学部
Presently with Meiji University, School of Interdisciplinary Mathematical Science
^{a)} imai@ist.hokudai.ac.jp

モデルとして解析をすることが可能で、あとで述べるように様々な拡張が提案されている。また、逐次的に強さを更新するレーティング手法の1つである Elo レーティングとも関連があることから、本論文でも B-T モデルを用いる。B-T モデルの概略は 2 章で説明する (B-T モデルの詳細は竹内ら [14]、レーティングの詳細は Langville ら [9] などを参照)。

本論文では、囲碁や将棋といった勝敗を競うゲームの対戦結果によるデータを想定しているため、比較する対象をプレイヤー、プレイヤー同士の対戦結果を勝ち、負けということにする。B-T モデルでは、各対戦結果が、負けを 0、勝ちを 1 とする独立な Bernoulli 分布に従う確率変数であるとする、したがって、すべての対戦結果の同時分布は、2 章で述べるように、積二項分布になる。

B-T モデルは、多くの研究者により適用できる範囲が広がられている。対戦結果が勝ち、負けのほかに、引き分けもあるデータ対しては Rao ら [12] や Davidson [5] によって、3 点差以上で勝ち、2 点差以内で勝ち、引き分け、2 点差以内で負け、3 点差以上で負け、のような順位のあるカテゴリカルデータに対しては Tutz [16] によって、また、時間の経過にともない、プレイヤーの強さが変わるようなデータに対しては Araki ら [2] によって、B-T モデルに取り入れることができるように拡張されている。

さらに、Francis ら [7] では、プレイヤーの強さに加えて、年齢や性別などを共変量としてモデルに取り入れる手法を提案している。

本論文に関連するものとして、順序効果を取り入れた B-T モデルの拡張がある。順序効果とは、囲碁や将棋の先手、後手など、プレイヤーの強さとは別の要因が勝敗に与える影響の1つである。この効果は野球やテニスなどのスポーツ競技ではホームアドバンテージとよばれている。順序効果は同じプレイヤー同士の対戦でも、順番や場所により異なる影響を与える要因のため、共変量とは別の扱いが必要となる。

B-T モデルに順序効果を取り入れる方法として、大きく分けて、加法的順序効果 (Beaver ら [3]) と乗法的順序効果 (Davidson ら [6]) がある。また、乗法的順序効果を三元分割表の交互作用として表現した研究 (広津 [8]) もある。順序効果については 3.1 節で説明する。

囲碁や将棋では、実力差があるプレイヤーが対戦する場合、置き石 (置碁) や駒落ちといったハンディキャップをつけて行われることが多い。このようなハンディキャップも順序効果の一種と見なすことができるが、実力差に応じた複数のハンディキャップがあることから、順序効果を取り入れたモデルをそのまま適用することはできない。

3.2 節では、加法的順序効果および乗法的順序効果を、このようなハンディキャップのある対戦に取り入れるように拡張した 6 種類のモデルと、赤池情報量規準を用いてこれ

らのモデルの中から最適なものを選択する手法を提案する。

4 章で、提案手法を北海道大学囲碁部の対戦データに適用し、ハンディキャップがある対戦に対しても、プレイヤーの強さを推定することができることを示す。

2. Bradley-Terry モデル

B-T モデルでは、各プレイヤーの「強さ」を非負の実数で表し、プレイヤー同士の対戦の勝敗はその数値から計算される確率に従うものと仮定する。ここでは N 人のプレイヤーの集合を $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, N\}$ とし、プレイヤー i の強さを π_i で表す。B-T モデルでは、プレイヤー i がプレイヤー j に勝つ確率が

$$\Pr(i \text{ beats } j) = p_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}, i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \quad (1)$$

であるとする。プレイヤー i とプレイヤー j の対戦回数を n_{ij} ($= n_{ji}$)、プレイヤー i のプレイヤー j に対する勝ち数を確率変数 X_{ij} とし、各対戦の勝敗はすべて独立であると仮定すると、すべての対戦の勝敗 $\{X_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq N\}$ の同時確率は積二項分布

$$\begin{aligned} \Pr(X_{ij} = x_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq N) & \quad (2) \\ &= \prod_i \prod_{j>i} \frac{n_{ij}!}{x_{ij}! x_{ji}!} p_{ij}^{x_{ij}} p_{ji}^{x_{ji}} \\ &= \left(\prod_i \prod_{j>i} \frac{n_{ij}!}{x_{ij}! x_{ji}!} \right) \left(\prod_i \pi_i^{\sum_{j \neq i} x_{ij}} \right) \\ & \quad \times \left(\prod_i \prod_{j>i} (\pi_i + \pi_j)^{-n_{ij}} \right), \\ & \quad 0 \leq x_{ij} \leq n_{ij}, x_{ji} = n_{ij} - x_{ij} \end{aligned}$$

となる。同時確率の式 (2) より、

$$t_i = \sum_{j \neq i} x_{ij}, i \in \mathbb{N}$$

すなわち、各プレイヤーの勝ち数がパラメータ $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ の十分統計量であることが分かる。

本論文では、最尤法を用いてパラメータ $\boldsymbol{\pi}$ を推定する。同時確率の式 (2) から、対数尤度 $l(\boldsymbol{\pi})$ は

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\pi}) &= \text{const.} + \sum_i \sum_{j>i} x_{ij} \log \pi_i \quad (3) \\ & \quad - \sum_i \sum_{j>i} n_{ij} \log(\pi_i + \pi_j) \\ &= \text{const.} + \sum_i t_i \log \pi_i \\ & \quad - \sum_i \sum_{j>i} n_{ij} \log(\pi_i + \pi_j) \end{aligned}$$

となるので、最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ とすると、

$$\hat{\pi} = \arg \max_{\pi} l(\pi)$$

である．ここで const. はパラメータを含まない定数項 $\sum_i^N \sum_{j>i}^N \log \left(\frac{n_{ij}!}{x_{ij}! x_j!} \right)$ である．

確率 $\Pr(i \text{ beats } j)$ の式 (1) あるいは同時確率の式 (2) から，パラメータを正の定数倍しても（対数）尤度は変わらないため，パラメータを一意に定めるためには適当な基準化をする必要がある．本論文では，プレイヤーの強さの平均が 50 となるように

$$\sum_i^N \pi_i = 50N$$

と基準化する．

すべての対戦で負けているプレイヤーがいる場合，このプレイヤーを j^* とすると，

$$\hat{\Pr}(j^* \text{ beats } i) = \frac{\hat{\pi}_{j^*}}{\hat{\pi}_i + \hat{\pi}_{j^*}} = 0, \forall i \in \{i \mid i \in \mathbb{N}, n_{ij^*} > 0\}$$

から， $\hat{\pi}_{j^*} = 0$ となる．したがって，プレイヤー j^* のパラメータの値は，他のプレイヤーのパラメータの値に影響を与えることはない．

また，すべての対戦で勝っているプレイヤーがいる場合，このプレイヤーを i^* とすると，

$$\hat{\Pr}(i^* \text{ beats } j) = \frac{\hat{\pi}_{i^*}}{\hat{\pi}_{i^*} + \hat{\pi}_j} = 1, \forall j \in \{j \mid j \in \mathbb{N}, n_{i^*j} > 0\}$$

から，プレイヤー i^* と対戦したプレイヤーのパラメータはすべて 0 となる．これは，プレイヤー i^* と対戦したプレイヤー全員が全敗であることを意味する．したがって，全勝のプレイヤーがいる場合に最尤推定量が存在するのは，そのプレイヤーと対戦したプレイヤー全員が全敗であるときに限られる．現実の対戦では，こうした条件が満たされることはほとんどないので，全勝のプレイヤーがいる場合には最尤推定量は存在しないと考えてよい．

これらのことから，本研究では全敗のプレイヤーと全勝のプレイヤーを解析の対象から除外するものとする．

3. 順序効果とハンディキャップ

3.1 順序効果

B-T モデルでは，勝敗の確率は対戦するプレイヤーの強さであるパラメータによって式 (1) のように仮定した．実際の対戦では，プレイヤーの強さだけでなく，囲碁，将棋のように先手，後手の順番が勝敗に影響を及ぼすことがある．こうした影響は順序効果とよばれている．

以下では，プレイヤー i とプレイヤー j の順序を含めた対戦を順序対 (i, j) で表す．加法的順序効果では，順序による効果を表すパラメータ $\delta_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$ を用いて，

$$\begin{aligned} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) &= \frac{\pi_i + \delta_{ij}}{\pi_i + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i \mid (i, j)) &= \frac{\pi_j - \delta_{ij}}{\pi_i + \pi_j} \end{aligned}$$

とする [3]．ただし， $\forall i, j \in \mathbb{N}, |\delta_{ij}| \leq \min(\pi_i, \pi_j)$ である． $\delta_{ij} > 0$ であれば，プレイヤー i が先攻であるときにプレイヤー j に対する勝率が上がることを示す．

乗法的順序効果では，順序による効果を表すパラメータ $\theta_{ij}, i, j \in \mathbb{N}$ を用いて，

$$\begin{aligned} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) &= \frac{\theta_{ij} \pi_i}{\theta_{ij} \pi_i + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i \mid (i, j)) &= \frac{\pi_j}{\theta_{ij} \pi_i + \pi_j} \end{aligned}$$

とする [6]．ただし， $\forall i, j \in \mathbb{N}, \theta_{ij} > 0$ である． $\theta_{ij} > 1$ であれば，プレイヤー i が先攻であるときにプレイヤー j に対する勝率が上がることを示す．

順序効果を取り入れた B-T モデルでは，順序効果が存在するかどうか（加法的順序効果では $\delta_{ij} \neq 0$ ，乗法的順序効果では $\theta_{ij} \neq 1$ ），存在する場合には，その効果は対戦によらず一定であるかどうか（加法的順序効果では $\forall i, j \in \mathbb{N}, \delta_{ij} = \delta$ ，乗法的順序効果では $\forall i, j \in \mathbb{N}, \theta_{ij} = \theta$ ），などが興味の対象となる．それらに関する仮説検定についても，対応する検定統計量とその漸近分布が得られており，一定の条件のもとで統計的仮説検定が可能である．R 言語の BradleyTerry2 パッケージ [15] では，乗法的順序効果を取り入れたモデルのパラメータ推定や仮説検定ができるよう設計されている．

3.2 ハンディキャップ

囲碁や将棋では，実力差に応じてハンディキャップをつけた対戦が行われる．囲碁では，実力が下のプレイヤーが，あらかじめ盤上にいくつかの石を置いて（置き石）対戦をする置碁，将棋では，実力が上のプレイヤーが，いくつかの駒を取り除いて対戦をする駒落ち，という方法がとられる．

順序効果と異なり，これらのハンディキャップには段階があり，囲碁では定先，2子局，3子局，の順にハンディキャップが大きくなり，将棋では，香落ち，角落ち，飛車落ち，の順にハンディキャップが大きくなるとされている．これらの段階的なハンディキャップを B-T モデルに取り入れる．

順序を取り入れたモデルでは，プレイヤーの強さを表すパラメータ π_i が，順序効果により

$$\pi_i \leftarrow \begin{cases} \pi_i + \delta_{ij}, & \text{加法的順序効果,} \\ \theta_{ij} \pi_i, & \text{乗法的順序効果} \end{cases}$$

と変わることによって，プレイヤー i がプレイヤー j に勝つ確率が， $\Pr(i \text{ beats } j)$ から $\Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j))$ に変化すると考えることができる．順序効果を表す δ_{ij}, θ_{ij} は対戦するプレイヤーに依存するパラメータであるが，本論文ではこれをハンディキャップに依存するパラメータとして，対戦 (i, j) におけるハンディキャップが h のとき，

$$\pi_i \leftarrow \begin{cases} \pi_i + f(h), & \text{加法的 HC,} \\ (1 + g(h))\pi_i, & \text{乗法的 HC} \end{cases} \quad (4)$$

と変わることによって、プレイヤー i がプレイヤー j に勝つ確率が増えるモデルを用いる（以下、数式の中では、ハンディキャップを HC と略記する）。ただし、 $f(h)$ 、 $g(h)$ は対戦のハンディキャップのみに依存し、プレイヤーには依存しないものとする。

ここでは、ハンディキャップの集合を $\mathbb{H} = \{1, 2, \dots, H\}$ とし、 $h \in \{0\} \cup \mathbb{H}$ で対戦のハンディキャップを表すものとする。ただし、 $h = 0$ はハンディキャップのないことを表し、 $h_2 > h_1$ であれば、 h_2 は h_1 よりも大きなハンディキャップであるとする。

以下のモデルでは、囲碁のように実力が下位のプレイヤーに正のハンディキャップを与えることを想定して、プレイヤー i とプレイヤー j の対戦を表す順序対 (i, j) のハンディキャップを h_{ij} とし、 $h_{ij} > 0$ であれば、 $h_{ji} = 0$ とする。これは、 $h_{ij} > 0$ の対戦 (i, j) はプレイヤー j がプレイヤー i より強く、弱いプレイヤーだけにハンディキャップが与えられること、 $h_{ij} = h_{ji} = 0$ の対戦 (i, j) はハンディキャップのない通常の対戦であることを表している。この定式化は、将棋のように実力が上位のプレイヤーに負のハンディキャップを与える対戦に適用することも可能である。

B-T モデルにハンディキャップを取り入れる場合には、式 (4) の $f(h)$ 、 $g(h)$ にどのような条件を課するかによって、異なるモデルを考えることができる。最も一般的な（制約のない）モデルは、ハンディキャップに順序制約だけを課するものである。この場合、 $f(h)$ 、 $g(h)$ が満たすべき条件は、

$$h_1 > h_2 \text{ のとき } \begin{cases} f(h_1) \geq f(h_2), \\ g(h_2) \geq g(h_2) \end{cases}$$

となる（加法的ハンディキャップモデル 1、および、乗法的ハンディキャップモデル 1）。

本論文では、さらに制約条件の強いモデルとして、 $f(h)$ 、 $g(h)$ が h の一次式で表されるモデルについても考察した（加法的ハンディキャップモデル 2、3、および、乗法的ハンディキャップモデル 2、3）。

加法的ハンディキャップモデルは、プレイヤー i にハンディキャップ h が与えられたときのパラメータ

$$\pi_{i:add}(h) = \begin{cases} \pi_i + f(h), & \text{加法的 HC モデル 1,} \\ \pi_i + \theta_1 h + \theta_2, & \text{加法的 HC モデル 2,} \\ \pi_i + \theta_3 h, & \text{加法的 HC モデル 3} \end{cases}$$

によって、

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{\pi_{i:add}(h)}{\pi_{i:add}(h) + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{\pi_j}{\pi_{i:add}(h) + \pi_j} \end{cases}$$

となるモデルで、具体的な定式化は以下のとおりである。

(1) 加法的ハンディキャップモデル 1

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{\pi_i + f(h_{ij})}{\pi_i + f(h_{ij}) + \pi_j + f(h_{ji})}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{\pi_j + f(h_{ji})}{\pi_i + f(h_{ij}) + \pi_j + f(h_{ji})}. \end{cases}$$

ただし、 $f(0) = 0$ 、かつ、 $h_{ij} < h_{i'j'}$ であれば、 $f(h_{ij}) \leq f(h_{i'j'})$ が成り立つとする。

(2) 加法的ハンディキャップモデル 2

$h_{ij} = h_{ji} = 0$ のとき

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j}. \end{cases}$$

$h_{ij} \in \mathbb{H}$ のとき

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{\pi_i + \theta_1 h_{ij} + \theta_2}{\pi_i + \theta_1 h_{ij} + \theta_2 + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{\pi_j}{\pi_i + \theta_1 h_{ij} + \theta_2 + \pi_j}. \end{cases}$$

ただし、 $\theta_1 \geq 0$ 、かつ、 $\theta_1 + \theta_2 \geq 0$ である。この条件は、ハンディキャップが正の値であるために必要なものである。

(3) 加法的ハンディキャップモデル 3

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{\pi_i + \theta_3 h_{ij}}{\pi_i + \theta_3 h_{ij} + \pi_j + \theta_3 h_{ji}}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{\pi_j + \theta_3 h_{ji}}{\pi_i + \theta_3 h_{ij} + \pi_j + \theta_3 h_{ji}}. \end{cases}$$

ただし、 $\theta_3 \geq 0$ である。

同様に、乗法的ハンディキャップモデルは、プレイヤー i にハンディキャップ h が与えられたときのパラメータ

$$\pi_{i:multi}(h) = \begin{cases} (1 + g(h))\pi_i, & \text{乗法的 HC モデル 1,} \\ (1 + \delta_1 h + \delta_2)\pi_i, & \text{乗法的 HC モデル 2,} \\ (1 + \delta_3 h)\pi_i, & \text{乗法的 HC モデル 3} \end{cases}$$

によって、

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{\pi_{i:multi}(h)}{\pi_{i:multi}(h) + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{\pi_j}{\pi_{i:multi}(h) + \pi_j} \end{cases}$$

となるモデルで、具体的な定式化は以下のとおりである。

(4) 乗法的ハンディキャップモデル 1

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j | (i, j)) = \frac{(1 + g(h_{ij}))\pi_i}{(1 + g(h_{ij}))\pi_i + (1 + g(h_{ji}))\pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i | (i, j)) = \frac{(1 + g(h_{ji}))\pi_j}{(1 + g(h_{ij}))\pi_i + (1 + g(h_{ji}))\pi_j}. \end{cases}$$

ただし、 $g(0) = 0$ 、かつ、 $h_{ij} < h_{i'j'}$ であれば、

$g(h_{ij}) \leq g(h_{i'j'})$ が成り立つとする.

(5) 乗法的ハンディキャップモデル 2

$h_{ij} = h_{ji} = 0$ のとき

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i \mid (i, j)) = \frac{\pi_j}{\pi_i + \pi_j}. \end{cases}$$

$h_{ij} \in \mathbb{H}$ のとき

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) = \frac{(1 + \delta_1 h_{ij} + \delta_2) \pi_i}{(1 + \delta_1 h_{ij} + \delta_2) \pi_i + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i \mid (i, j)) = \frac{\pi_j}{(1 + \delta_1 h_{ij} + \delta_2) \pi_i + \pi_j}. \end{cases}$$

ただし, $\delta_1 \geq 0$, かつ, $\delta_1 + \delta_2 \geq 0$ である. この条件は, ハンディキャップが正の値であるために必要なものである.

(6) 乗法的ハンディキャップモデル 3

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) = \frac{(1 + \delta_3 h_{ij}) \pi_i}{(1 + \delta_3 h_{ij}) \pi_i + (1 + \delta_3 h_{ji}) \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i \mid (i, j)) = \frac{(1 + \delta_3 h_{ji}) \pi_j}{(1 + \delta_3 h_{ij}) \pi_i + (1 + \delta_3 h_{ji}) \pi_j}. \end{cases}$$

ただし, $\delta_3 \geq 0$ である.

加法的ハンディキャップモデル, 乗法的ハンディキャップモデルとも, モデル 1 はハンディキャップの単調性だけを仮定したモデル, モデル 2 とモデル 3 はハンディキャップによる変化が傾きが非負の一次式で表されるモデルになっている.

3.3 モデルの選択

前節の 6 種類のモデルの中から, 赤池情報量規準 [1] (Akaike Information Criteria, 以下, AIC) を用いて最適なモデルを選択する. 加法的ハンディキャップモデル 1 のハンディキャップを $\theta_1 = (f(h))_{h \in \mathbb{H}}$ とすると, 対数尤度 $l(\pi, \theta_1)$ は, B-T モデルの対数尤度の式 (3) と同様に,

$$\begin{aligned} l(\pi, \theta) = \text{const.} + \sum_i \sum_{j>i}^N x_{ij} \log \pi_{ij} \\ + \sum_i \sum_{j>i}^N x_{ji} \log \pi_{ji} - \sum_i \sum_{j>i}^N n_{ij} \log(\pi_{ij} + \pi_{ji}) \end{aligned} \quad (5)$$

ただし,

$$\begin{cases} \pi_{ij} = \pi_i + f(h_{ij}), \\ \pi_{ji} = \pi_j + f(h_{ji}) \end{cases}$$

である. 加法的ハンディキャップモデル 2, 3 の対数尤度は, それぞれ $\theta_2 = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_3 = \theta_3$ として, 乗法的ハンディキャップモデル 1, 2, 3 の対数尤度 $l(\pi, \delta_m), m = 1, 2, 3$ も対応するパラメータを用いて同様に定義する.

各モデルに対して式 (5) を最大にする最尤推定量を

$(\hat{\pi}_m, \hat{\theta}_m), (\hat{\pi}_m, \hat{\delta}_m), m = 1, 2, 3$, とするとき, それぞれのモデルの AIC は

AIC (加法的 HC モデル 1)

$$= -2(l(\hat{\pi}_1, \hat{\theta}_1) - (N - 1) - H),$$

AIC (加法的 HC モデル 2)

$$= -2(l(\hat{\pi}_2, \hat{\theta}_2) - (N - 1) - 2),$$

AIC (加法的 HC モデル 3)

$$= -2(l(\hat{\pi}_3, \hat{\theta}_3) - (N - 1) - 1),$$

AIC (乗法的 HC モデル 1)

$$= -2(l(\hat{\pi}_1, \hat{\delta}_1) - (N - 1) - H),$$

AIC (乗法的 HC モデル 2)

$$= -2(l(\hat{\pi}_2, \hat{\delta}_2) - (N - 1) - 2),$$

AIC (乗法的 HC モデル 3)

$$= -2(l(\hat{\pi}_3, \hat{\delta}_3) - (N - 1) - 1)$$

となる. この中から, AIC が最小となるものを, 最適なモデルとして選択する.

4. 囲碁対戦データへの適用

本章では, 3 章で導入した 6 種類のモデルを, 囲碁の対戦で得られたデータに適用する. このデータは, 2016 年度の北海道大学囲碁部内での対戦結果で, 対象となるプレイヤーは部内の段位が初段以上で, かつ, 当該年度に 5 局以上の対戦を行った部員である.

部内の段位は囲碁部内で与えられているもので, 部員の持ち点によって決まる. 持ち点は, ハンディキャップの有無によらず, 対局に勝つと持ち点が 1 点増え, 負けると 1 点減る. 持ち点が 101 点から 107 点までが初段, 108 点から 114 点までが 2 段, のように 7 点きざみで 5 段までの段位が設定されている. 6 段位上は別の基準になるが, ハンディキャップの有無によらず, 対局の勝敗だけで増減する持ち点により段位が決まることに変わりはない.

この条件をみたくプレイヤーは 15 名で, 総対戦数は 123 局であるが, プレイヤの中に, 5 局対戦して 5 戦全勝の者が 1 名いるので, 2 章で説明したとおり, このプレイヤーを解析から除外した. したがって, 対象となるプレイヤーは 14 名, 対戦数は 118 局である.

対戦は部内の段位差に応じて実力下位者 (黒番) にハンディキャップを与えて行われる. ハンディキャップの種類と対戦数, およびハンディキャップごとの勝敗は表 1 のとおりである. ハンディキャップなしの対戦以外では, 引き分け (ジゴ, 互いの地が同数になること) が起こりうるが, 部内の規定に従って上位者 (白番) の勝ちとしている.

表 2 は, ハンディキャップの有無を考慮せず, 各プレイヤーの勝敗のみを用いた B-T モデルによるプレイヤーのパラメータ $(\pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ である. プレイヤ番号は, 部内段位の上位

表 1 ハンディキャップの種類と勝敗

Table 1 Match results and their handicaps.

h	ハンディキャップの内容	対戦数	勝敗
0	なし (互先, コミ 6 目半)	47	15 - 32
1	定先 (コミなし)	29	13 - 16
2	2子局 (コミなし)	20	13 - 7
3	3子局 (コミなし)	12	6 - 6
4	4子局 (コミなし)	10	5 - 5

勝敗は, 黒番勝数 - 白番勝数

表 2 勝敗数から推定されたパラメータ (ハンディキャップの考慮なし)

Table 2 Estimated parameters without handicap effects.

プレイヤー i	部内段位	π_i
プレイヤー 6	5	131.20
プレイヤー 9	4	103.17
プレイヤー 12	2	86.97
プレイヤー 2	7	62.93
プレイヤー 1	7	56.35
プレイヤー 8	4	47.21
プレイヤー 7	5	46.29
プレイヤー 5	6	39.19
プレイヤー 3	6	35.24
プレイヤー 13	2	32.13
プレイヤー 11	3	22.54
プレイヤー 4	6	20.06
プレイヤー 14	2	10.78
プレイヤー 10	3	5.95

表 3 加法的ハンディキャップモデル 1

Table 3 Estimated parameters by additive handicap model 1.

プレイヤー i	部内段位	π_i
プレイヤー 1	7	116.38
プレイヤー 2	7	106.79
プレイヤー 6	5	105.93
プレイヤー 9	4	98.03
プレイヤー 5	6	66.25
プレイヤー 3	6	60.87
プレイヤー 7	5	58.37
プレイヤー 4	6	35.60
プレイヤー 8	4	31.54
プレイヤー 11	3	6.76
プレイヤー 13	2	6.67
プレイヤー 14	2	2.63
プレイヤー 12	2	2.40
プレイヤー 10	3	1.78

h	$f(h)$
1	8.05
2	30.61
3	45.25
4	49.85

者から段位順 (段位が同じプレイヤーは, その中で名簿順) に 1 から 14 とした.

6 種類のハンディキャップモデルによるプレイヤーのパラメータとハンディキャップの値は表 3, 表 4, 表 5, 表 6, 表 7, 表 8 のとおりである.

表 6 から表 8 より, 乗法的ハンディキャップモデルでは

表 4 加法的ハンディキャップモデル 2

Table 4 Estimated parameters by additive handicap model 2.

プレイヤー i	部内段位	π_i
プレイヤー 1	7	114.22
プレイヤー 2	7	106.00
プレイヤー 6	5	102.45
プレイヤー 9	4	97.27
プレイヤー 5	6	67.97
プレイヤー 3	6	61.97
プレイヤー 7	5	59.76
プレイヤー 4	6	36.41
プレイヤー 8	4	33.20
プレイヤー 11	3	7.00
プレイヤー 13	2	6.84
プレイヤー 14	2	2.69
プレイヤー 12	2	2.40
プレイヤー 10	3	1.83

h	$\theta_1 h + \theta_2$
1	8.74
2	24.81
3	40.88
4	56.95

表 5 加法的ハンディキャップモデル 3

Table 5 Estimated parameters by additive handicap model 3.

プレイヤー i	部内段位	π_i
プレイヤー 1	7	93.19
プレイヤー 2	7	88.66
プレイヤー 3	6	83.20
プレイヤー 6	5	76.92
プレイヤー 9	4	76.83
プレイヤー 7	5	75.22
プレイヤー 5	6	70.35
プレイヤー 8	4	61.13
プレイヤー 4	6	46.90
プレイヤー 11	3	9.84
プレイヤー 13	2	9.70
プレイヤー 14	2	3.53
プレイヤー 12	2	2.27
プレイヤー 10	3	2.25

h	$\theta_3 h$
1	14.62
2	29.23
3	43.85
4	58.46

プレイヤー 1, 2, 6 の 3 名のパラメータが他と比較して大きく, ついで, プレイヤ 3, 5, 7, 9 のパラメータが大きいことが分かる. 乗法的ハンディキャップモデルでは, 上位 3 プレイヤの中での順位と, プレイヤ 5 とプレイヤー 9 の順位が入れ替わっているだけで, 6 位以下 9 人のプレイヤーの順位は同じである.

表 9 は各モデルの対数尤度と AIC の値を示している. ただし, 対数尤度は各モデルに共通の定数項である式 (5) の const. を除いた値である. 表 9 から, 乗法的ハンディキャップモデル 3 の AIC が最も小さいことが分かる. このモデルでは, プレイヤ i に表 1 のハンディキャップ h が与えられた場合のパラメータは,

$$\pi_i(h) = (1 + 0.82h)\pi_i$$

となり, ハンディキャップ h が与えられたプレイヤー i とプレイヤー j との対戦における確率は,

表 6 乗法的ハンディキャップモデル 1

Table 6 Estimated parameters by multiplicative handicap model 1.

プレイヤー i	部内段位	π_i		
プレイヤー 6	5	108.55		
プレイヤー 1	7	108.02		
プレイヤー 2	7	107.87		
プレイヤー 5	6	72.17		
プレイヤー 9	4	68.38	h	$g(h)$
プレイヤー 3	6	61.63	1	0.24
プレイヤー 7	5	53.95	2	2.87
プレイヤー 4	6	37.38	3	3.84
プレイヤー 8	4	27.93	4	3.84
プレイヤー 12	2	22.82		
プレイヤー 13	2	13.16		
プレイヤー 11	3	10.49		
プレイヤー 14	2	4.13		
プレイヤー 10	3	3.52		

表 7 乗法的ハンディキャップモデル 2

Table 7 Estimated parameters by multiplicative handicap model 2.

プレイヤー i	部内段位	π_i		
プレイヤー 2	7	110.38		
プレイヤー 1	7	108.52		
プレイヤー 6	5	105.38		
プレイヤー 5	6	75.61	h	$\delta_1 h + \delta_2$
プレイヤー 9	4	66.45	1	0.36
プレイヤー 3	6	62.38	2	2.27
プレイヤー 7	5	54.49	3	4.17
プレイヤー 4	6	39.08	4	6.08
プレイヤー 8	4	27.66		
プレイヤー 12	2	21.53		
プレイヤー 13	2	11.79		
プレイヤー 11	3	9.60		
プレイヤー 14	2	3.75		
プレイヤー 10	3	3.39		

$$\begin{cases} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) = \frac{\pi_i(h)}{\pi_i(h) + \pi_j}, \\ \Pr(j \text{ beats } i \mid (i, j)) = \frac{\pi_j}{\pi_i(h) + \pi_j} \end{cases}$$

となる. 2 番目に AIC が小さい乗法的ハンディキャップモデル 2 との差は 0.8 程度であるが, この 2 つのモデルと他の 4 つのモデルの AIC には 1.5 程度の差がある. 坂元ら [13] では, AIC の差が 1 から 2 程度以上であればその差は有意であるとしていることから, 乗法的ハンディキャップモデル 2 と 3 との差は有意とはいえないが, 他のモデルとは有意な差があるとしてよい.

強さの比 $\frac{\pi_i}{\pi_j}$ が等しいプレイヤー同士の対戦であれば, $h_{ij} > 0$ のとき, 加法的ハンディキャップモデルでは,

$$\Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) = \frac{\pi_i + f(h_{ij})}{\pi_i + f(h_{ij}) + \pi_j}$$

表 8 乗法的ハンディキャップモデル 3

Table 8 Estimated parameters by multiplicative handicap model 3.

プレイヤー i	部内段位	π_i		
プレイヤー 6	5	107.49		
プレイヤー 2	7	103.49		
プレイヤー 1	7	102.42		
プレイヤー 9	4	72.60	h	$\delta_3 h$
プレイヤー 5	6	70.02	1	0.82
プレイヤー 3	6	60.08	2	1.63
プレイヤー 7	5	55.55	3	2.45
プレイヤー 4	6	35.74	4	3.27
プレイヤー 8	4	34.37		
プレイヤー 12	2	23.38		
プレイヤー 13	2	14.37		
プレイヤー 11	3	11.51		
プレイヤー 14	2	4.83		
プレイヤー 10	3	4.15		

表 9 各モデルの尤度と AIC

Table 9 AIC of models.

モデル	尤度	AIC
加法的 HC モデル 1	-69.05	172.09
加法的 HC モデル 2	-69.15	168.31
加法的 HC モデル 3	-70.19	168.38
乗法的 HC モデル 1	-68.20	170.40
乗法的 HC モデル 2	-68.39	166.78
乗法的 HC モデル 3	-69.00	166.00

$$1 + \frac{f(h_{ij})}{\pi_i} = \frac{1 + \frac{f(h_{ij})}{\pi_i}}{1 + \frac{f(h_{ij})}{\pi_i} + \frac{\pi_j}{\pi_i}}$$

から, π_i が大きい, つまり, 実力が上のプレイヤー同士の対戦の方がハンディキャップの効果が小さくなるのに対し, 乗法的ハンディキャップモデルでは,

$$\begin{aligned} \Pr(i \text{ beats } j \mid (i, j)) &= \frac{(1 + g(h_{ij}))\pi_i}{(1 + g(h_{ij}))\pi_i + \pi_j} \\ &= \frac{1 + g(h_{ij})}{1 + g(h_{ij}) + \frac{\pi_j}{\pi_i}} \end{aligned}$$

から, ハンディキャップの効果が変わらない. 囲碁においては, 実力が上のプレイヤーほど, 与えられたハンディキャップを有効に利用して戦いを進めることができると考えられる. 置碁の対戦に対して乗法的ハンディキャップモデルが選択されることは, プレイヤの置碁に対する経験的な評価に合致しているものといえる.

ハンディキャップを取り入れた効果を, プレイヤ 1 とプレイヤー 9 を例として説明する. 表 10 はハンディキャップを考慮しない場合 (表 2) と, 乗法的ハンディキャップモデル 3 (表 9) によるパラメータの値である. 2 名のパラメータは, ほぼ入れ替わっているといってよいほど異なっ

表 10 プレイヤ 1 とプレイヤ 9 の比較
Table 10 Strengths of Player 1 and Player 9.

	ハンディキャップ の考慮なし	乗法的ハンディ キャップモデル 3
プレイヤ 1 (7 段)	56.35	102.42
プレイヤ 9 (4 段)	103.17	72.60

表 11 プレイヤ 1 とプレイヤ 9 の勝敗の内容
Table 11 Detailed match results of Player 1 and Player 9.

プレイヤ 1 (7 段)		プレイヤ 9 (4 段)	
ハンディキャップ	勝敗	ハンディキャップ	勝敗
-3	3 - 0	-1	2 - 0
-2	0 - 2	0	1 - 1
0	1 - 0	+1	1 - 0
合計	4 - 2	+2	2 - 1
		合計	6 - 2

ている。

この 2 名の勝敗の内訳は表 11 のとおりである。ここで、符号がプラスのハンディキャップは、実力下位のプレイヤ (黒番) としてハンディキャップが与えられた対戦、符号がマイナスのハンディキャップは、実力上位のプレイヤ (白番) としてハンディキャップを与えた相手との対戦、ゼロはハンディキャップなしの対戦の勝敗を示している。この表から分かるとおり、プレイヤ 9 は、合計の勝率はプレイヤ 1 より高いものの、ハンディキャップを与えられた対戦での勝利が多いのに対し、プレイヤ 1 は、ハンディキャップを与えた対戦が多く、ハンディキャップを考慮しないモデルのパラメータは必ずしも実力を表しているとはいえない。それに対して、乗法的ハンディキャップモデル 3 では、プレイヤ 1 がプレイヤ 9 のパラメータを上回っており、部内段位とも整合している。

5. まとめ

本論文では、順序効果を取り入れた B-T モデルを拡張し、囲碁の置き碁や将棋の駒落ちといった実力差に応じたハンディキャップのある対戦に適用する手法を提案した。

提案したモデルは、B-T モデルにおける順序効果を段階的なハンディキャップを持つ対戦にも適応できるように定式化したものである。順序効果に加法的なものや乗法的なものがあることに対応して、ハンディキャップにおいても加法的な効果と乗法的な効果を持つような 6 種類にモデルと、その中から情報量規準によって最もあてはまりのよいモデルを選択する手法を提案した。

この手法を大学囲碁部の対戦成績に適用して、6 種類のモデルの中から最適なものを選択し、その結果が部内で採用されている段位とも整合していることを示した。これにより、提案手法はハンディキャップのある対戦のモデルとして一定の有効性を持つことが示唆された。

1 章で述べたとおり、B-T モデルは Elo レーティングと関連がある。森田ら [10] では、カードゲームのように初期状態に優劣がある対戦に対するレーティング手法を提案している。この手法は、乗法的順序効果をレーティングに取り入れたものと考えられることから、本論文で提案した手法を用いて、ハンディキャップを持つ対戦に対するレーティング手法を開発することも可能であると思われる。

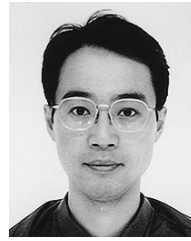
本論文の手法が一定の有効性を持つことが示された一方で、この方法が、パラメータの点推定と、それに基づくモデル選択にとどまっておらず、仮説検定などによる結果を得るには至っていない。より詳細な分析を行うためには、パラメータの区間推定や、モデルの適合度検定といった統計的手法を用いた手法の開発が求められる。また、適用例も北海道大学囲碁部の一例だけであり、より多くのデータに対して手法の有効性があるかどうかを確かめる必要がある。

謝辞 本研究は科研費 (19H04128 および 18K18008) と JST CREST JPMJCR1763 の助成を受けて実施したものです。また、論文を修正するにあたり、査読者の方々から多くの有益なご指摘をいただきました、感謝申し上げます。

参考文献

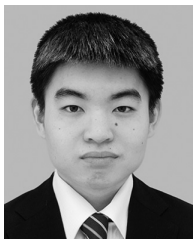
- [1] Akaike, H.: Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *2nd International Symposium on Information Theory*, Petrov, B.N. and Csaki, F. (Eds.), pp.267–281, Akademiai Kiado (1973). Reproduced in *Breakthroughs in Statistics*, Vol.1, Springer-Verlag (1992).
- [2] Araki, K., Hirose, Y. and Komaki, F.: Paired comparison models with age effects modeled as piecewise quadratic splines, *International Journal of Forecasting*, Vol.35, No.2, pp.733–740 (online), DOI: 10.1016/j.ijforecast.2018.02.006 (2019).
- [3] Beaver, R.J. and Gokhale, D.V.: A model to incorporate within-pair order effects in paired comparisons, *Communications in Statistics*, Vol.4, No.10, pp.923–939 (online), DOI: 10.1080/03610927308827302 (1975).
- [4] Bradley, R.A. and Terry, M.E.: Rank Analysis of Incomplete Block Designs: I. The Method of Paired Comparisons, *Biometrika*, Vol.39, No.3/4, p.324 (online), DOI: 10.2307/2334029 (1952).
- [5] Davidson, R.R.: On extending the Bradley-Terry model to accommodate ties in paired comparison experiments, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.65, No.329, pp.317–328 (online), DOI: 10.1080/01621459.1970.10481082 (1970).
- [6] Davidson, R.R. and Beaver, R.J.: On Extending the Bradley-Terry Model to Incorporate Within-Pair Order Effects, *Biometrics*, Vol.33, No.4, p.693 (online), DOI: 10.2307/2529467 (1977).
- [7] Francis, B., Dittrich, R. and Hatzinger, R.: Modeling heterogeneity in ranked responses by nonparametric maximum likelihood: How do Europeans get their scientific knowledge?, *Annals of Applied Statistics*, Vol.4, No.4, pp.2181–2202 (online), DOI: 10.1214/10-AOAS366 (2010).
- [8] 広津千尋: Bradley-Terry モデルの順序効果がある場合へ

- の拡張, 品質, Vol.14, No.1, pp.52–58 (1984).
- [9] Langville, A.N. and Meyer, C.D.: レイティング・ランキングの数理—No.1 は誰か?, 共立出版 (2015).
- [10] 森田茂彦, 松崎公紀: 大貧民における初期手札の不均等性を考慮したレーティングアルゴリズムの提案, 情報処理学会研究報告, Vol.2014-GI-31, No.14, pp.1–5 (2014).
- [11] Mosteller, F.: Remarks on the Method of Paired Comparisons: I. The Least Squares Solution Assuming Equal Standard Deviations and Equal Correlations, *Selected Papers of Frederick Mosteller*, Fienberg, S.E. and Hoaglin, D.C. (Eds.), pp.157–162, Springer New York (2006).
- [12] Rao, P.V. and Kupper, L.L.: Ties in Paired-Comparison Experiments: A Generalization of the Bradley-Terry Model, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.62, No.317, pp.194–204 (online), DOI: 10.1080/01621459.1967.10482901 (1967).
- [13] 坂元慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎: 情報量統計学, 共立出版 (1983).
- [14] 竹内 啓, 藤野和建: スポーツの数理科学: もっと楽しむための数字の読み方, 共立出版 (1988).
- [15] Turner, H. and Firth, D.: Bradley-Terry Models in R: The BradleyTerry2 Package, The Comprehensive R Archive Network (online), available from (<https://cran.r-project.org/web/packages/BradleyTerry2/>) (accessed 2021-03-01).
- [16] Tutz, G.: Bradley-Terry-Luce models with an ordered response, *Journal of Mathematical Psychology*, Vol.30, No.3, pp.306–316 (online), DOI: 10.1016/0022-2496(86)90034-9 (1986).



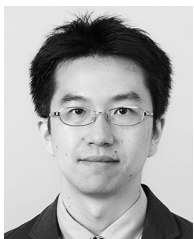
今井 英幸 (正会員)

1985年北海道大学理学部数学科卒業。1987年同大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了。博士(工学)。1989年北海道大学助手。現在、北海道大学大学院情報科学研究院教授、北海道大学国際連携研究教育局教授。日本統計学会、電子情報通信学会各会員。



新沼 広大

2019年北海道大学工学部情報エレクトロニクス学科卒業。現在、北海道大学大学院情報科学院情報科学専攻修士課程在学中。



廣瀬 善大 (正会員)

2006年東京大学工学部計数工学科卒業。2008年同大学大学院情報理工学系研究科数理情報学専攻修士課程修了。2012年同博士課程修了。博士(情報理工学)。2012年東京大学助教, 2017年北海道大学准教授, 2021年明治大学准教授。日本統計学会会員。