Taylor 級数を使った変数変換による Bessel 関数型無限振動積分の数値計算

平山 弘[1,a)]　小宮 聖司[1,b)]

概要：有限項で打ち切った Taylor 級数の四則演算および関数計算は，プログラミング言語を使って容易に行うことができる．C++言語や Fortran 等のオペラレーター・オーバーロード機能を使えば通常の計算のように容易に計算できる．このプログラムを使うと，これらのプログラミング言語で記述された関数は容易に Taylor 展開できる．

Bessel 関数型半無限区間の積分 $\int_0^\infty f(x)Z_\nu(g(x))dx$(ここで $Z_\nu(x)$ は Bessel 関数) は Taylor 展開法を使うと以前から計算法が知られている積分 $\int_0^\infty h(x)Z_\nu(x)dx$ に変換できる．このように変換すると，この型の積分を容易に計算できる．また，この種の積分法は，整数次の Bessel 関数に限られていたが，実数次の Bessel 関数でも計算できることを示す．

キーワード：数値的 Taylor 展開，無限区間振動型関数, Bessel 関数，置換積分法

Numerical calculation of infinite vibration integral with Bessel function by variable transformation using Taylor series

Hiroshi Hirayama[1,a)]　Komiya Seiji[1,b)]

Abstract: The arithmetic operations and function calculations for Taylor series truncated by finite terms, can be easily defined using programming languages. Using operator overload functions such as C ++ or Fortran makes it very easy to use. Using above program, functions written in these programming languages can easily be expanded into Taylor series.

The Bessel function type semi-infinite interval integral $\int_0^\infty f(x)Z_\nu(g(x))dx$ ($Z_\nu(x)$ is the Bessel function) can be converted to an integral $\int_0^\infty h(x)Z_\nu(x)dx$ whose calculation method has been known for a long time by using the Taylor expansion method.

Moreover, although this kind of integration method is limited to the Bessel function of integer order, it is shown that it can be calculated by the Bessel function of real number order.

Keywords: Numerical Taylor series, infinite vibration integral, Bessel function, Integration by substitution

1. はじめに

Bessel 関数を含む，次のような Hankel 変換型積分を考える．以下では第 1 種 Bessel 関数である $J_\nu(x)$ を例として記すが他の bessel 関数 ($Y_\nu(x)$ 等) でも同様である．

$$I = \int_0^\infty f(x)J_\nu(x)dx \tag{1}$$

[1] 神奈川工科大学創造工学部自動車システム開発工学科
Department of Vehicle System Engineering, Faculty of Creative Engneering, Kanagawa Institute of Technology, Shimo-Ogino 1030, Atsugi, Kanagawa, 243-0292, Japan
[a)] hirayama@kanagawa-it.ac.jp
[b)] kom@eng.kanagawa-it.ac.jp

この種の積分は，Bessel 関数を含む積分で，その数値積分は，Linz[7]，longman[8],Sidi[13],Piessens[11], 緒方等 [9], 平山 [4]，蘇峰等 [3] 等の論文で説明がある．

蘇峰等以外の論文の多くは，整数次オーダーの Bessel 関数 (ν が整数) だけを扱っている．蘇峰等では次数が 1/4 である Bessel 関数だけ扱っている．

本論文では，部分積分法 [4] が，整数次の Bessel 関数だけでなく，実数次の Bessel 関数の積分に対しても有効であることを示す．また，積分

$$I=\int_0^\infty f(x)J_\nu(g(x))dx \tag{2}$$

を $x=a$ で分割すると次のようになる．

$$I=\int_0^a f(x)J_\nu(g(x))dx+\int_a^\infty f(x)J_\nu(g(x))dx \tag{3}$$

上の式 (2) の右辺第 2 項の積分は $t=g(x)$ と置くと，$x=g^{-1}(t)$ となり，$dx=\frac{d}{dt}(g(t)^{-1})dt$ となるから

$$\int_a^\infty f(x)J_\nu(g(x))dx=\int_{g(a)}^\infty f(g^{-1}(t))\frac{d}{dt}(g(t)^{-1})J_\nu(t)dt$$

ここで，次のように $h(t)$ を定義する．

$$h(t)=f(g^{-1}(t))\frac{d}{dt}(g(t)^{-1}) \tag{4}$$

この $h(t)$ を使うと

$$\int_a^\infty f(x)J_\nu(g(x))dx=\int_{g(a)}^\infty h(t)J_\nu(t)dt \tag{5}$$

と変形できる．$f(x)$ と $g(x)$ が Taylor 展開できれば，$h(t)$ の Taylor 展開が計算出来るので，(5) の式を計算できる．この方法によって，(3) の積分を容易に計算できることを示す．

2. 部分積分による数値積分

ここでは，次の積分を考える．

$$I=\int_0^\infty f(x)J_\nu(x)dx \tag{6}$$

この積分を $x=a$ で次のように分割する．

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)J_\nu(x)dx &= \int_0^a f(x)J_\nu(x)dx\\ &+\int_a^\infty f(x)J_\nu(x)dx \end{aligned}\tag{7}$$

Bessel 関数は次の公式 [1] が成り立つことが知られている．

$$\int x^\nu Z_{\nu-1}(x)dx=x^\nu Z_\nu(x) \tag{8}$$

ここで，ν は実数で，Z は，第一種 bessel 関数 J, 第二種 bessel 関数 Y, 第三種 Besel 関数 (Hankel 関数)$H^{(1)}, H^{(2)}$ の線形結合である．ここでは，主に第一種 Bessel 関数 $J_\nu(x)$ を扱う．式 (7) の第 2 項の積分を，関係式 (8) を使って部分積分を行う．

$$\begin{aligned}&\int_a^\infty f(x)J_\nu(g(x))dx=\int_a^\infty x^{-\nu-1}f(x)x^{\nu+1}J_\nu(x)dx\\
&=\left[x^{-\nu-1}f(x)x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)\right]_a^\infty\\
&\quad-\int_a^\infty\frac{d}{dx}(x^{-\nu-1}f(x))x^{\nu+1}J_{\nu+1}(x)dx\\
&=[f(x)J_{\nu+1}(x)]_a^\infty\\
&\quad-\int_a^\infty\{\frac{-\nu-1}{x}f(x)+f'(x)\}J_{\nu+1}(x)dx\\
&=-f(a)J_{\nu+1}(a)\\
&\quad-\int_a^\infty\{\frac{-\nu-1}{x}f(x)+f'(x)\}J_{\nu+1}(x)dx\end{aligned}\tag{9}$$

ここで

$$\begin{aligned}f_0(x) &= f(x)\\ f_k(x) &= \frac{-\nu-k}{x}f_{k-1}(x)+f'_{k-1}(x)\end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f_0(x)J_\nu(x)dx &= -f_0(a)J_{\nu+1}(a)\\
&\quad-\int_a^\infty f_1(x)J_{\nu+1}(x)dx\\
&=-f_0(a)J_{\nu+1}(a)+f_1(a)J_{\nu+2}(a)\\
&\quad+\int_a^\infty f_2(x)J_{\nu+2}(x)dx\\
&=\sum_{k=0}^n(-1)^{k+1}f_k(a)J_{\nu+k+1}(a)\\
&\quad+(-1)^{n+2}\int_a^\infty f_n(x)J_{\nu+n}(x)dx\end{aligned}$$

3. Taylor 級数の計算法

ここでは，関数を Taylor 級数に展開する方法を簡単に説明する．詳しくは Rall[12] および 平山等 [5], [6] を参照せよ．

展開位置が同じ Taylor 級数間の演算は，一般性を失うことなく，原点で展開された Taylor 級数であると仮定することができる．Taylor 級数の展開位置は，平行移動により任意の位置に移動できるため，原点で展開された Taylor 級数のみを考慮すれば十分である．n 次の Taylor 級数を次のように定義する．

$$f(x) = f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+f_4x^4\cdots+f_nx^n \tag{10}$$
$$g(x) = g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+g_4x^4\cdots+g_nx^n \tag{11}$$
$$h(x) = h_0+h_1x+h_2x^2+h_3x^3+h_4x^4\cdots+h_nx^n \tag{12}$$

3.1 Taylor 級数の四則演算

n 次の Taylor 級数の四則演算プログラムは容易に作成できる．以下の公式は，原点で展開された級数だけでなく，任意の点で展開された Taylor 級数でも有効である．

(1) 加減算 $h(x)=f(x)\pm g(x)$

$h(x) = f(x) \pm g(x)$ となるので，この式に (10) の $f(x)$，(11) の $g(x)$ および (12) の $h(x)$ を代入し，同じ次数の係数を等しいとすると次の関係式が得られる．

$$h_j = f_j \pm g_j (j = 0, \cdots, n)$$

(2) 乗算 $h(x) = f(x)g(x)$

$h(x) = f(x)g(x)$ となるので，この式に (10) の $f(x)$，(11) の $g(x)$ および (12) の $h(x)$ を代入し，同じ次数の係数を等しいとすると次の関係式が得られる．

$$h_j = \sum_{k=0}^{j} f_i g_{j-i} (j = 0, \cdots, n)$$

(3) 除算 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ であるから，この式に (10) の $f(x)$，(11) の $g(x)$ および (12) の $h(x)$ を代入し，同じ次数の係数を等しいと置く．$g_0 \neq 0$ ならば，次のように $h(x)$ の係数が計算できる．

$$h_0 = \frac{f_0}{g_0}, \qquad h_j = \frac{1}{g_0}\left(f_j - \sum_{k=0}^{j-1} h_k g_{j-k}\right) \quad (j \geq 1)$$

もし $f_i = g_i = 0$ $(i = 0, \cdots, j)$ ならば，分子と分母を x^{j+1} で割り，その式を上の計算式で除算を行うことができる．

(4) 逆数 $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} = rcp(f(x))$

逆数を $h(x)$ とすると $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ である．これから，$h(x)f(x) = 1$ となる．この式に (10) と (12) を代入し展開し，同じ次数の係数を等しいと置く．$g_0 \neq 0$ ならば，逆数の係数は次の式によって計算することができる．

$$h_0 = \frac{1}{f_0}, \qquad h_n = -\frac{1}{f_0}\sum_{k=0}^{n-1} h_k f_{n-k} \qquad (k = 1, \cdots, m)$$

3.2 Taylor 級数の数学関数計算

多くの基本関数は，単純な微分方程式を満たす．この微分方程式を利用することにより，Taylor 級数の関数を容易に計算できる．

(1) 指数関数 $h(x) = e^{f(x)}$

もし $h(x) = e^{f(x)}$ ならば，次の微分方程式を満たす．

$$\frac{dh(x)}{dx} = h(x)\frac{df(x)}{dx}$$

(10) と (12) をこの微分方程式に代入し，同じ次数の係数を比較すると次の関係式が得られる．

$$h_0 = e^{f_0}, \qquad h_j = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k h_{j-k} f_k \quad (j \geq 1)$$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ の x に $f(x)$ を代入しても，計算できるが上の漸化式を計算する方法は，効率的に計算できる．定数項だけを計算することを考える．

$$h_0 = 1 + f_0 + + \frac{f_0^2}{2!} + \frac{f_0^3}{3!} + \cdots$$

f_0 が小さい数値ならば効率的に計算できるが，5 とか 10 程度以上の数値だとすると値が収束するまで計算しなければならないなど非効率的である．また，-5 とか-10 程度以下の数値だとすると桁落ちが生じ，計算効率だけでなく計算精度も悪くなる．この定数項はプログラミング言語に準備されている指数関数を使って $\exp(f_0)$ と計算すべきである．1 次の項の係数は，定数項と同じ方法でも計算できるが，指数関数は微分方程式を満たすため，係数間には漸化式が成り立つ．$h_1 = h_0 f_1$ の関係式から容易に計算できる．

n 次の項の係数も (n-1) 次以下の項の係数から，係数間に成り立つ漸化式を利用して容易に計算できる．この性質は，以下の多くの関数で成り立つ．

(2) 対数関数 $h(x) = \log f(x)$

もし $h(x) = \log f(x)$ ならば，次の微分方程式を満たす．

$$f(x)\frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

(10) と (12) をこの微分方程式に代入し，同じ次数の係数を比較すると次の関係式が得られる．この式から，次のような関係式が得られる．

$$\begin{aligned} h_0 &= \log f_0, \\ h_j &= \frac{1}{jf_0}\left(nf_j - \sum_{k=1}^{j-1} k h_k f_(j-k)\right), \quad (j = 1, \cdots, m) \end{aligned}$$

(3) べき乗関数 $h(x) = f(x)^\alpha$(α は定数)

もし $h(x) = f(x)^\alpha$(α は定数) ならば，次の微分方程式を満たす．

$$f(x)\frac{dh(x)}{dx} = \alpha\frac{df(x)}{dx}h(x)$$

(10) と (12) をこの微分方程式に代入し，同じ次数の係数を比較すると次の関係式が得られる．

$$h_0 = f_0^\alpha, \qquad h_j = \frac{1}{jf_0}\sum_{k=1}^{j}(k(\alpha+1) - j) f_k h_{j-k} \quad (j \geq 1)$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ とすると平方根を計算できる．

(4) 三角関数 $g(x) = \sin f(x), \quad h(x) = \cos f(x)$

もし $g(x) = \sin f(x), \quad h(x) = \cos f(x)$ ならば，次の連立微分方程式を満たす．

$$\begin{aligned} \frac{dg(x)}{dx} &= h(x)\frac{df(x)}{dx} \\ \frac{dh(x)}{dx} &= -g(x)\frac{df(x)}{dx} \end{aligned}$$

(10)，(11) と (12) をこの微分方程式に代入し，同じ次数の係数を比較すると次の関係式が得られる．

$$\begin{aligned} g_0 &= \sin f_0, \qquad g_j = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k h_{j-k} f_k \\ h_0 &= \cos f_0, \qquad h_j = -\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k g_{j-k} f_k \qquad (j = 1, \cdots, n) \end{aligned}$$

三角関数は，このように sin と cos を同時に計算すると，計算式が単純で見易い公式となる．sin と cos を同時に計算する関数 sin_cos(x,s,c) を準備すると便利である．tan はこのようにして得られた sin と cos の Taylor 級数をわり算することによって得る．この事情は，以下の双曲線関数 sinh と cosh の場合も同様である．

(5) 微分 $h(x) = \frac{df(x)}{dx}$

$h(x) = \frac{df(x)}{dx}$ のとき，次のような関係式が得られる．

$$h_n = 0, \quad h_j = (j+1)f_{j+1} \qquad (j = 0, \cdots, n)$$

このように，最高次数の係数 h_n は，0 とする．

(6) 積分 $h(x) = \int_0^x f(t)dt$

$h(x) = \int_0^x f(t)dt$ のとき次のような関係式が得られる．

$$h_0 = 0, \quad h_j = \frac{1}{j}f_{j-1} \qquad (j = 1, \cdots, n)$$

定数項は，積分定数なので，任意で良いが，ここで作成したプログラムでは，0 とする．

(7) 逆三角関数

逆三角関数には次の 3 関数がある．

$$h(x) = \sin^{-1} f(x) \,=\, \mathrm{asin}(f(x))$$
$$h(x) = \cos^{-1} f(x) \,=\, \mathrm{acos}(f(x))$$
$$h(x) = \tan^{-1} f(x) \,=\, \mathrm{atan}(f(x))$$

これらの関数を微分すると，次の式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} f(x) \,=\, \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} f(x) \,=\, -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$
$$\frac{d}{dx}\tan^{-1} f(x) \,=\, \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$$

定数項を考慮して，積分すると次の式が成り立つ．

$$\sin^{-1} f(x) \,=\, \sin^{-1} f_0 + \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{1-f(t)^2}}dt$$
$$\cos^{-1} f(x) \,=\, \cos^{-1} f_0 - \int_0^x \frac{f'(t)}{\sqrt{1-f(t)^2}}dt$$
$$\tan^{-1} f(x) \,=\, \tan^{-1} f_0 + \int_0^x \frac{f'(t)}{1+f(t)^2}dt$$

他の数学関数についても，同様な微分方程式が得られる場合がある．得られた微分方程式から，Taylor 級数の数学関数を計算することができる．

これらの計算式から分かるように，n 次の Taylor 級数が与えられれば，それらの級数の加減乗算，指数対数関数，三角関数等が n 次まで正確に計算できる．

4. 逆関数の Taylor 級数展開

ここでは，積分の変数変換に必要な逆関数の Taylor 級数を計算法について簡単に述べる．関数の逆関数の Taylor 級数を計算する方法については，古くから Lagrange Inversion Formula[2] などいろいろな方法が知られている．ここでは常微分方程式の解として計算する．$y = f(x)$ の逆関数は，x と y を入れ替えた関数であるから，$x = f(y)$ または $y = f^{-1}(x)$ と書ける．$x = f(y)$ の両辺を x で微分すると，$1 = f'(y)\frac{dy}{dx}$ であるから，次の逆関数の微分方程式を得る．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} \tag{13}$$

この微分方程式を Picard の逐次近似法 [4] によって，関数 $f(x)$ の逆関数の Taylor 級数を計算することができる．Picard の逐次近似法を使って解を Taylor 級数を計算する手順を説明する．次の形をした逆関数が満たす微分方程式を考える．これ以降 $p(x) = f'(x)$，$q(x) = \frac{1}{p(x)}$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p(y)} = q(y) \quad \text{初期条件} \quad y(x_0) = y_0 \tag{14}$$

このような微分方程式は，次の Picard の逐次近似法によって解くことができる．

$$y_0(x) = y_0 \qquad y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \frac{1}{p(y_k(t))}dt \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{15}$$

4.1 Taylor 級数の逆関数の計算例

例として関数 $f(x) = e^{-x} - 2x - 3$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)$ を求める．(13) から，$f'(x) = -e^{-x} - 2$ であるから逆関数は，次の微分方程式を満たす．

$$\frac{dy}{dx} = q(y) = \frac{1}{p(y)} = -\frac{1}{e^{-y}+2} \qquad \text{初期条件}: y(-2) = 0 \tag{16}$$

初期条件は，$x = f(y)$ に $y = 0$ を代入して x を決める．$y(-2) = 0$ すなわち $x_0 = -2$, $y_0 = 0$ となる．

最初に (15) で $k = 0$ として，0 次の近似計算を行う．初期条件 $y_0 = 0$ から，$q(y) = -\frac{1}{3}$ となる．この結果を (15) に代入して積分すると，1 次の近似解 $y_1(x) = -\frac{1}{3}(x+2)$ が得られる．

次に (15) で $k = 1$ として，1 次の近似計算を行う．1 次の近似解 $y_1(x)$ を $q(y)$ に代入し，$(x+2)$ の 1 次まで計算する．定数項は 0，1 次の係数は $-\frac{1}{3}$ であるから，$p(y) = -\exp(y) - 2 = -3 - \frac{1}{3}(x+2)$ となる．その逆数を逆数関数 rcp(x) または割り算を使って計算する．$q(y) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{27}(x+2)$ となる．この結果を (15) に代入して積分すると，2 次の近似解 $y_2(x) = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{54}(x+2)^2$ が得られる．

$k = 2$ として，2 次の近似解を求める．この 2 次の近似解 $y_2(x)$ を $p(y)$ に代入し，(15) の式を使って 2 次まで計算すると，$p(y) = -\exp(y) - 2 = -3 - \frac{1}{3}(x+2) - \frac{1}{27}(x+2)^2$ となる．この逆数を計算すると，$q(y) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{27}(x+2)$ となる．2 次

の項の係数がゼロであるため，1 次の計算結果と同じになる．したがって，3 次の近似解 $y_3(x) = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{54}(x+2)^2$ が得られる．

同様に $k = 4$ として，計算を繰り返すと $y_4(x) = -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{54}(x+2)^2 - \frac{1}{8748}(x+2)^4$ この計算を 6 次まで計算すると次のような式が得られる．

$$\begin{aligned} y_6(x) &= -\frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{54}(x+2)^2 - \frac{1}{8748}(x+2)^4 \\ &- \frac{1}{196830}(x+2)^5 + \frac{1}{885735}(x+2)^6 \end{aligned}$$

この例題では，分数を使って計算している．この例では，指数関数は $x = 0$ の場合のみ計算しているので，分数で正確に計算出来るが，一般には分数では計算出来ない．そのため通常は浮動小数点数で計算する．この微分方程式の係数を倍精度浮動小数点数にして，Taylor 級数解を 20 次まで計算した．その結果を 6 次まで表示すると次のようになる．

$$\begin{aligned} y &= -0.333333(x+2) + 0.0185185(x+2)^2 \\ &- 7.61389 \times 10^{-20}(x+2)^3 - 0.000114312(x+2)^4 \\ &+ 5.08053 \times 10^{-6}(x+2)^5 + 1.12901 \times 10^{-6}(x+2)^6 \end{aligned}$$

3 次の項がゼロではなく絶対値が小さい数値になっている．倍精度浮動小数点数の丸め誤差の影響によるものである．分数を使った展開式と比較すれば，この 3 次の係数はゼロであることがわかる．得られた倍精度の Taylor 級数は，分数計算の Taylor 級数と丸め誤差の影響を考慮すると一致することがわかる．

得られた Taylor 展開式が関数 $f(x)$ の逆関数の近似式であることを確かめるために，$f(x) = 0$ の解 (厳密解:$-0.59420\ 49585\ 08771\ 74868\cdots$) を計算する．20 次の逆関数の近似 Taylor 級数に $x = 0$ を代入すると，$-0.59420\ 49585\ 08517$ となり，約 12 桁の精度の $f(x) = 0$ の解が得られる．この結果から得られた Taylor 級数は $f(x)$ の逆関数の近似 Taylor 展開式であると思われる．

得られた逆関数の n 次の近似 Taylor 級数を関数 $f(x)$ に代入すると，n 次まで正確に計算出来るので，計算結果を n 次まで採ると x に一致する．上記の 6 次までの Taylor 級数は，$x = -2$ で展開されているので，計算結果も $x = -2$ で展開された結果になる．

5. 数値例

5.1 厳密解が知られている例

ここでは，厳密解がわかっている次の例 [3] をあげる．

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} J_{3/4}(x)dx = I_{3/8}(1/2)K_{3/8}(1/2)$$

この積分を $a = 110$ で次のように分割する．

$$I_1 = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} J_{3/4}(x)dx + \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} J_{3/4}(x)dx$$

上の式の最初の積分は，要求精度 10^{-10} で二重指数型数値積分 [10] で計算した．被積分関数の計算回数 271，計算結果は 0.70513093922263326 であった．第 2 の積分は，まず $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の部分を $x = a$ で Taylor 展開をする．計算は 20 次まで行った．3 次まで表示すると次のようになる．

$$\begin{aligned} f_0\ (x) &= 0.00909053 - 8.26344 \times 10^{-5}(x-110) \\ &+ 7.51129 \times 10^{-7}(x-110)^2 - 6.82731 \times 10^{-9}(x-110)^3 \end{aligned}$$

次に次の式を計算する．

$$f_k(x) = \frac{-\nu - k}{x} f_{k-1}(x) + f'_{k-1}(x)$$

$k = 1$ とすると，$f_1(x)$ が計算できる．3 次まで表示すると次のようになる．

$$\begin{aligned} f_1\ (x) &= -0.000227257 + 4.13164 \times 10 - -6(x-110) \\ &- 5.63352 \times 10^{-8}(x-110)^2 + 6.8277 \times 10^{-10}(x-110)^3 \end{aligned}$$

この様に $f_2(x), f_3(x), \cdots$ と計算する．これを使うと，第 2 の積分は次のように部分積分法を使って次のように展開できる．

$$\begin{aligned} \int_a^\infty\ f_0(x)J_\nu(x)dx &= -f_0(a)J_{\nu+1}(a) \\ &\quad - \int_a^\infty f_1(x)J_{\nu+1}(x)dx \\ &= -f_0(a)J_{\nu+1}(a) + f_1(a)J_{\nu+2}(a) \\ &\quad + \int_a^\infty f_2(x)J_{\nu+2}(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} f_k(a)J_{\nu+k+1}(a) \\ &\quad +(-1)^{n+2}\int_a^\infty f_n(x)J_{\nu+n}(x)dx \end{aligned}$$

この式の最後の積分が非常に小さくなるので，級数部分を計算すれば，第 2 の積分の積分の値が求まる．この方法によって，最初の 8 項を計算すると積分値 $s = 0.70448399205810397$ が得られた．これを厳密な値 $0.70448399205815715299952932561 86\cdots$ と比較すると差が 5.3×10^{-13} となることがわかる．この厳密解の数値は web サイト (wolfram alpha) を使って計算した．この例では，厳密解があるから容易に計算結果の正しさを確認できるが，一般には厳密解はない．この場合 $a = 100$ などと異なる a に対して計算結果を求め，その計算値が正しいかどうかを判定する．この例だど $a = 100$ とすると 0.70448399205895806 が得られる．この積分値は $a = 110$ の時の積分値と 11 桁一致している．この結果は 11 桁一致正しいものと推定される．

級数の計算で $f_k(a)$ のような値が必要であるが，この級数は $(x - a)$ の級数なので，最初の定数項以外はゼロとなるので，$f_k(a)$ は級数の定数項になる．

5.2 厳密解が知られてない例

ここでは，杉原等 [14] で扱われている，次の問題を扱う．

$$I=\int_0^\infty \sqrt{t^2+9t+20}J_0\left(\frac{t^4+2t^2+5}{t^2+4}\right)dt$$

この積分を $t=a$ で次のように分割する．

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\infty \sqrt{t^2+9t+20}J_0\left(\frac{t^4+2t^2+5}{t^2+4}\right)dt\\ &= \int_0^a \sqrt{t^2+9t+20}J_0\left(\frac{t^4+2t^2+5}{t^2+4}\right)dt\\ &\quad +\int_a^a \sqrt{t^2+9t+20}J_0\left(\frac{t^4+2t^2+5}{t^2+4}\right)dt\end{aligned}$$

区間 $[0,a]$ の積分は通常の数値積分で行う．要求精度 10^{-10} で二重指数型数値積分で計算した．被積分関数の計算回数 293，計算結果は 2.68740946248538304 であった．

次に，区間 $[a,\infty]$ の積分を $g(t)=\frac{t^4+2t^2+5}{t^2+4}$，$f(t)=\sqrt{t^2+9t+20}$ と置き，さらに $s=g(t)$ と変数変換を行う．

$$\int_a^\infty f(t)J_0(g(t))dt=\int_{g(a)}^\infty f(g^{-1}(s))\frac{d}{ds}(g^{-1}(s))J_0(s)ds$$

$a=8$ の時 $s=g(t)$ を $t=a$ で Taylor 展開する．4 次まで表示すると次のようになる．

$$\begin{aligned}g(x) &= 62.1912+15.955(x-8)+1.00777(x-8)^2\\ &\quad -\ 0.00116737(x-8)^3+0.00016037(x-8)^4\end{aligned}$$

この逆関数を計算する．逆関数の展開位置は $p=g(8)=62.1912$ である．

$$\begin{aligned}g^{-1}(x) &= 8+0.0626762(x-p)-0.000248125(x-p)^2\\ &\quad +1.98259\times10^{-6}(x-p)^3-1.99553^{-8}(x-p)^4\end{aligned}$$

これを使って，10 項計算すると 2.62716040110842419 となる．杉原等の結果は 2.627160401844 となり，誤差は 7.5×10^{-11} で 11 桁一致した．この様に bessel 関数の引数部分が関数になっていても，容易に計算できることがわかる．

6. 終わりに

Taylor 展開を数値的に行う方法を簡単に説明した．

数値的 Taylor 展開法と，Bessel 関数の漸化式を利用すると Bessel 関数含む積分 (Hankel 積分) を級数展開できる．これを利用すると，整数次だけでなく実数次の Bessel 関数を含む積分を計算することができることを示した．

数値的 Taylor 展開を利用すれば，解析的には非常に難しいと思われる積分の被積分関数の変数変換ができる．これによってこれまで計算が困難な積分を簡単な形の積分にできる場合がある．この変換を利用すると容易に積分計算が行うことができることを示した．

これら計算には，Bessel 関数の零点や加速法などの情報は不要で比較的簡単な計算法と思われる．

参考文献

[1] Abramowitz M. and Stegun I.A., Handbook of Mathmatical Functions, Dover, New York, (1970)
[2] Bruijn, N.D., Asymptotic Methods in Analysis, Dover, New York,1981
[3] 蘇峰, 非整数次 (1/4) ベッセル関数を含む半無限区間積分の自動数値積分, 情報処理学会論文誌,Vol.43, No.5, pp.1372–1381(2002)
[4] 平山弘, 部分積分法による半無限区間振動型積分の数値計算法, 日本応用数理学会論文誌,Vol. 7, No.2, pp.131–138(1997)
[5] 平山弘, 小宮聖司, 佐藤創太郎, Taylor 級数法による常微分方程式の解法, 日本応用数理学会論文誌, 12(2002), 1–8.
[6] 平山弘, 舘野裕文, 浅野直之, 川口隆史, Taylor 級数演算ライブラリの使用法, 東北大学情報シナジーセンター大規模科学計算システム広報 SENAC, 40(2007) 29–68.
[7] Linz, P, A method for computing Bessel function Integrarals, Math. Comp., Vol. 26, pp. 509–513(1972)
[8] Longman, I. M. Tables for rapid and accurate numerical evaluation of certain infinite integrals involving Bessel Function, MTAC, Vol. 11, pp.166–180(1957)
[9] 緒方秀教, 杉原正顕, Bessel 関数の零点を標本点に持つ補間および数値積分公式，日本応用数理学会論文誌,Vol. 6, No.1, pp.39–66(1996)
[10] T. Ooura, Ooura's Mathematical Software Packages, http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ ooura/
[11] Piessens, R., Computing integral transforms and solving integral equations using Chebyshev polynomial approximations, J. Comp. Appl. Math., Vol.121, pp.113–124(2000)
[12] Rall,L.B., Automatic Differentiation-Technique and Applications, Lecture Notes in Computer Science, Vol.120, Springer-Verlag, New York(1981)
[13] Sidi, A., The numerical evaluation of very oscillatory infinite integrals by extrapolation, Math. Comp., Vol.38, pp.517–529(1982)
[14] 杉原, 室田, 数値計算法の数理, 岩波書店, 2007.