Vol.2021-ICS-204 No.8
2021/9/15

# グリッド上の公害財配置問題におけるメカニズムデザイン

小副川 貢司[1,a)]　東藤 大樹[1]　横尾 真[1]

**概要**：本論文では，グリッド上に 1 つの公害財を配置する問題を扱う．エージェントは自身の所在地からより遠くに公害財が配置されることを望む．公害財配置におけるメカニズムは，エージェントが申告する所在地の組をもとに，公害財の配置位置を決定する．グリッド上の公害財配置問題を扱う既存研究では，グリッドのサイズを $m \times 2$ に制限した場合における，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズムの存在性の検証がなされている．そこで，本論文では，グリッドのサイズが $3 \times 3$ の場合における，パレート効率性と架空名義操作不可能性を両立する公害財配置メカニズムの存在性を検証する．具体的には，グリッドのサイズが $3 \times 3$ の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズムは存在しないことを示す．

## 1. 序論

本論文で扱う施設配置問題は，メカニズムデザインの一分野として盛んに研究がなされている．メカニズムデザインでは，効率性や不正行為に対する頑健性などの性質を持つメカニズムを設計することが望まれる．本論文では，効率性を表す指標としてパレート効率性を導入し，不正行為に対する頑健性として架空名義操作不可能性を考察する．

グリッド構造において公益財を扱う施設配置問題では，グリッドのサイズを $m \times 2$ に制限することで，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズムが存在し [1]，グリッドのサイズを $m \times 2$ に制限しない場合には，メカニズムは存在しないことが知られている [2]．また，公害財配置問題を扱う既存研究においては，グリッドのサイズを $m \times 2$ に制限した場合に，このような望ましい性質を満足するメカニズムの存在性に関する考察が行われている [3]．

そこで，本論文では，グリッドのサイズが $3 \times 3$ の場合の公害財配置問題における，パレート効率性と架空名義操作不可能性を両立するメカニズムの存在性を検証する．具体的には，グリッドのサイズが $3 \times 3$ の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズムは存在しないことを示す．

## 2. モデル

本章では，本論文で扱う施設配置問題のモデルを示す．

1　九州大学 大学院システム情報科学府
819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地，(092)802-3576
a)　osoegawa@agent.inf.kyushu-u.ac.jp

本論文では，離散空間に 1 つの施設を配置する問題を扱う．施設を配置可能な点の集合を頂点，頂点同士の接続の集合を枝とする無向重み無しグラフ $G := (V, E)$ を考える．なお，$V$ は頂点の集合，$E$ は枝の集合を表す．また，$m \times l$ のグリッドを $G_{m \times l} := [1, ..., k_x, ..., m] \times [1, ..., k_y, ..., l]$ と表す．また，エージェントの名義の集合を $M$，参加エージェントの集合を $N \subseteq M$ とする．参加エージェント $i \in N$ の所在地を $v_i \in V$ とし，参加エージェントの所在地の組を $v_N := (v_i)_{i \in N}$ とする．また，$v_{N-i} := (v_{i'})_{i' \neq i}$ をあるエージェント $i$ を除いた残りのエージェントの所在地の組とする．$I(v_N)$ を少なくとも 1 人のエージェントが位置する頂点の集合とする．各エージェントは自身の所在地と施設の配置位置に対してコスト関数 $c : V \times V \to \mathbb{Z}$ を持ち，ある施設配置位置 $\alpha \in V$ に対して，エージェント $i$ が持つコストを $c(v_i, \alpha)$ と記述する．本論文では，マンハッタン距離に関するコストを考える．本論文では，公害財の配置を考えるため，エージェントの選好は単溝的選好であると仮定する．単溝的選好の定義を以下に示す．

**定義 1** (単溝的選好)**.** $v_i = (x_i, y_i) \in V$ を所在地とするエージェント $i$ の選好が単溝的選好であるとは，施設の配置位置 $\alpha = (\alpha_x, \alpha_y) \in V$ に関して，$c(v_i, \alpha) = -|x_i - \alpha_x| - |y_i - \alpha_y|$ となるコスト $c$ を持つことである．

本論文では，単溝的選好を持つエージェントが申告する所在地の組 $v_N$ を入力として，公害財の配置位置 $\alpha \in V$ を 1 つ出力する公害財配置メカニズム $f$ を考える．メカニズム $f : \bigcup_{N \subseteq M} v_N \to V$ は，各エージェントの集合 $N$ に対する関数 $f_N$ によって $f = (f_N)_{N \subseteq M}$ と表現され，各 $f_N$ は $V^{|N|}$ から $V$ への写像として定義される．

本論文では，メカニズムの効率性を表す指標としてパレート効率性を導入する．

**定義 2** (パレート効率性)**.** $a \in V$ がパレート効率的な位置であるとは，以下の 2 つの条件を同時に満たす位置 $b \neq a$ が存在しないことを言う．また，任意の入力において，メカニズムがパレート効率的な位置を出力するとき，メカニズムはパレート効率性を満たす．

- $\forall i \in N$ に関して，$c(v_i, a) \geq c(v_i, b)$ を満たす．
- $\exists j \in N$ に関して，$c(v_j, a) > c(v_j, b)$ を満たす．

エージェント $i$ は名義の集合 $\phi_i \subseteq M \setminus N$ を用いて，複数の名義を申告することが可能である．また，エージェント $i$ が $\phi_i$ を用いて申告を行う所在地の組を $v_{\phi_i} \in V^{|\phi_i|}$ とする．以上の定義を以て，架空名義操作不可能性を定義する．

**定義 3** (架空名義操作不可能性)**.** 施設配置メカニズムが架空名義操作不可能性を満たすとは，以下に示す条件を満たすことを言う．$\forall N, \forall v_N, \forall i \in N, \forall v_i, \forall v'_i \in V, \forall \phi_i \subseteq M \setminus N, \forall v_{\phi_i} \in V^{|\phi_i|}$ に関して，

$$c(v_i, f(v_N)) \leq c(v_i, f(v_{N-i}, v'_i, v_{\phi_i})).$$

パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムは，各頂点にエージェントが存在するか否かを考慮するメカニズムに限定できる．まず，準備として，重複投票の無視を定義する．

**定義 4** (重複投票の無視)**.** 施設配置メカニズム $f$ が重複投票を無視するとは，$I(v_N) = I(v'_N)$ となる任意の組 $v_N, v'_N$ に関して，$f(v_N) = f(v'_N)$ となることを言う．

続いて，定理 1 を示す．

**定理 1** ([4])**.** パレート効率性および架空名義操作不可能性を同時に満たすが，重複投票を無視しないメカニズム $f$ が存在すると仮定する．このとき，エージェントが単峰的選好であるか単溝的選好であるかに関わらず，架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たす重複投票を無視するメカニズム $f'$ も存在し，$\forall v_N, \forall i \in N$ に対して，以下の式が成り立つ．

$$c(v_i, f(v_N)) = c(v_i, f'(v_N))$$

したがって，以下では重複投票を無視するパレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満たす施設配置メカニズムに焦点を当てる．

## 3. 不可能性定理

本章では，$3 \times 3$ のサイズのグリッドにおいて，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズムは存在しないことを示す．

**定理 2.** $G_{3\times 3}$ において，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムは存在しない．

**証明．** グラフの対称性より，以下の 3 つを示すことで不可能性を示す．

(1) $f(I(v_N) = V) = (1,1)$ となるメカニズムは存在しない．

(2) $f(I(v_N) = V) = (2,1)$ となるメカニズムは存在しない．

(3) $f(I(v_N) = V) = (2,2)$ となるメカニズムは存在しない．

(1) を示す．$f(I(v_N) = V) = (1,1)$ と仮定する．$I(v'_N) = \{(1,1),(1,3),(2,3)\}$ である任意の $v'_N$ を考える．このとき，パレート効率的かつすべてのエージェントが架空名義操作を行うインセンティブを持たない頂点は一意に $f(v'_N) = (3,1)$ である．$I(v^*_N) = \{(1,1),(1,3)\}$ である任意の $v^*_N$ を考える．このとき，$f(v^*_N) = (3,1)$ となる必要がある．一方，$I(v''_N) = \{(1,1),(1,3),(3,1)\}$ である任意の $v''_N$ を考える．このとき，パレート効率的かつすべてのエージェントが架空名義操作を行うインセンティブを持たない頂点は一意に $f(v''_N) = (3,3)$ である．同様に，$v^*_N$ を考えると，$f(v^*_N) = (3,3)$ となる必要があるが，これは $f(v^*_N) = (3,1)$ に矛盾する．したがって，$f(I(v_N = V)) = (1,1)$ となるメカニズムは存在しない．

(2),(3) の証明は紙幅の都合上省略するが，同様の手法を用いることで証明可能である．

□

## 4. 結論

本論文では，公害財配置問題において，グリッドのサイズが $3 \times 3$ の場合にパレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムは存在しないことを示した．今後の課題としては，任意のサイズのグリッドにおけるメカニズムの存在性を検証することが挙げられる．

**謝辞** 本研究は，日本学術振興会 科学研究費補助金 JP20H00609 および JP20H00587 の助成を受けたものです．ここに深く感謝いたします．

### 参考文献

[1] Nehama, I., Todo, T., and Yokoo, M.: Manipulation-resistant facility location mechanisms for ZV-line graphs, in *Proceedings of the 18th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS'19)*, pp. 1452–1460, 2019

[2] Todo, T., Okada, N., and Yokoo, M.: False-Name-Proof Facility Location on Discrete Structures, in *Proceedings of the 24th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'20)*, pp. 227–234, 2020

[3] 小副川 貢司, 東藤 大樹, 横尾 真：グリッド上の公害財配置のためのメカニズムデザイン, *The 35th Annual Conference of the Japanese Society for Artificial Intelligence (JSAI'21)*, 2021

[4] Okada, N., Todo, T., and Yokoo, M.: SAT-Based Automated Mechanism Design for False-Name-Proof Facility Location, in *Proceedings of the 22nd International Conference on Principles and Practice of MultiAgent Systems (PRIMA'19)*, pp. 321–337, 2019