

# Non-stoquastic 演算子による量子アニーリング —性能向上と応用拡大—

関 優也<sup>1,a)</sup>

**概要:** 本稿は、既存の量子アニーリングの性能向上のための理論研究と量子アニーリングの応用範囲拡大のための手法について述べる。量子アニーリングは組合せ最適化問題のためのヒューリスティクスとして開発された。量子アニーリングは理論のみならず実際に動作するマシンが D-Wave 社により利用可能なサービスとして提供され、発展を続けている。量子アニーリングの性能改善と応用範囲拡大の両方に関わる概念が non-stoquastic 演算子である。はじめに既存の量子アニーリングについて説明をした後、non-stoquastic 演算子を利用した量子アニーリングの性能と比較する。また、組合せ最適化だけでなくより広範囲な問題に適用可能になることを紹介する。

**キーワード:** 量子アニーリング, 量子相転移, 組合せ最適化問題, 量子シミュレーション, イジングマシン

## Quantum Annealing with Non-stoquastic Operators —improving performance and expanding application—

YUYA SEKI<sup>1,a)</sup>

**Abstract:** This document describes a theoretical study for improving the performance of conventional quantum annealing (QA) and a method to expand the range of the application of QA. Quantum annealing was developed as a heuristics for combinatorial optimization problems. In addition to theoretical studies, QA was realized by D-Wave Systems, Inc., and devices based on QA are available through their service. Non-stoquastic operators play an important role in both the performance and the application of QA. We first explain the conventional QA, then compare the performances of the conventional QA and QA with non-stoquastic operators. We also introduce new applications of QA that are developed thanks to the operators.

**Keywords:** Quantum annealing, Quantum phase transition, Combinatorial optimization problem, Quantum simulation, Ising machine

### 1. はじめに

物理現象から着想を得た次世代アクセラレータの研究が進められている。次世代アクセラレータとは、特定の計算処理に対し従来の計算手法よりも高速化・高度化された処理を実現するための技術を指し、誤り耐性量子コンピュータ [1] や Noisy Intermediate-Scale Quantum (NISQ) デバイス [2], 量子アニーリングマシン [3, 4], イジングマシ

ン [5–10] 等が該当する。この中で、量子アニーリングマシンは量子アニーリングと呼ばれる手法に基づいて動作するデバイスである。初期の量子アニーリングの概念は横磁場イジングモデルと呼ばれる物理モデルをもとに考案された。その後 D-Wave 社が横磁場イジングモデルに基づいたデバイスを超伝導技術を利用して開発し、実機上で量子アニーリングを実行できるようにした。

横磁場イジングモデルに基づいた次世代アクセラレータの情報科学への応用の一つが組合せ最適化問題向けのデバイス開発である。組合せ最適化問題とは膨大な選択肢の中

<sup>1</sup> 慶應義塾大学  
Keio University

<sup>a)</sup> yuya.seki@keio.jp

から与えられた制約を満たす最良の選択肢を選び出す問題である。組合せ最適化問題は実社会の至る所に存在しており、例えば、交通における経路の最適化や製造業の工程管理におけるジョブスケジューリング最適化、金融のポートフォリオ最適化など幅広い応用範囲を持つ。良さの指標はコスト関数により表され、もっともコストの低い解は最適解と呼ばれる。つまり、組合せ最適化問題の目的は最適解ないし最適解に近い準最適解の探索である。これらの解を物理現象を利用して得る方法の一つが量子アニーリングである。量子アニーリングでは、組合せ最適化問題のコスト関数をイジングモデルのエネルギーと見なすことで低いコストを持つ解を探索する。イジングモデルの最低エネルギー状態は基底状態と呼ばれ、この状態の探索が組合せ最適化問題における量子アニーリングの目的となる。

量子アニーリングの性能を物理的な観点から理解する試みが本稿で紹介する研究内容の一つである。量子アニーリングは物理モデルを元に行っているため物理学の解析手法を適用することが可能である。解析手法の中でも特に、相転移現象の解析が量子アニーリングの性能を理解する助けになることが明らかとなった [11–13]。相転移とは物質の形態を意味する相が変化する現象のことで、身近な例では、水の温度をあげた時に水が固体から液体、そして気体へと変化する現象が挙げられる。横磁場イジングモデルにおいても特徴的なふたつの相が存在し、これらの間の相転移が起こりうる。そして、この相転移が量子アニーリングで最適解を探索するために必要な時間の増大と関連する結果が明らかとなった。本稿では、この相転移現象を“緩和”させて量子アニーリングの性能を改善する方法を示す。そのためには横磁場イジングモデルに修正を加えた量子系のモデルを考える必要があり、そこに non-stoquastic 演算子が関与する。

元々、横磁場イジングモデルに基づいて量子アニーリングが考案されたが、上述した量子系のモデルに基づいた量子アニーリングでは組合せ最適化問題以外の応用も考えられる。横磁場イジングモデルに基づく量子アニーリングがイジングモデルの基底状態を準備できるのと同様に、新たな量子系のモデルに基づく量子アニーリングはその量子系の基底状態を準備できる。この性質を利用した応用の一つが量子化学計算である。量子化学計算の課題の一つに分子の基底状態の探索があり、このために量子アニーリングを利用できる。さらに、量子化学計算では基底状態だけではなく、励起状態、つまりエネルギーの高い状態の解析が求められる計算もある。実は、この様な解析にも量子アニーリングを適用できる。ここで、組合せ最適化問題のエネルギーの高い状態である準最適解の探索と同じ手法を量子化学計算の励起状態探索にそのまま適用できないことを注意しておく。組合せ最適化問題の場合、最適解探索を行った結果準最適解が副次的に得られるのに対し、量子化学計算

の励起状態探索はエネルギーの高い状態を狙って探索しなければならない。よって、従来の量子アニーリングに工夫を加える必要がある。本稿で紹介するもう一つの研究成果がこの量子アニーリングによる量子化学計算における励起状態探索である。

## 2. 組合せ最適化問題のための量子アニーリング

はじめに、組合せ最適化問題をイジングモデルで表現し、量子アニーリングによる基底状態探索の原理を説明する。

組合せ最適化問題のコスト関数がバイナリ変数  $b_1, \dots, b_N$  の多項式関数として与えられた状況を考える\*1。イジングモデルにおけるスピン変数  $\sigma^z$  は  $\pm 1$  を取り、バイナリ変数との間に  $\sigma_i^z = 2b_i - 1$  の対応があるとする\*2。この時、組合せ最適化問題のコスト関数の変数を上述の対応関係を利用してスピン変数で書き直せば、イジングモデルのエネルギー関数（ハミルトニアン）を得る。イジングモデルの最低エネルギーを与えるスピン変数の値が求まれば、上述の対応を利用して元の組合せ最適化問題の解が得られる。典型的なイジングモデルのハミルトニアンは次の様な形となる：

$$H_P = - \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z. \quad (1)$$

ここで、相互作用係数  $J_{ij}$  と縦磁場  $h_i$  は実数であり、もとの組合せ最適化問題によって定まる。

量子アニーリングは物理現象である量子的時間発展を利用してイジングモデルの基底状態を探索する。その際に、イジングモデルのハミルトニアン  $H_P$  と横磁場と呼ばれるハミルトニアン  $-\sum_{i=1}^N \sigma_i^x$  から構成される時間依存ハミルトニアンを考える：

$$H(t) = \frac{t}{T} H_P - \left(1 - \frac{t}{T}\right) \sum_{i=1}^N \sigma_i^x. \quad (2)$$

ここで、初期時刻を  $t = 0$  とし、終了時刻を  $t = T$  とした。横磁場は  $H_P$  と非可換であり、その基底状態では全ての量子スピンの状態が  $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  の状態にある。この基底状態を初期状態  $|\Psi_{in}\rangle$  とし、状態の時間発展を考える。横磁場演算子とイジングモデルのハミルトニアンとの非可換性由来して状態は時間発展する。時間発展をシミュレーションする場合は Schrödinger 方程式を解けばよく、実機の場合は自然に状態が変化する。量子断熱計算を用いると、 $T$  が十分大きければ終状態  $|\Psi_{out}\rangle$  は  $H_P$  の基底状態となり目的の状態が得られる。

これを一般化するとハミルトニアンの構築方法は次の様になる。まず、目的の状態  $|\Psi_{out}\rangle$  を基底状態を持つ問題ハ

\*1 コスト関数をどの様に構築するかは本稿では割愛する。

\*2 本文中の対応関係とは符号が反転した  $\sigma_i^z = 1 - 2b_i$  が用いられる場合もある。

ミルトニアン  $H_P$  を構築する. 次に,  $H_P$  とは非可換な駆動ハミルトニアン  $H_D$  を用意する. 駆動ハミルトニアンは準備の容易な基底状態を持つ必要がある. 全体のハミルトニアンは時間依存変数  $s \in [0, 1]$  を持ち,  $H_D$  から  $H_P$  へと徐々に変化するように定義する:

$$H(s) = sH_P + (1-s)H_D. \quad (3)$$

量子アニーリングによる基底状態探索を保証する手法が量子断熱計算である [14]. 量子断熱計算では, 量子断熱時間発展を条件として課す. 式 (3) のハミルトニアンに従った時間発展を考えた時, 量子断熱時間発展を仮定しているので, エネルギー交差がない限り状態は各時刻の基底状態を辿る. よって, 最終的には  $H_P$  の基底状態, つまり目的の状態が得られる.

必要な計算時間  $T$  は断熱定理を用いて見積もられる. 各時刻の全体ハミルトニアンの基底エネルギーを  $E_0(t)$ , 第一励起エネルギーを  $E_1(t)$ , エネルギーギャップを  $\Delta_{\min} = \min_{t \in [0, T]} [E_1(t) - E_0(t)]$  とした時,  $T = \Delta_{\min}^{-2}$  程度の計算時間をかければ十分高い確率で目的の状態が得られる. つまり,  $\Delta_{\min}$  が  $N$  の多項式で下からおさえられるならば, 必要な計算時間は  $\text{Poly}(N)$  程度なので, 量子断熱計算は効率よく解を求められる. それに対し,  $\Delta_{\min}$  が  $N$  の多項式で下からおさえられないときは量子断熱計算の効率が悪い. ただし, エネルギーギャップを利用した量子アニーリングの性能評価には困難な点がある. エネルギーギャップの計算自体に膨大な計算を必要とするため, 計算時間の評価も一般には難しい.

### 3. 量子断熱計算の万能性と non-stoquastic 演算子

量子断熱計算の計算能力を万能性が保証されている量子回路モデルを元に評価する研究が進められ, その過程で導入された概念が non-stoquastic 演算子である. 量子断熱計算は量子回路モデルとは独立して提案された手法であるが, 実はこれらの間には関連があることがわかった [14, 15]. 特に, 計算複雑性を維持しながら量子回路モデルをシミュレーションする量子断熱計算を構築する方法が考案された. この変換では, 量子回路のゲート列が与えられた時, それぞれのゲート作用後の状態を重ね合わせた状態が基底状態になるように  $H_P$  を構築する. このとき, ゲートのステップ数をクロックレジスタと呼ばれるアンシラ量子ビットを用いて表現する. 駆動ハミルトニアンは, 正常な入力  $|\Psi_{\text{in}}\rangle$  と正常なクロックレジスタの状態が基底状態になるように構築する.

量子断熱計算で万能量子計算を行うために必要な演算子が non-stoquastic 演算子である. 上述の変換後の量子断熱計算の全体ハミルトニアンは Pauli 演算子  $\{\sigma^z, \sigma^x\}$  の高々 5 次の項のみで構成される. 一般に高々  $k$  個の量子スピ

ンと同時に作用する項を含むハミルトニアンを  $k$ -local ハミルトニアンと呼ぶ. つまり,  $\{\sigma^z, \sigma^x\}$  から成る 5-local ハミルトニアン内の係数が調節可能であれば, 任意の量子計算を量子断熱計算を介して実行できることになる. 実際のところ 5-local ハミルトニアンの実機での実装は難しい. そこで, 単純な相互作用のみからなるハミルトニアンで元のハミルトニアンを近似する手法開発が進められた. その結果, 摂動論を利用して近似ハミルトニアンを導出する方法が提案された. その提案によると,  $\{\sigma^z, \sigma^x\}$  からなる 2-local ハミルトニアンを用意できれば量子断熱計算で万能計算が可能であると判明した [16]. ハミルトニアンは横磁場イジングモデルにはない演算子を含んでおり, これが non-stoquastic 演算子となる. non-stoquastic 演算子を含むハミルトニアンは従来の計算機によるシミュレーションが困難であると考えられており, 量子アニーリングマシンに従来の計算機に対する優位性を持たせられることが期待されている.

non-stoquastic 演算子は万能量子計算の実現のみならず, 量子アニーリングの計算時間の短縮やその応用範囲の拡大というメリットをもたらしてくれる. 本稿ではこれらのメリットについて後述する.

### 4. 量子アニーリングと相転移現象

量子アニーリングの性能と相転移現象との関連について説明する. 前述したように, エネルギーギャップの解析による量子アニーリングの性能評価は困難である. そこで, より解析の容易な統計力学的性質に着目して量子アニーリングの性能を明らかにする試みがなされた. その結果, 熱力学極限  $N \rightarrow \infty$  で発現する量子相転移現象の解析を利用し, 有限系のエネルギーギャップの見積りが可能であると判明した.

組合せ最適化問題における量子アニーリングを考えた場合, 系を特徴付ける秩序パラメータである磁化を用いて状態を二つの相に分類できる. これらの相をまたぐ時の相転移現象は大きく分けて二パターン存在する. 一つ目は 2 次の量子相転移で, 秩序パラメータは相をまたぐ際に連続的に変化する. この場合, 相転移付近におけるエネルギーギャップのべき的減衰が示されている [17, 18]. つまり, 2 次相転移を起こす系の量子断熱計算の効率は良い. 二つ目は 1 次の量子相転移で, 秩序パラメータは相をまたぐ際に不連続に変化する. この場合の多くの系における相転移点付近において,  $\Delta_{\min}$  の  $N$  に関する指数関数的減衰が数値的に確かめられている [12, 13, 19]. つまり, 1 次の量子相転移は量子断熱計算の失敗を示唆する.

### 5. non-stoquastic 演算子による 1 次相転移の回避

non-stoquastic 演算子は万能量子計算を可能にするだけ

ではなく、量子アニーリングの性能を改善する能力もある。その例の一つが、1次相転移の回避による量子アニーリングの性能改善である。

従来の横磁場イジングモデルに基づく量子アニーリングの効率が悪い単純な例は、次のイジングハミルトニアンで表現される強磁性  $p$  スピンモデルの基底状態探索である。

$$H_P = -\frac{1}{N^{p-1}} \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^N \sigma_{i_1}^z \cdots \sigma_{i_p}^z. \quad (4)$$

ここで、 $p$  は2以上の整数である。単純なモデルにあるにもかかわらず、 $p > 2$  の場合のモデルに横磁場を追加した系は1次相転移を引き起こし、エネルギーギャップの解析からも従来の量子アニーリングの効率が悪い結果が示されている [12]。この系を扱う利点として、系の性質を活用して容易にエネルギーギャップが解析できる点が挙げられる。つまり、量子アニーリングにとって都合の悪い問題を計算時間の解析と物理現象である相転移現象の解析の双方の観点から調べられる。

強磁性  $p$  スピンモデルの1次相転移を回避できる量子アニーリングが提案された [18]。この量子アニーリングでは次のハミルトニアンを考える。

$$H(s, \lambda) = s\lambda H_P - (1-s) \sum_{i=1}^N \sigma_i^x + s(1-\lambda) V_{\text{AFF}} \quad (5)$$

$$V_{\text{AFF}} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \sigma_i^x \sigma_j^x \quad (6)$$

ここで、 $H_P$  は強磁性  $p$  スピンモデルのハミルトニアンである。パラメータ  $s$  と  $\lambda$  は時間依存パラメータであり、 $\lambda$  は新たに導入された演算子  $V_{\text{AFF}}$  の強度を制御する役割を持つ。特に、 $\lambda = 1$  の場合は従来の量子アニーリングへと帰着する。この新たに導入された演算子  $V_{\text{AFF}}$  が non-stoquastic 演算子となる。このモデルの相転移現象を解析することで、適切に  $s$  と  $\lambda$  を制御すると、従来の量子アニーリングでは不可避だった1次相転移を  $p > 3$  の場合に回避できる結果が示された。さらに、エネルギーギャップの解析により量子アニーリングの計算時間の問題サイズに対するスケールアップが劇的に改善する結果も確かめられた。興味深いことに、 $V_{\text{AFF}}$  の符号を反転した演算子は stoquastic 演算子であり、横磁場を用いた従来の量子アニーリングと同様に1次相転移を引き起こされる結果も示された。

次に、他のモデルに対するこの新たな量子アニーリングの有効性を示した研究を紹介する [20]。この研究の対象となった多体 Hopfield モデルのイジングハミルトニアンは次で与えられる：

$$H_P = - \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^N J_{i_1, \dots, i_k} \sigma_{i_1}^z \cdots \sigma_{i_k}^z \quad (7)$$

上述の強磁性  $p$  スピンモデルは全ての相互作用が一様な単

純なモデルであるのに対し、この研究で扱った多体 Hopfield モデルの相互作用  $J_{i_1, \dots, i_k}$  は場所によって値が異なる。ただし、相互作用係数は完全にランダムな値を取るのではなく、次の Hebb 則に従って定められる：

$$J_{i_1, \dots, i_k} = \frac{1}{N^{k-1}} \sum_{\alpha=1}^p \xi_{i_1}^\alpha \cdots \xi_{i_k}^\alpha. \quad (8)$$

ここで、 $p$  は1以上の整数を取り、 $\xi_i^\alpha$  は  $\pm 1$  を等確率で取る確率変数である。系の振る舞いは Hebb 則に含まれるパラメータ  $p$  によって変化する。パラメータ  $p$  が系のサイズ  $N$  に依らないと仮定した場合、 $k > 2$  のときに横磁場イジングモデルに基づく量子アニーリングでは1次相転移が回避不可能である結果が示された。一方で、(6) 式で表される量子アニーリングを考えると強磁性  $p$  スピンモデルの場合と同様に1次相転移を回避できる結果が相転移現象の解析により判明した。しかしながら、この新しい量子アニーリングでも回避不可能な相転移の存在も示された。解析結果によると、パラメータ  $p$  が問題サイズ  $N$  に依存して大きくなる場合はスピングラス相と呼ばれる相が現れ、その相境界で常に1次相転移が起こる。この様に(6)式で表される量子アニーリングは万能な手法ではないものの、複数のモデルにおいて従来の量子アニーリングの持つ1次相転移という問題が回避可能である結果を示した。

## 6. 量子アニーリングの応用拡大

横磁場イジングモデルに新たな相互作用を加えた量子アニーリングを考えると、組合せ最適化問題以外の問題へと応用範囲を広げられる。その中の一つが量子化学計算である。

量子化学計算の目的の一つに化学分子の基底状態探索がある。量子アニーリングの最終ハミルトニアン  $H_P$  をこの化学分子のハミルトニアンにできれば、分子の基底状態を量子アニーリングを用いて準備できる。この化学分子の  $H_P$  を構築する方法は量子回路モデルを利用した量子化学計算の研究で開発されている。ハミルトニアン構築は以下の手順で行われる。まず、分子を構成する電子と原子核の位置および運動量演算子を利用してハミルトニアンが定義される。次に、分子軌道（分子中の電子の軌道）が分子を構成するそれぞれの原子の電子軌道の重ね合わせになることを仮定して第二量子化を行う。第二量子化後のハミルトニアンは分子軌道に電子を生成・消滅させるフェルミ演算子を使って記述される。フェルミ演算子を量子スピン演算子へと変換する手法が知られており、これを利用して量子スピン系のハミルトニアンを得る。フェルミ演算子から量子スピン演算子への変換方法としては、Jordan-Wigner 変換 [21] や Bravyi-Kitaev 変換 [22-24] など挙げられる。変換後のハミルトニアンは一般には横磁場イジングモデルにはならないが、non-stoquastic 演算子

を利用できる量子アニーリングならば扱えるハミルトニアンとなる。化学分子の  $H_P$  を構築できれば、あとは駆動ハミルトニアンを追加した全体ハミルトニアンを考え、通常の量子アニーリングのプロセスを用いて化学分子の基底状態を準備できる。

量子アニーリングを利用すると分子の励起状態探索も可能となる。これまでは基底状態探索に焦点を当ててきたが、量子断熱定理は励起状態に対しても適用可能である。初期ハミルトニアンの励起状態の断熱時間発展を利用して、目的のハミルトニアンの励起状態が準備できる。しかしながら、駆動ハミルトニアンとして通常の横磁場をそのまま利用できない。この問題を解決して量子スピン系の励起状態を探索するための手法が提案された [25]。この方法では、横磁場の強度を位置ごとに修正する工夫を加えて通常の横磁場が持つ問題を解決し、さらに強度の修正方法に関する指針を与えている。低ノイズ環境下という制限はあるものの、目的の励起状態を量子アニーリングを用いて高い精度で準備できる。

## 7. おわりに

本稿では次世代アクセラレータの一つである量子アニーリングマシンの理論的側面を、non-stoquastic 演算子による性能向上と応用拡大に着目して紹介した。従来の横磁場イジングモデルに基づく量子アニーリングと比べ劇的な性能向上をもたらす可能性と、組み合わせ最適化問題だけでなく量子化学計算という量子シミュレーションへと応用が広がる可能性を non-stoquastic 演算子もたらしてくれる。横磁場イジングモデルに基づく量子アニーリングと比べ non-stoquastic 演算子を利用した量子アニーリングは実装の困難性は増すものの、小規模ながら実装を行った実験の成果も報告されており、今後の発展が期待される。

**謝辞** 本講演で紹介内容は慶應義塾大学 田中宗氏、東京工業大学 西森秀稔氏、産業技術総合研究所 川畑史郎氏、松崎雄一郎氏との共同研究の成果を含んでいます。本講演で取り上げる研究開発の一部は、内閣府総合科学技術・イノベーション会議の戦略的イノベーション創造プログラム (SIP) 「光・量子を活用した Society5.0 実現化技術」(管理法人: QST) によって実施されました。

## 参考文献

[1] Shor, P. W.: Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory, *Phys. Rev. A*, Vol. 52, pp. R2493–R2496 (online), DOI: 10.1103/PhysRevA.52.R2493 (1995).

[2] Preskill, J.: Quantum Computing in the NISQ era and beyond, *Quantum*, Vol. 2, p. 79 (online), DOI: 10.22331/q-2018-08-06-79 (2018).

[3] Kadowaki, T. and Nishimori, H.: Quantum annealing in the transverse Ising model, *Phys. Rev. E*, Vol. 58, pp. 5355–5363 (online), DOI: 10.1103/PhysRevE.58.5355

(1998).

[4] Johnson, M. W., Amin, M. H. S., Gildert, S., Lanting, T., Hamze, F., Dickson, N., Harris, R., Berkley, A. J., Johansson, J., Bunyk, P., Chapple, E. M., Enderud, C., Hilton, J. P., Karimi, K., Ladizinsky, E., Ladizinsky, N., Oh, T., Perminov, I., Rich, C., Thom, M. C., Tolkacheva, E., Truncik, C. J. S., Uchaikin, S., Wang, J., Wilson, B. and Rose, G.: Quantum annealing with manufactured spins, *Nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 194–198 (2011).

[5] Yamaoka, M., Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T., Aoki, H. and Mizuno, H.: A 20k-Spin Ising Chip to Solve Combinatorial Optimization Problems With CMOS Annealing, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 51, No. 1, pp. 303–309 (online), DOI: 10.1109/JSSC.2015.2498601 (2016).

[6] Inagaki, T., Haribara, Y., Igarashi, K., Sonobe, T., Tamate, S., Honjo, T., Marandi, A., McMahon, P. L., Umeki, T., Enbutsu, K., Tadanaga, O., Takenouchi, H., Aihara, K., Kawarabayashi, K.-i., Inoue, K., Utsunomiya, S. and Takesue, H.: A coherent Ising machine for 2000-node optimization problems, *Science*, Vol. 354, No. 6312, pp. 603–606 (online), DOI: 10.1126/science.aah4243 (2016).

[7] Okuyama, T., Hayashi, M. and Yamaoka, M.: An Ising Computer Based on Simulated Quantum Annealing by Path Integral Monte Carlo Method, *2017 IEEE International Conference on Rebooting Computing (ICRC)*, pp. 1–6 (online), DOI: 10.1109/ICRC.2017.8123652 (2017).

[8] Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T. and Yamaoka, M.: Implementation and Evaluation of FPGA-based Annealing Processor for Ising Model by use of Resource Sharing, *International Journal of Networking and Computing*, Vol. 7, No. 2, pp. 154–172 (2017).

[9] Goto, H., Tatsumura, K. and Dixon, A. R.: Combinatorial optimization by simulating adiabatic bifurcations in nonlinear Hamiltonian systems, *Science Advances*, Vol. 5, No. 4 (online), DOI: 10.1126/sciadv.aav2372 (2019).

[10] 株式会社フィックスターズ: Fixstars Amplify Annealing Engine, 株式会社フィックスターズ (online), available from <https://amplify.fixstars.com> (accessed 2021-07-30).

[11] Jörg, T., Krzakala, F., Kurchan, J. and Maggs, A. C.: Simple Glass Models and Their Quantum Annealing, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 101, p. 147204 (online), DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.147204 (2008).

[12] Jörg, T., Krzakala, F., Kurchan, J., Maggs, A. C. and Pujos, J.: Energy gaps in quantum first-order mean-field-like transitions: The problems that quantum annealing cannot solve, *EPL (Europhysics Letters)*, Vol. 89, No. 4, p. 40004 (2010).

[13] Jörg, T., Krzakala, F., Semerjian, G. and Zamponi, F.: First-Order Transitions and the Performance of Quantum Algorithms in Random Optimization Problems, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 104, p. 207206 (online), DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.207206 (2010).

[14] Farhi, E., Goldstone, J., Gutmann, S. and Sipser, M.: Quantum computation by adiabatic evolution, *arXiv preprint quant-ph/0001106* (2000).

[15] Aharonov, D., van Dam, W., Kempe, J., Landau, Z., Lloyd, S. and Regev, O.: Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation, *45th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 42–51 (online), DOI: 10.1109/FOCS.2004.8 (2004).

- [16] Biamonte, J. D. and Love, P. J.: Realizable Hamiltonians for universal adiabatic quantum computers, *Phys. Rev. A*, Vol. 78, p. 012352 (online), DOI: 10.1103/PhysRevA.78.012352 (2008).
- [17] Dusuel, S. and Vidal, J.: Continuous unitary transformations and finite-size scaling exponents in the Lipkin-Meshkov-Glick model, *Phys. Rev. B*, Vol. 71, p. 224420 (online), DOI: 10.1103/PhysRevB.71.224420 (2005).
- [18] Seki, Y. and Nishimori, H.: Quantum annealing with antiferromagnetic fluctuations, *Phys. Rev. E*, Vol. 85, p. 051112 (online), DOI: 10.1103/PhysRevE.85.051112 (2012).
- [19] Žnidarič, M. and Horvat, M.: Exponential complexity of an adiabatic algorithm for an NP-complete problem, *Phys. Rev. A*, Vol. 73, p. 022329 (online), DOI: 10.1103/PhysRevA.73.022329 (2006).
- [20] Seki, Y. and Nishimori, H.: Quantum annealing with antiferromagnetic transverse interactions for the hopfield model, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 48, No. 33, p. 335301 (2015).
- [21] Steudtner, M. and Wehner, S.: Fermion-to-qubit mappings with varying resource requirements for quantum simulation, *New Journal of Physics*, Vol. 20, No. 6, p. 063010 (2018).
- [22] Bravyi, S. B. and Kitaev, A. Y.: Fermionic Quantum Computation, *Annals of Physics*, Vol. 298, No. 1, pp. 210–226 (2002).
- [23] Seeley, J. T., Richard, M. J. and Love, P. J.: The Bravyi-Kitaev transformation for quantum computation of electronic structure, *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 137, No. 22, p. 224109 (2012).
- [24] Tranter, A., Sofia, S., Seeley, J., Kaicher, M., McClean, J., Babbush, R., Coveney, P. V., Mintert, F., Wilhelm, F. and Love, P. J.: The Bravyi–Kitaev transformation: Properties and applications, *International Journal of Quantum Chemistry*, Vol. 115, No. 19, pp. 1431–1441 (2015).
- [25] Seki, Y., Matsuzaki, Y. and Kawabata, S.: Excited State Search Using Quantum Annealing, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 90, No. 5, p. 054002 (2021).