Vol.2021-AL-182 No.3
2021/3/17

順列グラフのカラフル独立集合問題に対するアルゴリズム

吉村 仁志[1,a)] 小林 靖明[1] 山本 章博[1]

概要：グラフのカラフル独立集合問題は，頂点に色がついたグラフが与えられ，頂点集合の部分集合で独立かつカラフル，つまり部分集合内の任意の頂点が互いに隣接せずかつ色が相異なるもので最大の要素数のものを見つける問題である．この問題は，通常の最大独立集合問題の一般化であり，与えられたグラフが特定のグラフクラスに属する場合でも興味深い分析が行われている．本研究では，与えられたグラフが順列グラフの場合を考え，この問題の固定パラメータアルゴリズムや指数時間厳密アルゴリズムを議論する．

1. はじめに

グラフ $G = (V, E)$ の頂点部分集合が**独立集合**であるとは，その部分集合の任意の 2 頂点が互いに隣接しあわないことである．**最大独立集合問題**は，与えられたグラフに対して要素数最大の独立集合をひとつ求める問題であり，グラフ上の NP 困難問題として最も有名なもののひとつである．また，与えられたパラメータ k に対して，大きさ k 以上の独立集合をグラフが持つかどうかを判定する問題は，**パラメータ化計算量理論**の観点で非常に重要な問題であり，多くの問題に対して下界を導くための出発点となっている．

最大独立集合問題の一般化として，**カラフル独立集合問題**は，G の各頂点に色が塗られた場合を考える．この問題は，G と頂点の色関数 $c : V \to \{1, 2, \ldots, \ell\}$ (ただし，c は頂点彩色とは限らない)，正整数 k が与えられたとき，G に大きさ k 以上の独立集合 S で，任意の $u, v \in S$ において $u \neq v$ ならば $c(u) \neq c(v)$ であるようなものを見つけるのが目的である．別の表現をすれば，S に含まれる頂点が相異なる色を持つように大きさ k 以上の独立集合を含むかを問う問題である．また，そのような k を最大化する問題を**最大カラフル独立集合問題**と呼ぶ.

このように「カラフル」という制約を課した問題は様々知られており，Rainbow Matching [8] は辺に色がついたグラフから「カラフル」制約を満たしながら大きなマッチングを見つける問題であり，固定パラメータ容易性 [9], [10], [14], 近似アルゴリズム [14] の観点から研究がなされている．Job Interval Selection は，区間集合とその集合上の分割が与えられて，互いに交わりの無い最大の区間集合で分割の各ブロックと最大ひとつしか選ばれないという制約を満たすものを見つける問題であり，Rainbow Matching と同様に固定パラメータ容易性 [2], [3]，近似アルゴリズム [6], [17] の研究が行われている．これらの問題には，多項式時間可解な組合せ構造同士の「交差」が容易に解けるか，という背景があり,「カラフル」制約はマトロイドの言葉では分割マトロイドの特別な場合に対応している．また，これらの問題は別の視点から見ると，グラフクラスの制限されたカラフル独立集合問題であり，Rainbow Matching はライングラフ，Job Interval Selection は区間グラフの最大カラフル独立集合問題であり,「カラフル」制約が無い場合にはそれぞれ多項式時間可解である．

本研究では，**順列グラフ**上で最大カラフル独立集合問題を考える．n 頂点 m 辺の順列グラフの最大独立集合は $O(m + n \log n)$ 時間で計算可能である [11], [16] 一方，最大カラフル独立集合問題は順列グラフでも NP 困難である．そこで, 本研究では順列グラフのカラフル独立集合問題の計算複雑性を固定パラメータ容易性の観点から分析する．頂点数 n の順列グラフ $G = (V, E)$ と関数 $c : V \to \{1, \ldots, \ell\}$ と正整数 k が与えられたとき，大きさ k 以上の独立集合 $S \subseteq V$ で，$|\{c(v) : v \in S\}| = |S|$ であるものを見つけるのが目的である．この問題に対して，シンプルな $2^{\ell} n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムを与える．一般に $k \leq \ell$ でであるため，$f(k)n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムの存在は，この結果から直ちに導かれるということはない．そこで本研究では $5.18^k n^{O(1)}$ 時間の決定性アルゴリズムと $2^k n^{O(1)}$ 時間の乱択アルゴリズムと与える．また, 順列グラフ上のカラフル独立集合問題を解く $2^{n/2} n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムを与える．これらの結果は Repetition Free Longest Common Subsequence に対する結果 [1], [4] や Job Interval Selection に対する結果 [3] から着想を得ている．

[1] 京都大学
[a)] m-yoshimura@iip.ist.i.kyoto-u.ac.jp

Vol.2021-AL-182 No.3
2021/3/17

2. 諸定義

正整数 k について，$[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$ と定義する．

2.1 グラフ

本稿では**順列グラフ**を扱う．$G = (V, E)$ とし，$V = \{1, 2 \ldots, n\}$ とする．G が順列グラフであるとは，ある全単射 $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ で，

$$\{i, j\} \in E \iff (i - j)(\pi(j) - \pi(i)) > 0$$

を満たすものが存在するときである．また，順列グラフが与えられたとき，その順列表現 π は線形時間で計算可能である [15]．頂点部分集合 $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ が独立集合であることの必要十分条件は，数列 $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$ において S に対応する部分列が増加列である．

頂点の (彩色とは限らない) 色関数を $c : V \to [\ell]$ とする．$C \subseteq [\ell]$ と $X \subseteq V$ において，X が C-**カラフル**であるとは，任意の相異なる $u, v \in X$ について $c(u) \neq c(v)$ かつ $C = \{c(v) : v \in X\}$ を満たすときである．

2.2 カーネル化と下界

ここでは，パラメータ化計算量理論におけるカーネル化の簡易的な説明とその下界について説明する．

入力が問題例 I とパラメータ k の対となる判定問題を考える．この判定問題に対する**カーネル化**とは，(I, k) の対を入力として同じ判定問題に対する問題例とパラメータの対 (I', k') を出力するような多項式時間アルゴリズム $\mathcal{A}$ で，(1) (I, k) が受理 $\iff$ (I', k') が受理，かつ (2) $|I| + k' \leq g(k)$ を満たす g が存在することである．カーネル化の出力 (I', k') を**カーネル**と呼び，特に g が多項式関数であるときに $\mathcal{A}$ は**多項式カーネル化**と呼ぶ．

多項式カーネル化の条件付き非存在性を示すために，以下の定義と補題を用いる．

定義 1. パラメータ付き判定問題 P に対する *OR* **合成アルゴリズム**とは，P の t 個の問題例とパラメータの対 $(I_1, k), \ldots, (I_t, k)$ が与えられたとき，$\sum_{1 \leq i \leq t} |I_i| + k$ の多項式時間で動作し，問題 P の (I, k') で
- (I, k') が受理 $\iff$ ある (I_i, k) が受理
- $k' \leq k^{O(1)}$

を満たすものを出力するアルゴリズムである．

補題 1 ([5]). パラメータ付き判定問題 P の OR 合成アルゴリズムが存在すると仮定する．P のパラメータを入力の一部とした問題が NP 完全であるとき，NP $\subseteq$ coNP/poly 出ない限り，P に対する多項式カーネル化は存在しない．

2.3 マトロイドと代表集合族

有限集合 E とその部分集合族 $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ が以下の条件を満たすとき，対 $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**と呼ぶ: (1) $\emptyset \in \mathcal{I}$; (2) 任意の $X, Y \subseteq E$ について $X \subseteq Y$ かつ $Y \in \mathcal{I}$ ならば $X \in \mathcal{I}$; (3) $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| < |Y|$ ならば, ある $e \in Y \setminus X$ で $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるものが存在．このとき，$\mathcal{I}$ の要素は ($\mathcal{M}$ における) **独立集合**と呼ばれる．

E 上の**分割マトロイド**とは，E の分割 $\{E_1, E_2, \ldots, E_\ell\}$ と正整数 $d_1, d_2, \ldots, d_\ell$ において，$X \in \mathcal{I} \iff$ 任意の $1 \leq i \leq \ell$ において $|X \cap E_i| \leq d_i$ と独立集合を定義したときの対 $(E, \mathcal{I})$ である．頂点に色のついたグラフ (G, c) を考えたとき，$E_i = \{v \in V : c(v) = i\}$ かつ $d_i = 1$ と定義すると，最大カラフル独立集合問題は (分割マトロイド的) 独立集合かつ (グラフ的) 独立集合のいずれも満たす最大のものを見つける問題である．

最大カラフル独立集合問題に現れる分割マトロイドは線形マトロイドである．これは，各頂点を ℓ 次元の列ベクトルとして，$c(v) = i$ のときに i 番目の成分を 1，それ以外の成分を 0 としたような行列を考えることで確認できる．

定義 2. p, q を正整数とし，$\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ をマトロイドとする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ を各集合の要素数が p であるような独立集合族とする．部分集合族 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ が $\mathcal{F}$ を q-**代表する**とは，任意の大きさ q 以下の任意の $X \subseteq E$ に対して，もし X と互いに素な $Y \in \mathcal{F}$ で $X \cup Y \in \mathcal{I}$ を満たすものが存在するならば，ある X と互いに素な $Y' \in \mathcal{F}'$ で $X \cup Y' \in \mathcal{I}$ を満たすものが存在するときである．

定理 1 ([7]). $\mathcal{M} = (E, \mathcal{I})$ を線形マトロイドとし，体 $\mathbb{F}$ 上の行列表現として与えられたとする．$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$ を大きさ p の独立集合族としたとき，$\mathcal{F}$ を q-代表する集合族 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ で $|\mathcal{F}'| \leq \binom{p+q}{q}$ であるものを $O(\binom{p+q}{p}|\mathcal{F}|(p^\omega + \binom{p+q}{p}^{\omega-2}))$ 回の $\mathbb{F}$ 上の算術演算で計算可能である．ここで，$\omega < 2.373$ とする．

2.4 算術回路と多項式

変数集合が $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ で体 $\mathbb{F}$ 上の多項式 $f \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_n]$ が単調な算術回路として与えられることを考える．ここで，**算術回路**とは各ゲートが入力として多項式を受け取り，和または積を計算するような回路のことである．また，算術回路が**単調**であるとは，どの負項を含まないことである．多項式 f において，単項式が**多重線形**であるとは，どの変数もその単項式中に高々一度しか現れないことである．例えば，$4x_1x_5x_7$ などは多重線形であるが，$3x_3^2x_4$ は多重線形ではない．, f が次数 k の多重線形単項式を含むかどうかを判定する問題である．Koutis と Williams [12], [13], [18] は単調な算術回路として与えられた多項式 f に次数がちょうど k であるような単項式が存在するかどうかを判定する乱択アルゴリズムを与えた．

定理 2 ([12], [13], [18]). 単調な算術回路 $\mathcal{C}$ と正整数 k が与えられたとき，$\mathcal{C}$ によって表現される ($\mathbb{F}$ 上の) 多項式 f

が次数 k の多重線形単項式を含むかどうかを $O(2^k|\mathcal{C}|)$ 回の $\mathbb{F}$ 上の算術演算で達成する乱択アルゴリズムが存在する．

3. Repetition Free Longest Common Subsequence との関係

Repetition Free Longest Common Subsequence (以下，RFLCS) とは，与えられた２つの文字列の最長反復フリー共通部分列を求める問題である．ある文字列が**反復フリー**であるとは，同じ文字を含まないことである．また，増加部分列は狭義増加部分列 (つまり，真に値が増加する部分列) を増加部分列と呼ぶことに注意する．

定理 3. RFLCS から順列グラフ上の最大カラフル独立集合問題への多項式時間帰着アルゴリズムが存在する．

RFLCS の入力であるふたつの文字列を $A = a_1a_2\cdots a_n$ と $B = b_1b_2\cdots b_m$ $(a_i, b_j \in \Sigma)$ とし，最大カラフル独立集合問題の入力 (G, c) を以下のように構成する．

各文字 $s \in \Sigma$ について $f_A(s)$ で s の A における出現回数とする．B の各文字 b_i を連続する $f_A(b_i)$ 個の b_i で置き換えた文字列を $B' = b'_1b'_2\cdots b'_{|B'|}$ とする．また，置き換えた部分を B_i と表記し，それぞれをブロックと呼ぶ．このとき A と B の反復フリー共通部分列は A と B' の反復フリー共通部分列であり，またその逆も成立する．数列 σ を以下のように定義する．各 $1 \le i \le |B'|$ について b'_i が B_j に含まれると仮定し，B_j の中で出現する位置を k $(1 \le k \le |B_j|)$ とする．このとき，文字 b'_i は $|B_j|$ 回文字列 A 中に出現するため，$\sigma(i)$ を A における文字 b'_i の k 番目の出現位置とする．ただし，$\sigma(i)$ は σ における i 番目の数字とする．具体的な例は以下のようである．

例 1. $A = abacbdbd$, $B = babbdccb$ とする．このとき，$B' = bbbaabbbbbbddccbbb$ である．数列 σ は $(2,5,7,1,3,2,5,7,2,5,7,6,8,4,4,2,5,7,6,8)$ である．

数列 σ を用いて以下のように順列 $\pi = [|B'|] \to [|B'|]$ を構成する．σ の各要素について二項関係 $\prec$ を

- $\sigma(i) \ne \sigma(j)$ のとき，$\sigma(i) \prec \sigma(j) \iff \sigma(i) < \sigma(j)$
- $\sigma(i) = \sigma(j)$ のとき，$\sigma(i) \prec \sigma(j) \iff i > j$

と定義する．このように定義された二項関係 $\prec$ は σ の要素上の全順序である．この $\prec$ に従って，$\pi(i) < \pi(j) \iff \sigma(i) \prec \sigma(j)$ となるように π をユニークに構成できる．

例 2. 数列 σ を $(2,5,7,1,3,2,5,7,2,5,7,6,8,6,8,4,4,2,5,7)$ とすると，π を

$$(5,12,18,1,6,4,11,17,3,10,16,14,20,13,19,8,7,2,9,15)$$

のように定義する．上の表現は i 番目の成分が $\pi(i)$ の値と定義した数列である．

このように定義された π において，長さ k の増加部分列があることと，σ において長さ k の狭義増加部分列であることは等価である．

π によって定義される順列グラフ $G = ([|B'|], E)$ について，色関数 $c : [|B'|] \to [\ell]$ を $b'_i = b'_j \iff \sigma(i) = \sigma(j)$ となるように定める．このとき以下が成立する．

補題 2. 頂点に色がついた順列グラフ (G, c) に大きさ k のカラフル独立集合があることと，A と B' に長さ k の反復フリー共通部分列が存在することは等価である．

証明. π を順列グラフ G によって定義される順列とする．$G = (V, E)$ の (c における) 大きさ k のカラフル独立集合を $S \subseteq V$ とし，S によって定義される π の増加部分列を考え，S に対応する π の添字集合を I とする．B' の部分列 $S = b'_{i_1}b'_{i_2}\cdots b'_{i_k}$ (任意の $1 \le j \le k$ について $i_j \in I$) としたとき，この部分列が A と B' の反復フリー共通部分列であることを示す．c の定義より，反復フリーであることは明らかである．任意の $i, j \in I$ $(i < j)$ について，$\sigma(i) < \sigma(j)$ であり，$a_{\sigma(i)}$ は b'_i と一致するため，部分列 S が A と B' の共通部分列であることがわかる．

$S = b'_{i_1}b'_{i_2}\cdots b'_{i_k}$ が A と B' の反復フリー共通部分列とする．このとき，任意の $1 \le j < j' \le k$ において，$\sigma(i_j)$ と $\sigma(i_{j'})$ の大小関係を考える．b'_{i_j} と $b'_{i_{j'}}$ が A に現れる出現位置は，b'_{i_j} の方が先であるため，$\sigma(i_j) < \sigma(i_{j'})$ である．よって，$\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_k)$ は増加部分列であり，S が反復フリーであることより，対応する G の頂点集合はカラフルである． □

RFLCS は NP 困難であることが知られているため，以下の系が得られる．

系 1. 順列グラフ上の最大カラフル独立集合問題は NP 困難である．

4. 固定パラメータ容易性と多項式カーネルの困難性

4.1 色数をパラメータアルゴリズム

定理 4. 順列グラフのカラフル独立集合問題を解く $O^*(2^\ell)$ 時間アルゴリズムが存在する．

証明. 各 $C \subseteq [\ell]$ と $1 \le i \le n$ について，$\mathtt{lis}(C, i)$ を部分数列 $(\pi(1), \ldots, \pi(i))$ の増加部分列 $(\pi(i_1), \ldots, \pi(i_t))$ で以下の条件すべてを満たすものが存在するかどうかを表すとする:

- $1 \le j < j' \le t$ において $c(i_j) \ne c(i_{j'})$
- $i_t = i$
- $C = \{c(\pi(i_j)) : 1 \le j \le t\}$.

これらの条件を満たすような増加部分列を (C, i) **増加部分列**と呼ぶ．ここで，条件より任意の (C, i) 増加部分列の長さは $|C|$ と一致することに注意する．このとき，

$$\texttt{lis}(C,i)=\begin{cases}\textbf{true} & i=0\wedge C=\emptyset\\ \textbf{false} & i=0\wedge C\neq\emptyset\\ \textbf{false} & i>0\wedge c(i)\notin C\\ \displaystyle\bigvee_{\substack{0\le j<i\\ \pi(j)<\pi(i)}}\texttt{lis}(C\setminus\{c(i)\},j) & i>0\wedge c(i)\in C\end{cases}$$

が成り立つことを帰納法で示す．ただし, 便宜的に $\pi(0)=0$ としている．

$i=0$ の場合は明らかであるため，$i>0$ と仮定する．また，$c(i)\notin C$ の場合も明らかであるため，そうでないと仮定する．長さが $\texttt{lis}(C,i)$ であるような $(\pi(1),\ldots,\pi(i))$ の (C,i) 増加部分列を $(\pi(i_1),\ldots,\pi(i_t))$ とする．このとき $(\pi(i_1,\ldots,\pi(i_{t-1})))$ は $(C\backslash\{c(i)\},i_{t-1})$ 増加部分列であるため, 左辺が真ならば右辺も真である．また, $\texttt{lis}(C\backslash\{c(i)\},j))$ が真であるような $0\le j<i$ が存在するとき, $(C\setminus\{c(i)\},j)$ 増加部分列の末尾に $\pi(i)$ を追加することで (C,i) 増加部分列を得られるため，右辺が真なら左辺も真である．

この再帰式を動的計画法を用いて評価することで，カラフル独立集合問題を解くことができる． □

4.2 解サイズをパラメータとした決定性アルゴリズム

定理 5. 順列グラフに大きさ k 以上のカラフル独立集合があるかどうかを判定する $O^*(5.18^k)$ 時間決定性アルゴリズムが存在する．

アルゴリズムは本質的に定理 4 と同様であるが，定理 1 を用いることで実行時間を高速化する．各 $0\le i\le n$ と $0\le j\le k$ について，$\mathcal{F}_{i,j}\subseteq 2^{[\ell]}$ を $\texttt{lis}(C,i)$ が真となるような C で要素数が j であるようなものの集合とする．つまり，$\mathcal{F}_{i,j}=\{C\subseteq[\ell]:\texttt{lis}(C,i)=\textbf{true}\wedge|C|=j\}$ とする．アルゴリズムは帰納的に $\mathcal{F}_{i,j}$ を構築していくが，計算過程において $\mathcal{F}_{i,j}$ を代表集合族 $\mathcal{R}_{i,j}$ で置き換える．具体的には，以下のような手続きである．

1 $\mathcal{R}_{0,0}=\{\emptyset\}$ とし，任意の $j>0$ について $\mathcal{R}_{0,j}=\emptyset$.

2 各 $1\le i\le n$ について以下を実行.

2.1 各 $1\le j\le k$ について以下を計算.

$$\mathcal{R}_{i,j}:=\bigcup_{\substack{0\le i'<i\\ \pi(i')<\pi(i)}}\{C\cup\{c(i)\}:C\in\mathcal{R}_{i',j-1}\wedge c(i)\notin C\}.$$

2.2 各 $1\le j\le k$ について以下を計算.

$$\mathcal{R}_{i,j}:=\texttt{Reduce}(\mathcal{R}_{i,j}).$$

3 $\mathcal{R}_{i,k}\neq\emptyset$ であるような $1\le i\le n$ が存在すれば Yes と答え，そうでなければ No と答える.

ここで，手続き $\texttt{Reduce}(\mathcal{R}_{i,j})$ は $\mathcal{R}_{i,j}$ の $(k-j)$-代表する集合族を求める手続きで定理 1 において述べたものである．

このアルゴリズムの正しさは以下の補題から得られる．

補題 3. 各 $1\le i'<i$ について，$\mathcal{R}_{i',j-1}$ が $\mathcal{F}_{i',j-1}$ を $(k-j+1)$-代表すると仮定する．このとき，

$$\mathcal{R}_{i,j}:=\bigcup_{\substack{0\le i'<i\\ \pi(i')<\pi(i)}}\{C\cup\{c(i)\}:C\in\mathcal{R}_{i',j-1}\wedge c(i)\notin C\}$$

によって定義された $\mathcal{R}_{i,j}$ は $\mathcal{F}_{i,j}$ を $(k-j)$-代表する．さらに，$\texttt{Reduce}(\mathcal{R}_{i,j})$ も $\mathcal{F}_{i,j}$ も $(k-j)$-代表する．

証明. $\mathcal{R}_{i,j}$ が $\mathcal{F}_{i,j}$ を $(k-j)$-代表するかを確認するためには,「任意の大きさ $k-j$ 以下の $X\subseteq[\ell]$ に対して，もし G が $(X\cup Y)$-カラフルな独立集合を持つような X とは互いに素な $Y\in\mathcal{F}_{i,j}$ が存在するならば，X とか互いに素な $Y'\in\mathcal{R}_{i,j}$ で G が $(X\cup Y')$-カラフルな独立集合となるようなものが存在する」という命題を示せば良い．そこで，X および Y を以上の命題の仮定部分の通りとする．$\mathcal{R}_{i',j-1}$ が $\mathcal{F}_{i',j-1}$ を $(k-j+1)$-代表しているため，$X\cup\{c(i)\}$ とは互いに素な $Y''\in R_{i',j-1}$ で G が $(X\cup Y''\cup\{c(i)\})$-カラフルな独立集合を持つものが存在する．$\mathcal{R}_{i,j}$ の定義より，$Y''\cup\{c(i)\}\in\mathcal{R}_{i,j}$ なので主張を満たす．また，代表する性質は推移的であるため，補題が成立する． □

このアルゴリズムの計算時間は，$|\mathcal{R}_{i,j}|$ の大きさと手続き Reduce に大きく依存することが観察できる．定理 1 より，$\mathcal{R}_{i,j}$ の大きさは $\binom{k}{k-j}$ 以下であり，Reduce による計算時間は

$$O\left(\binom{k}{k-j}\cdot\left(p^{\omega}+\binom{k}{k-j}^{\omega-2}\right)\cdot|\mathcal{R}_{i,j}|\cdot n\right)$$

であり，これは $2^{\omega k}n^{O(1)}$ と表すことができる．よって定理 5 が得られる．

4.3 解サイズをパラメータとした乱択アルゴリズム

定理 5 の実行時間は乱択を許容することで改善することができる．

定理 6. 順列グラフに大きさ k 以上のカラフル独立集合があるかどうかを判定する $O^*(2^k)$ 時間乱択アルゴリズムが存在する．

証明. 順列グラフのカラフル独立集合問題を単調な算術回路の多重線形単項式検出に帰着し，定理 2 を適用することで定理を証明する．

順列グラフ $G=(V,E)$ のカラフル独立集合問題を解くための算術回路を以下のように構成する．変数集合を $\{x_1,\ldots,x_\ell\}$ とし，多項式 $f_{i,k}$ を以下のように定義する．

$$f_{i,k}=\begin{cases}1 & i=0\wedge k=0\\ 0 & i=0\wedge k>0\\ \displaystyle\sum_{\substack{0\le j<i\\ \pi(j)<\pi(i)}}f_{j,k-1}\cdot x_{c(i)} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

ただし，$\pi(0) = 0$ とする．このように定義された多項式について，$f_{i,j}$ が次数 j の多重線形単項式を含むこととに大きさ k のカラフル独立集合が存在することは等価であることが定理 4 と同様に証明できる．また，算術回路の大きさは n の多項式のため，定理 2 より定理が成り立つ． □

4.4 色数をパラメータとした多項式カーネル化の下界

定理 7. NP ⊆ coNP/poly でない限り，順列グラフの最大カラフル独立集合問題に対する ℓ をパラメータとした多項式カーネルは存在しない．

証明. OR 合成アルゴリズムを与える．t 個の順列グラフと頂点の色関数の対 (G_i, c_i) が与えられたとする．このとき G を異なる G_i と G_j の各頂点を辺で接続して得られるグラフとする．このとき G が順列グラフであることは，順列グラフは補グラフに関して閉じていること，および各 G_i の補グラフの直和が順列グラフであり，その補グラフが G と一致することから確認できる．このとき，G において異なるふたつの部分グラフ G_i と G_j から独立集合を選ぶことができないため，G に大きさ k 以上のカラフル独立集合が存在することと，ある G_i が大きさ k 以上のカラフル独立集合を持つことが透過である． □

5. 指数時間厳密アルゴリズム

定理 8. 順列グラフに最大カラフル独立集合を解く $O^*(2^{n/2})$ 時間アルゴリズムが存在する．

証明. この定理のアルゴリズムのアイデアは，定理 4 のアルゴリズムにおいて，「カラフル」制約を満たすために使用した色集合 $C \subseteq [\ell]$ は，本質的には順列グラフ $G = (V, E)$ 中に 2 回以上出現するもののみが重要である．

$C_{\geq 2} \subseteq [\ell]$ を $c(u) = c(v)$ を満たす相異なる頂点 $u, v \in V$ が存在するような色 $c(u)$ の集合とする．そのため，各 $t \in [\ell] \setminus C_{\geq 2}$ について $c(u) = t$ を満たす頂点 $u \in V$ は最大でひとつである．定理 4 の再帰式を変更して，以下のように定義する．各 $C \subseteq C_{\geq 2}$ と $1 \leq i \leq n$ について，$\mathtt{lis}'(C, i)$ を部分数列 $(\pi(1), \ldots, \pi(i))$ の増加部分列 $(\pi(i_1), \ldots, \pi(i_t))$ で以下の条件を満たす最大の長さとする．

- $1 \leq j < j' \leq t$ において $c(i_j) \neq c(i_{j'})$
- $i_t = i$
- $C = \{c(\pi(i_j)) : 1 \leq j \leq t\} \cap C_{\geq 2}$.

このとき，

$$
\mathtt{lis}'(C, i) = \begin{cases} 0 & i = 0 \land C = \emptyset \\ -\infty & i = 0 \land C \neq \emptyset \\ \max\limits_{\substack{0 \leq j < i \\ \pi(j) < \pi(i)}} \mathtt{lis}(C, j) + 1 & i > 0 \land c(i) \notin C_{\geq 2} \\ -\infty & i > 0 \land c(i) \in C_{\geq 2} \setminus C \\ \max\limits_{\substack{0 \leq j < i \\ \pi(j) < \pi(i)}} \mathtt{lis}(C \setminus \{c(i)\}, j) + 1 & i > 0 \land c(i) \in C_{\geq 2} \cap C \end{cases}
$$

が成り立つ．ただし，便宜的に $\pi(0) = 0$ とする．この再帰式の正しさは定理 4 と同様であり，その評価は $2^{|C_{\geq 2}|} n^{O(1)}$ 時間で可能であるため，$|C_{\geq 2}| \leq n/2$ より定理が得られる． □

謝辞 本研究で扱う問題について議論していただいた大舘陽太先生に深く感謝いたします．本研究の一部は JSPS 科研費 JP20H05793 および JP20K19732 の助成を受けている．

参考文献

[1] Yuichi Asahiro, Jesper Jansson, Guohui Lin, Eiji Miyano, Hirotaka Ono, and Tadatoshi Utashima. Exact algorithms for the repetition-bounded longest common subsequence problem. *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 838, pp. 238–249, 2020.

[2] Reuven Bar-Yehuda, Magnús M. Halldórsson, Joseph Naor, Hadas Shachnai, and Irina Shapira. Scheduling split intervals. *SIAM J. Comput.*, Vol. 36, No. 1, pp. 1–15, 2006.

[3] Arindam Biswas, Venkatesh Raman, and Saket Saurabh. Solving group interval scheduling efficiently. In Charles J. Colbourn, Roberto Grossi, and Nadia Pisanti, editors, *Combinatorial Algorithms - 30th International Workshop, IWOCA 2019, Pisa, Italy, July 23-25, 2019, Proceedings*, Vol. 11638 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 97–107. Springer, 2019.

[4] Guillaume Blin, Paola Bonizzoni, Riccardo Dondi, and Florian Sikora. On the parameterized complexity of the repetition free longest common subsequence problem. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 112, No. 7, pp. 272–276, 2012.

[5] Hans L. Bodlaender, Rodney G. Downey, Michael R. Fellows, and Danny Hermelin. On problems without polynomial kernels. *J. Comput. Syst. Sci.*, Vol. 75, No. 8, pp. 423–434, 2009.

[6] Julia Chuzhoy, Rafail Ostrovsky, and Yuval Rabani. Approximation algorithms for the job interval selection problem and related scheduling problems. *Math. Oper. Res.*, Vol. 31, No. 4, pp. 730–738, 2006.

[7] Fedor V. Fomin, Daniel Lokshtanov, Fahad Panolan, and Saket Saurabh. Efficient computation of representative families with applications in parameterized and exact algorithms. *J. ACM*, Vol. 63, No. 4, pp. 29:1–29:60, 2016.

[8] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* W. H. Freeman Co., USA, 1979.

[9] Sushmita Gupta, Sanjukta Roy, Saket Saurabh, and Meirav Zehavi. Parameterized algorithms and kernels for rainbow matching. *Algorithmica*, Vol. 81, No. 4, pp.

1684–1698, 2019.

[10] Sushmita Gupta, Sanjukta Roy, Saket Saurabh, and Meirav Zehavi. Quadratic vertex kernel for rainbow matching. *Algorithmica*, Vol. 82, No. 4, pp. 881–897, 2020.

[11] Haklin Kim. Finding a maximum independent set in a permutation graph. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 36, No. 1, pp. 19–23, 1990.

[12] Ioannis Koutis. Faster algebraic algorithms for path and packing problems. In Luca Aceto, Ivan Damgård, Leslie Ann Goldberg, Magnús M. Halldórsson, Anna Ingólfsdóttir, and Igor Walukiewicz, editors, *Automata, Languages and Programming, 35th International Colloquium, ICALP 2008, Reykjavik, Iceland, July 7-11, 2008, Proceedings, Part I: Tack A: Algorithms, Automata, Complexity, and Games*, Vol. 5125 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 575–586. Springer, 2008.

[13] Ioannis Koutis and Ryan Williams. LIMITS and applications of group algebras for parameterized problems. *ACM Trans. Algorithms*, Vol. 12, No. 3, pp. 31:1–31:18, 2016.

[14] Van Bang Le and Florian Pfender. Complexity results for rainbow matchings. *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 524, pp. 27–33, 2014.

[15] Ross M. McConnell and Jeremy P. Spinrad. Modular decomposition and transitive orientation. *Discret. Math.*, Vol. 201, No. 1-3, pp. 189–241, 1999.

[16] C. Schensted. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canadian Journal of Mathematics*, Vol. 13, p. 179–191, 1961.

[17] Frits C. R. Spieksma. On the approximability of an interval scheduling problem. *Journal of Scheduling*, Vol. 2, No. 5, pp. 215–227, 1999.

[18] Ryan Williams. Finding paths of length k in $O^*(2^k)$ time. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 109, No. 6, pp. 315–318, 2009.