

# Greedy 描画可能な木の完全な組合せ的特徴づけ

野坂 怜哉<sup>1</sup> 宮田 洋行<sup>1</sup> 中野 眞一<sup>1</sup>

**概要:** グラフの greedy 描画は任意の 2 頂点に対し、一方の頂点がもう一方の頂点に近づく近傍を必ず持つような描画であり、目的地に近づくように各頂点でデータを転送し続ける単純なルーティングで目的地にデータを配送することができる条件を満たす描画として盛んに研究されている。例えば, greedy 描画できるグラフを特定する研究が行われており, Nöllenburg, Prutkin により, 最大次数 4 以下の木に対し, 線形時間の greedy 描画可能性判定アルゴリズムが与えられている。それを詳しく検討すると, 最大次数 4 以下の木の組合せ的特徴づけも得られるが, greedy 描画可能な最大次数 5 の木の組合せ的特徴づけは知られていない。本稿では, 最大次数 5 の木の greedy 描画可能な木の組合せ的な特徴づけを与え, greedy 描画可能な木の組合せ的特徴づけを完成させる。

## A complete combinatorial characterization of greedy-drawable trees

### 1. はじめに

グラフの描画方法には大きな任意性があり, さまざまな基準から見やすいグラフの描画が研究されている (例えば, [9] 参照)。本稿では, 特にグラフの 2 頂点間の経路を見つけやすい描画として知られる greedy 描画について扱う。グラフの greedy 描画とは, 任意の 2 頂点に対して, 一方の頂点により近づくようにもう一方の頂点の近傍を選ぶことができる描画である。これは地理的ルーティングにおいて, 各ノードが自分より目的地に近いノードにデータを転送することで任意の目的地にデータを配送できることを保証する条件に対応しており, 多くの研究がなされている。また, 地理的ルーティングにおいて, 各ノードは実際の位置情報を用いる必要はなく, 仮想的な座標に基づいて転送を行えばよいことが Rao ら [8] によって指摘されており, グラフが greedy 描画可能であれば, その描画の座標を仮想座標として用いて上記のような単純なルーティングを行うことが可能である。そのため, greedy 描画可能なグラフを特定する研究が盛んになされており, 例えば, Papadimitriou, Ratajczak [6] により, 3-連結平面的グラフが greedy 描画可能であることが予想され, それが Leighton, Moitra [5] と Angelini ら [2] によって独立に証明されている。また, 双曲平面上では任意の連結グラフが greedy 描画可能であ

ることが Kleinberg [4] により示されている。

本稿では, 木に注目し, ユークリッド平面で greedy 描画可能な条件について考察する。ユークリッド平面で greedy 描画可能な木についても, 多くのことが示されており, 木が greedy 描画可能である条件の (非線形等式を含む) 不等式系による特徴づけやそれを用いた greedy 描画可能な二分木の禁止部分グラフによる特徴づけ, 最大次数 4 の木の greedy 描画可能性を判定する線形時間アルゴリズム等が Nöllenburg, Prutkin [7] により与えられている。しかし, 最大次数 5 の木の greedy 描画可能な組合せ的な特徴づけは文献 [7] では未解決となっている。本稿では, Nöllenburg, Prutkin [7] の結果を詳しく検討し, 最大次数 4 以下の木に greedy 描画可能な木の明示的な記述を与えるとともに最大次数 5 の木について greedy 描画可能な木の明示的な記述を与え, greedy 描画可能な木の組合せ的特徴づけを完成させる。

本稿の構成は以下のとおりである。まず, 第 2 節で必要な前提知識を整理する。第 3 節, 第 4 節で Nöllenburg, Prutkin [7] の結果を詳しく検討し, greedy 描画可能な最大次数 4 以下の木の明示的な記述を与える。第 5 節では greedy 描画可能な最大次数 5 の木の組合せ的な条件を特定し, greedy 描画可能な木全ての明示的な記述を与える。

### 2. 前提知識

グラフ  $G$  に対し,  $G$  の頂点を平面上の点,  $G$  の枝  $e$  を

<sup>1</sup> 群馬大学  
Gunma University

$e$  の端点を結ぶ線分として表現したものを  $G$  の直線描画と呼び、枝同士が互いに交差しない描画を平面直線描画と呼ぶ。本稿では、 $G$  の平面直線描画を単に  $G$  の描画と呼ぶこととする。 $d$  をユークリッド距離とする。グラフ  $G$  の描画が greedy であるとは、任意の 2 頂点  $s, t$  ( $s \neq t$ ) に対し、 $d(u, t) < d(s, t)$  を満たす  $s$  の近傍  $u$  が存在することをいう。グラフ  $G$  が greedy な描画を持つとき、 $G$  を greedy 描画可能であるという。

以下、既存研究により導入された木の greedy 描画可能性に関する概念、基本的事実を紹介する。木が次数 6 以上の頂点を含むとき、greedy 描画不可能であることは容易にわかるので、以後、木は全ての頂点の次数が 5 以下と仮定する。

木  $T$  からその枝  $uv$  を除去してできる部分木のうち、 $u$  を含む方を  $T_{uv}^u$  と書く。 $T$  の描画  $\Gamma$  において、枝  $uv$  の垂直二等分線  $axis(uv)$  によって定まる半平面のうち、 $u$  を含む方を  $h_{uv}^u$  と書く。すると、以下が分かる。

**命題 2.1** ([1])  $T$  の全ての枝  $uv$  に対し、 $T_v^u \subset h_{uv}^u$  が成り立つならば、 $\Gamma$  は greedy 描画である。

$T$  の頂点を 1 つ選び、 $r$  とし、その隣接点を  $v_1, \dots, v_d$  とする。このとき、 $T$  の部分木  $T_i := T_{rv_i}^{v_i} + rv_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) を考え、 $polytope(T_i) = \bigcap \{h_{uv}^w \in E_i \mid uv \in E_i, uv \neq rv, d_T(w, r) < d_T(u, r)\}$  とする。ただし、 $E_i$  は  $T_i$  の枝集合であり、 $d_T$  は  $T$  上の距離である。命題 2.1 より、 $\Gamma$  が  $T$  の greedy 描画ならば、 $\Gamma$  において、任意の  $T_j$  ( $i \neq j$ ) は  $polytope(T_i)$  に含まれることに注意する。

ここで、仮に各  $T_{rv_i}^{v_i}$  を無限に小さく描画し、それを  $r$  によって貼り合わせた  $T$  の greedy 描画を構成することを考える。そのとき、 $polytope(T_i)$  は方向  $v_i r$  に非有界である必要があり、また 2 つの非有界辺のなす角度が重要な役割を果たすことがわかるだろう。その考えに基づき、以下のような定義を行う。

**定義 2.2** ([7])  $T$  の描画  $\Gamma$  において、 $a_1 b_1 \in E_i$  ( $d_T(a_1, r) < d_T(b_1, r)$ ) を  $a_i \vec{b}_i$  と  $v_i r$  が時計回りに最も近くなるように選び、同様に  $a_2 b_2 \in E_i$  を  $a_i \vec{b}_i$  と  $v_i r$  が反時計回りに最も近くなるように選ぶ。このとき、

- $a_1 \vec{b}_1$  から  $a_2 \vec{b}_2$  まで反時計回りに回った角度が  $180^\circ$  より大きいとき、 $polytope(T_i)$  は非有界である。このとき、 $T_i$  は  $\Gamma$  において open angle を持つといい、 $axis(a_1 b_1)$  と  $axis(a_2 b_2)$  のなす角度を  $|\angle T_i|$  と書く。
- 一方、 $a_1 \vec{b}_1$  から  $a_2 \vec{b}_2$  まで反時計回りに回った角度が  $180^\circ$  より小さい(等しい)とき、 $polytope(T_i)$  は有界であり、 $T_i$  は  $\Gamma$  において closed angle (zero angle) を持つといい、 $|\angle T_i| < 0$  ( $= 0$ ) と書く。

実は、以下の補題より、各  $T_i$  が open angle を持つような

$T$  の greedy 描画があれば、各  $T_i$  の open angle を保って無限に小さく描画し、それを  $r$  で貼り合わせた描画がいつでも可能であることが分かる。

**補題 2.3** (shrinking lemma [7])  $T = (V, E)$  を木とし、 $rv \in E$  に対し、 $r$  を根とする根付き木  $T' = T_{rv}^v + rv$  を考える。 $\Gamma$  を  $|\angle T'| > 0$  となるような  $T$  の greedy 描画とする。このとき、 $|\angle T'|$  を保ち、 $T_{rv}^v$  を無限に縮小させた  $T$  の greedy 描画が存在する。

また、各  $T_i$  の open angle の和について、以下のことが分かっている。

**命題 2.4** ([7])  $T$  の greedy 描画において、以下が成り立つ。

$$\sum_{i=1, \dots, d, |\angle T_i| > 0} |\angle T_i| > (d-2)180^\circ$$

### 3. open angle を持つ根付き木

文献 [7](命題 10–15) では open angle を持つ根付き木をいくつか組み合わせて open angle を持つ根付き木を構成できる条件を特定し、open angle の上限の計算法を与えている。本節では、これをもとに open angle を持つように greedy 描画できる根付き木の明示的な記述を与え、それらの明示的な open angle の上限を計算する。

$T$  を次数 1 の根を持つ根付き木とする。次数 5 以上の点を含むとき、 $T$  は open angle を持つように greedy 描画できないので、 $T$  の全ての頂点は 4 以下と仮定する。文献 [7] の命題 10–15 を踏まえると、 $T$  が open angle を持つように greedy 描画できるならば、全ての次数 4 の頂点が 1 つのパス上になければならないことがわかる。そこで、ある次数の頂点が並ぶパスに注目し、以下のような定義を行う。 $k \in \{3, 4\}$  とする。あるパス  $P$  に対し、 $P$  の端点には次数  $k$  の頂点、それ以外の頂点には次数  $k$  以下の頂点を並べてできる木  $T_P$  を  $k$  次パスと呼ぶこととする。 $P$  の端点と接続し、 $P$  に含まれない  $T_P$  の頂点を  $T_P$  の最端点と呼び、 $T_P$  に含まれる次数  $k$  の頂点の個数を  $T_P$  の長さと呼ぶことにしよう。以後、木  $T$  に対し、 $|\angle T| = \alpha$  となる  $T$  の greedy 描画が存在する最大の  $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$  が存在するとき、 $|\angle T|_* = \alpha$  と書く。また、十分小さい任意の  $\epsilon > 0^\circ$  に対して  $|\angle T| = \alpha - \epsilon$  なる  $T$  の greedy 描画が可能であるが  $|\angle T| = \alpha$  なる greedy 描画が不可能であるとき、 $|\angle T|_* = \alpha^-$  と書く。 $|\angle T|_*$  を上限 open angle と呼ぶこととする。

以上のような定義のもと、以下のように open angle を持つように greedy 描画できる根付き木とその上限 open angle が記述できる。なお、紙面の都合上、この命題の証明は省略する。

**命題 3.1** 次数 1 の根  $r$  を持つ根付き木  $T$  が open angle を持つ必要十分条件は、 $T$  が以下の (A)–(F) のいずれかの条件を満たすことであり、上限 open angle は以下のように計算できる。

- (A)  $T$  は  $r$  を端点として持つ 1 本のパスからなる木である。このとき、 $|\angle T|_* = 180^\circ$ 。この木を **A 型の木** と呼ぶ。
- (B)  $T$  は  $r$  を最端点とする長さ  $n (\geq 1)$  の 3 次パスの細分である。このとき、 $|\angle T|_* = (90^\circ + 60^\circ \times \frac{1}{2^n})^-$ 。この木を  **$B_n$  型の木** と呼ぶこととする (図 1 参照)。
- (C)  $T$  は  $r$  を最端点とする長さ  $n (\geq 1)$  の 4 次パスの細分として表される。このとき、 $|\angle T|_* = (60^\circ \times \frac{1}{2^n})^-$ 。このような木を  **$C_n$  型の木** と呼ぶこととする (図 2 参照)。
- (D)  $T$  は長さ  $n (\geq 1)$  の 4 次パスの同じ頂点に接続する 3 つの最端点のうち、2 つを長さ  $k, l (1 \leq k \leq l)$  の 3 次パスに置き換えてできる木の細分であり、 $r$  はそれらの最端点から  $T$  上で最も離れた最端点の 1 つである。このとき、 $|\angle T|_* = (45^\circ \times \frac{1}{2^k} + 30^\circ \times \frac{1}{2^l})^- \times \frac{1}{2^{n-1}}$ 。このような木を  **$D_{k,l,n}$  型の木** と呼ぶこととする (図 3 参照)。
- (E)  $T$  は長さ  $n (\geq 1)$  の 4 次パスの最端点の 1 つに長さ  $k, l (1 \leq k \leq l)$  の 2 つの 3 次パスをつけてできる木の細分であり、 $r$  はそれらの最端点から  $T$  上で最も離れた最端点の 1 つである。このとき、 $|\angle T|_* = (60^\circ \times \frac{1}{2^k} + 60^\circ \times \frac{1}{2^l})^- \times \frac{1}{2^n}$ 。このような木を  **$E_{k,l,n}$  型の木** と呼ぶこととする (図 4 参照)。
- (F)  $T$  は長さ 0 以上の 3 次パス  $T'$  の同じ頂点に接続する 2 つの最端点を長さ  $k, l (1 \leq k \leq l)$  の 3 次パスで置き換えてできる木の細分であり、 $r$  は  $T'$  のそれら以外の最端点である。このとき、 $|\angle T|_* = 60^\circ \times (\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l})^-$ 。このような木を  **$F_{k,l}$  型の木** と呼ぶこととする (図 5 参照)。

命題 3.1 に現れる上限 open angle の集合を  $\Phi$  で表し、その相対的閉包を  $\tilde{\Phi}$  で表すこととする。以下の表 1 は  $15^\circ$  以上の open angle を持つ木を分類したものである。

$ \angle T _* = 180^\circ$	A 型
$ \angle T _* = (120^\circ)^-$	$B_1$ 型
$ \angle T _* = (105^\circ)^-$	$B_2$ 型
$90^\circ <  \angle T _* < 97.5^\circ$	$B_n$ 型 ( $n \geq 3$ )
$ \angle T _* = (60^\circ)^-$	$C_1$ 型, $F_{1,1}$ 型
$ \angle T _* = (45^\circ)^-$	$F_{1,2}$ 型
$ \angle T _* = (37.5^\circ)^-$	$D_{1,1,1}$ 型, $F_{1,3}$ 型
$30^\circ <  \angle T _* < 33.75^\circ$	$F_{1,l}$ 型 ( $l \geq 4$ )
$ \angle T _* = (30^\circ)^-$	$C_2$ 型, $D_{1,2,1}$ 型, $E_{1,1,1}$ 型, $F_{2,2}$ 型
$22.5^\circ <  \angle T _* < 26.25^\circ$	$D_{1,l,1}$ 型 ( $l \geq 3$ )
$15^\circ <  \angle T _* < 22.5^\circ$	$D_{1,1,2}$ 型, $D_{2,2,1}$ 型, $E_{1,l,1}$ 型 ( $l \geq 2$ ), $F_{2,l}$ 型 ( $l \geq 2$ )

表 1  $15^\circ$  以上の open angle を持つ木の分類

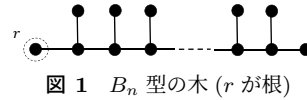


図 1  $B_n$  型の木 ( $r$  が根)

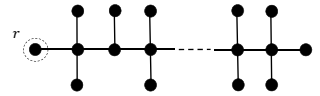


図 2  $C_n$  型の木 ( $r$  が根)

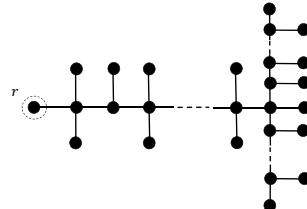


図 3  $D_{k,l,n}$  型の木 ( $r$  が根)

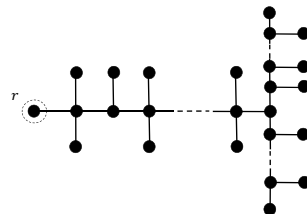


図 4  $E_{k,l,n}$  型の木 ( $r$  が根)

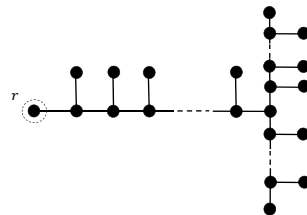


図 5  $F_{k,l}$  型の木 ( $r$  が根)

表 1 より、例えば、上限 open angle が  $(30^\circ, 90^\circ)$  の範囲にある根付き木の記述を得ることができ、それを  $(30^\circ, 90^\circ)$ -**型の木** と呼ぶことにしよう。同様に表 1 から open angle が範囲  $I \subset [0^\circ, 180^\circ]$  にある木の記述が得られるものについて、その木を  **$I$ -型の木** と呼ぶこととする。また、 $a = 120^\circ, 105^\circ, 60^\circ, 37.5^\circ, 30^\circ$  に対し、表 1 から  $|\angle T|_* = a^-$  となるような  $T$  を特定可能である。このような木を  **$a$ -型の木** と呼ぶこととする。その記法に合わせ、A 型の木を以後、 **$180^\circ$ -型の木** と呼ぶこととする。

#### 4. greedy 描画可能な木 (最大次数 4 以下の場合)

木  $T$  の枝  $uv$  に対し、 $T_{uv} + uv$  を  $\tilde{T}_{uv}^u$  と書くことにする。文献 [7] の命題 2 の証明を検討すると、最大次数 4 以下の木  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は、ある頂点  $v$  が存在し、 $v$  の全ての近傍  $w$  に対し、 $|\angle \tilde{T}_{uv}^w|_* > 0$  が成り立ち、それらの和が  $180^\circ(d-2)$  より大きい ( $d$  は  $v$

の次数) ことである。前節の命題 3.1 と合わせることであり、以下のように greedy 描画可能な最大次数 4 以下の木の明示的な記述を与えることができる。

**命題 4.1** 最大次数 4 以下の木  $T$  が greedy 描画可能な木であるための必要十分条件は、 $T$  が表 2 の型の根付き木  $T_0, \dots, T_3$  を根において貼り合わせた木の部分木として表現できることである。

$T_0$ の型	$T_1$ の型	$T_2$ の型	$T_3$ の型
180°	180°	(0°, 180°]	(0°, 180°]
180°	120°	(60°, 180°]	(0°, 180°]
180°	120°	45°	(15°, 45°)
180°	120°	37.5°	(22.5°, 45°)
180°	120°	(30°, 33.75°)	(26.5°, 45°)
180°	105°	(90°, 105°)	(0°, 105°)
180°	105°	60°	(15°, 60°)
180°	105°	45°	(30°, 45°)
180°	97.5°	(90°, 97.5°)	(0°, 97.5°)
180°	97.5°	60°	(22.5°, 60°)
180°	97.5°	45°	45°
180°	(90°, 93.75°)	(90°, 93.75°)	(0°, 93.75°)
180°	(90°, 93.75°)	60°	(26.25°, 60°)
180°	(90°, 93.75°)	45°	45°
120°	120°	120°	(0°, 120°)
120°	120°	105°	(15°, 105°)
120°	120°	97.5°	(22.5°, 97.5°)
120°	120°	(90°, 93.75°)	(26.25°, 93.75°)
120°	105°	105°	(30°, 105°)
120°	105°	97.5°	(37.5°, 97.5°)
120°	105°	(90°, 93.75)	(45°, 93.75°)
120°	97.5°	97.5°	(45°, 97.5°)
120°	(90°, 97.5°)	(90°, 97.5°)	(60°, 93.75°)
105°	105°	105°	(0°, 105°)
105°	105°	(90°, 97.5°)	(60°, 97.5°)
(90°, 105°)	(90°, 97.5°)	(90°, 97.5°)	(90°, 97.5°)

表 2 greedy 描画可能な最大次数 4 以下の木の分類

## 5. greedy 描画可能な木 (最大次数 5 の場合)

木  $T$  は、次数 5 の頂点が 2 つ存在すると greedy 描画できないことは容易にわかるので、次数 5 の唯一の頂点に注目し、その頂点を  $r$  とする。  $r$  の隣接点を  $v_0, \dots, v_4$  とし、  $T_i = T_{rv_i}^{v_i} + rv_i$  ( $i = 0, \dots, 4$ ) を  $r$  を根とする根付き木とする。  $T_0, \dots, T_4$  は open angle を持つように greedy 描画できないといけないことが容易にわかるので、それらの上限 open angle を  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  とする。まず、命題 2.4 より、  $T$  が greedy 描画可能であるためには、  $\sum_{i=0}^4 \varphi_i > 540^\circ$  を満たす必要がある。実は、  $r$  の周りに  $T_0, \dots, T_4$  の順に配置するという制約の下で、  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は、上記条件に加え、以下の不等式系に解がある

ことであることが示されている [7].

$$0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq 180, \quad (1)$$

$$\beta_i < \alpha_i, \gamma_i < \alpha_i, \quad (2)$$

$$\beta_i + \gamma_{i+1} < \varphi_i \quad (i \bmod 5), \quad (3)$$

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 180, \alpha_0 + \dots + \alpha_4 = 360, \quad (4)$$

$$\sin(\beta_0) \cdots \sin(\beta_4) = \sin(\gamma_0) \cdots \sin(\gamma_4) \quad (5)$$

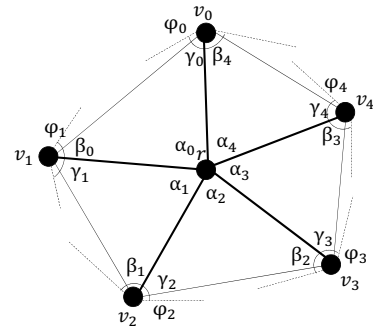


図 6  $T_0, \dots, T_4$  の  $r$  における貼り合わせ

この式において、  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  は図 6 のように  $T_0, \dots, T_4$  を無限に縮小して描画したときの角度に対応する変数であり、条件 (1), (4), (5) は Di Battista, Vismara [3] によって与えられた車輪グラフが描画できる  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  の条件を記述したものである。条件 (2) は greedy 描画において、  $d(r, v_i) < d(v_i, v_{i+1})$ ,  $d(r, v_{i+1}) < d(v_i, v_{i+1})$  となることに対応した条件である。条件 (3) は、木  $T_i$  の open angle に木  $T_j$  ( $j \neq i$ ) が含まれることを記述した条件である。上記の不等式系から、  $\alpha_i$  を消去して、以下を得る。

$$\beta_i, \gamma_i \geq 0,$$

$$\beta_i + \gamma_{i+1} < \varphi_i \quad (i \bmod 5),$$

$$180 - \beta_i - \gamma_i > \beta_i, \quad 180 - \beta_i - \gamma_i > \gamma_i,$$

$$\sin(\beta_0) \cdots \sin(\beta_4) = \sin(\gamma_0) \cdots \sin(\gamma_4)$$

実際には、  $r$  の周りに  $T_0, \dots, T_4$  を配置する順番は自由に変わってよいので、  $T$  が greedy 描画可能である条件は上記の不等式系が解があるように  $\varphi_0, \dots, \varphi_4$  を適切に置換できることである。したがって、  $\omega(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) = \prod_{i=0}^4 \sin(\beta_i) - \prod_{i=0}^4 \sin(\gamma_i)$  としたとき、  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は、  $0, \dots, 4$  のある置換  $\tau$  が存在し、以下の不等式を満たす  $\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4$  で、  $\omega(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) = 0$  を満たすものがあることと言い換えることができる。

$$\beta_i, \gamma_i \geq 0,$$

$$\beta_i + \gamma_{i+1} < \varphi_{\tau(i)} \quad (i \bmod 5),$$

$$180 - \beta_i - \gamma_i > \beta_i, \quad 180 - \beta_i - \gamma_i > \gamma_i$$

上記の不等式を満たす解  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4)$  の集合を  $S(\varphi_{\tau(0)}, \dots, \varphi_{\tau(4)})$  と書くことにしよう. 以後, 一般性を失わず,  $\varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \dots \geq \varphi_4$  と仮定する.

### 5.1 $T_0$ が $180^\circ$ -型でない, または $T_0, T_1$ がともに $180^\circ$ -型のとき

まず, 既存研究 [7] の結果と命題 3.1 の組合せで分かることを整理する. 文献 [7] で示されていることは以下のとおりである

- $\varphi_0 = \dots = \varphi_3 = 180^\circ$  のとき,  $T$  は greedy 描画可能である必要十分条件は,  $|\angle T_4| > 0$  であること.
- $\varphi_0 \leq 120^\circ$  のとき,  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は  $\sum_{i=0}^4 \varphi_i > 540^\circ$  であること.
- $\varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = 180^\circ$  のとき,  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は,  $\varphi_3 + \varphi_4 > 120^\circ$  を満たすことである.
- $\varphi_0 = \varphi_1 = 180^\circ$  のとき,  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は,  $\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 > 240^\circ$  を満たすことである.

これと命題 3.1 を踏まえると以下のことがわかる.

**命題 5.1**  $T_0, T_1$  が  $180^\circ$ -型であるとき,  $T$  が greedy 描画可能であるための必要十分条件は,  $T_2, T_3, T_4$  が表 3 に記述された型のいずれかに当てはまることであり,  $T_0$  が  $180^\circ$ -型でないときに  $T$  が greedy 描画となる  $T$  が greedy 描画可能であるための必要十分条件は,  $T_0, \dots, T_4$  が表 4 に記述された型のいずれかに当てはまることである.

$T_2$ の型	$T_3$ の型	$T_4$ の型
$180^\circ$	$(120^\circ, 180^\circ)$	$(0^\circ, 180^\circ)$
$180^\circ$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(26.25^\circ, 97.5^\circ)$
$120^\circ$	$120^\circ$	$(0^\circ, 120^\circ)$
$120^\circ$	$105^\circ$	$(15^\circ, 180^\circ]$
$120^\circ$	$97.5^\circ$	$(22.5^\circ, 180^\circ]$
$120^\circ$	$(90^\circ, 93.75^\circ)$	$(26.25^\circ, 93.75^\circ)$
$105^\circ$	$105^\circ$	$(30^\circ, 105^\circ)$
$105^\circ$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(45^\circ, 97.5^\circ)$
$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(60^\circ, 97.5^\circ)$

表 3 greedy 描画可能な木の分類 ( $T_0, T_1$  が  $180^\circ$ -型の場合)

$T_0$ の型	$T_1$ の型	$T_2$ の型	$T_3$ の型	$T_4$ の型
$120^\circ$	$120^\circ$	$120^\circ$	$(90^\circ, 120^\circ)$	$(90^\circ, 120^\circ)$
$120^\circ$	$120^\circ$	$105^\circ$	$105^\circ$	$(90^\circ, 105^\circ)$

表 4 greedy 描画可能な木の分類 ( $T_0$  が  $180^\circ$ -型でない場合)

### 5.2 $T_0$ だけが $180^\circ$ -型のとき

この場合の  $T$  が greedy 描画可能である組合せ的条件は, 文献 [7] では特定されていない. 本節では, 以下の命題により, この場合の条件を特定する.

**命題 5.2**  $T_0$  が  $180^\circ$ -型かつ  $T_1, \dots, T_4$  が  $180^\circ$ -型でないとき,  $T$  が greedy 描画可能であるための必要十分条件は,  $T_1, \dots, T_4$  が表 5 に記述された型のいずれかに当てはまることである. なお, greedy 描画における  $r$  の周りの  $T_0, \dots, T_4$  の配置順は表 6 に記載された通りである.

	$T_1$ の型	$T_2$ の型	$T_3$ の型	$T_4$ の型
I	$120^\circ$	$120^\circ$	$120^\circ$	$(33.75^\circ, 120^\circ)$
II	$120^\circ$	$120^\circ$	$105^\circ$	$(45^\circ, 105^\circ)$
III	$120^\circ$	$120^\circ$	$(90^\circ, 120^\circ)$	$(60^\circ, 90^\circ)$
IV	$120^\circ$	$105^\circ$	$93.75^\circ$	$(60^\circ, 93.75^\circ)$
V	$120^\circ$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$
VI	$105^\circ$	$97.5^\circ$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$	$(90^\circ, 97.5^\circ)$
VII	$105^\circ$	$93.75^\circ$	$93.75^\circ$	$(90^\circ, 93.75^\circ)$
VIII	$105^\circ$	$93.75^\circ$	$91.875^\circ$	$91.875^\circ$
IX	$97.5^\circ$	$97.5^\circ$	$97.5^\circ$	$(90.9375^\circ, 97.5^\circ)$

表 5 greedy 描画可能な木の分類 ( $T_0$  だけが  $180^\circ$ -型の場合)

$T$ の型	$r$ の周りの配置順
I	$T_1, T_2, T_3, T_4, T_0$
II	$T_3, T_1, T_2, T_4, T_0$
III	$T_4, T_1, T_2, T_3, T_0$
IV	$T_3, T_2, T_1, T_4, T_0$
V	$T_2, T_1, T_3, T_4, T_0$
VI	$T_3, T_1, T_2, T_4, T_0$
VII	$T_4, T_1, T_2, T_3, T_0$
VIII	$T_3, T_1, T_2, T_4, T_0$
IX	$T_1, T_2, T_3, T_4, T_0$

表 6 greedy 描画における  $T_0, \dots, T_4$  の  $r$  の周りの配置順

命題 5.2 の証明は計算機を援用して行った. 以下に行った計算を紹介する. 命題を示すためには, まず,  $T_1, \dots, T_4$  が上記の表に現れる型であるときに  $T$  が greedy 描画可能であることを示す必要がある. そのためには, 表 6 を参考にすると,  $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$  が以下に示す値の場合に,  $\omega := \omega(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) = 0$  となる  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) \in S(\varphi_0, \dots, \varphi_4)(=: S)$  が存在することを示せばよい.

- $(120, 120, 120, 33.75, 180), (120, 120, 105, 45, 180),$
- $(120, 120, 90, 60, 180), (120, 105, 93.5, 60, 180),$
- $(120, 90, 90, 90, 180), (105, 97.5, 90, 45, 90),$
- $(105, 93.75, 93.75, 90, 180), (105, 93.75, 91.875, 91.875, 180),$
- $(97.5, 97.5, 97.5, 90.9375, 180)$

$\omega$  は非線形関数であるため,  $\omega = 0$  となる

$(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4)$  を直接的に求めることは困難であるが、 $S$  は連結であり、また  $\omega$  は  $S$  上で連続であるため、代わりに、 $\omega > 0$  となる  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) \in S$  と  $\omega < 0$  となる  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) \in S$  が存在すること示すことで  $\omega = 0$  となる  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) \in S$  の存在性を示すことができる (中間値の定理)。これは典型的には、 $\beta_0$  や  $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2$  が  $S$  上で最大になる場合、最小になる場合を計算する等、さまざまな目的関数で最大・最小になる場合を計算することで見つけることができる。実際、Python ライブラリの PuLP を用いて、上記の場合全てに  $\omega < 0$  となる  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) \in S$  と  $\omega > 0$  となる  $(\beta_0, \dots, \beta_4, \gamma_0, \dots, \gamma_4) \in S$  の存在を確認することができた。

次に、 $T$  が表 5 に記載されていないとき、greedy 描画不可能であることを示す方法について考える。そのためにまず、 $\Phi^5$  に含まれるベクトルで、上記表に含まれないの極大なベクトルを列挙すると以下ようになる。

(120, 120, 120, 31.875, 180), (120, 120, 105, 37.5, 180),  
(120, 120, 97.5, 45, 180), (120, 120, 60, 60, 180),  
(120, 105, 105, 45, 180), (120, 105, 91.875, 60, 180),  
(120, 97.5, 97.5, 60, 180), (105, 105, 105, 60, 180),  
(105, 93.75, 91.875, 90.9375, 180), (105, 91.875, 91.875, 91.875, 180),  
(97.5, 97.5, 93.75, 93.75, 180), (97.5, 97.5, 97.5, 90.46875, 180)

したがって、上記表に登場するベクトルの任意の置換  $(\varphi_0, \dots, \varphi_4)$  について、 $S$  上で  $\omega = 0$  にならないことを示せばよい。

まず、 $S$  が空であれば当然  $\omega = 0$  となる  $S$  の要素はないので、 $S$  が空かどうかの判定を行う。 $S$  は線形の不等式で定義されているため、それは線形計画問題の実行不可能性により確認することができる。そこで、Python ライブラリの PuLP で  $S$  に対応する線形計画問題の実行不可能性を計算したところ、 $(\varphi_0, \dots, \varphi_4)$  が以下のような値の場合を除き、 $S$  が空であることが確かめられた (なお、一般性を失わず、 $\varphi_4 = 180$  となる置換のみを考えている)。

(120, 120, 120, 31.875, 180), (105, 120, 120, 37.5, 180),  
(91.875, 120, 105, 60, 180), (60, 120, 91.875, 105, 180),  
(97.5, 97.5, 120, 60, 180), (90.9375, 105, 93.75, 91.875, 180),  
(90.9375, 105, 91.875, 93.75, 180), (90.9375, 93.75, 105, 91.875, 180),  
(90.9375, 91.875, 105, 93.75, 180), (97.5, 97.5, 97.5, 90.46875, 180),  
(45, 120, 120, 97.5, 180), (91.875, 105, 120, 60, 180)

$S$  が空でないときは、別の方法で  $S$  上で  $\omega = 0$  にならないことを示す必要があるが、関数  $\omega$  は非線形であるため、直接的に解がないことを示すことは困難である。そこで、 $B(S)$  を  $S$  を含む最小の集合  $[a_0, b_0] \times \dots \times [a_9, b_9] \subset [0, 180]^{10}$  とし、その上での  $\omega$  の上界・下界を求めることで  $\omega = 0$  とはならないことを示す。なお、 $B(S)$  は  $S$  上で  $\beta_i, \gamma_i$  を

最大化・最小化する問題を解くことで求めることができ、 $(\varphi_0, \dots, \varphi_4)$  が上記ベクトルで与えられるときは、全ての場合で、 $B(S) \subset [0, 90]^{10}$  であることが確かめられる。したがって、 $S$  上の  $\omega$  の値の上界を  $\omega(b_0, \dots, b_4, a_5, \dots, a_9)$ 、下界を  $\omega(a_0, \dots, a_4, b_5, \dots, b_9)$  を計算することで求めることができ、上界・下界ともに正、または負であれば、 $\omega$  が  $S$  上で常に正、または負であることが示され、 $S$  上で  $\omega = 0$  とならないことを示すことができる (図 7 参照)。

Python ライブラリの PuLP で上記のような計算を行ったところ、 $(\varphi_0, \dots, \varphi_4) = (45, 120, 120, 97.5, 180)$ 、 $(91.875, 105, 120, 60, 180)$  以外の場合について greedy 描画不可能性を示すことができた。一方、その 2 つの場合については、この方法では greedy 描画不可能性が示すことができず、この 2 つの場合については、 $S$  の  $B(S)$  による“近似”が粗すぎたものと考えられる。そこで解空間  $S$  を適当に  $S_1, S_2$  に分割し (例えば、 $S$  に  $\beta_i \leq a$  という制約を加えた集合と  $\beta_i \geq a$  を加えた集合にわける)、 $B(S_1) \cup B(S_2)$  をにより  $S$  をより精度よく近似して、 $\omega$  の値の評価を行うこととした。 $\omega$  の値の  $B(S_1), B(S_2)$  上での上界・下界を計算し、 $B(S_1)$  上でも  $B(S_2)$  上でも  $\omega = 0$  とならないことを示すことでその 2 つの場合についても greedy 描画不可能であることを示すことができた (図 8 参照)。以上の計算により、命題 5.2 の証明を行うことができた。

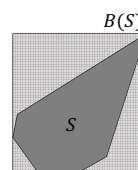


図 7  $S$  と  $B(S)$

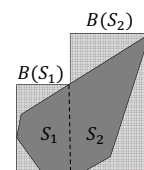


図 8  $S_1, S_2$  と  $B(S_1), B(S_2)$

本節の結果と前節の結果を合わせることで、以下の定理を示すことができる。

**定理 5.3** 木  $T$  が greedy 描画可能である必要十分条件は、 $T$  の最大次数が 5 以下であり、かつ最大次数 4 以下のときは命題 4.1 の条件のいずれか、最大次数 5 のときは、命題 5.1, 5.2 のいずれかの条件を満たすことである。

与えられた木が定理 5.3 に記述された型かどうかは文献 [7] のアルゴリズムで線形時間で調べることができるため、以下のことが示される。

**系 5.4** 任意の木の greedy 描画可能性は頂点数に対して線形時間で判定することが可能である。

#### 参考文献

[1] P. Angelini, G. Di Battista, and F. Frati. Succinct greedy drawings do not always exist. In D. Eppstein and E.

- Gansner, editors, Proc. Graph Drawing (GD' 09), volume 5849 of LNCS, 171–182. Springer, 2010.
- [2] P. Angelini, F. Frati, and L. Grilli. An algorithm to construct greedy drawings of triangulations. *J. Graph Algorithms Appl.*, 14(1):19–51, 2010.
  - [3] G. Di Battista, L. Vismara. Angles of planar triangular graphs. *SIAM J. Discrete Math.* 9(3), 349–359, 1996.
  - [4] R. Kleinberg. Geographic routing using hyperbolic space. In Proc. Computer Communications (INFOCOM' 07), pages 1902–1909. IEEE, 2007.
  - [5] T. Leighton and A. Moitra. Some results on greedy embeddings in metric spaces. *Discrete Comput. Geom.*, 44:686–705, 2010.
  - [6] C. H. Papadimitriou and D. Ratajczak. On a conjecture related to geometric routing. *Theor. Comput. Sci.*, 344(1):3–14, 2005.
  - [7] M. Nöllenburg, R. Prutkin. Euclidean greedy drawings of trees. *Discrete Comput. Geom.* 58(3), 543–579, 2017.
  - [8] A. Rao, S. Ratnasamy, C. Papadimitriou, S. Shenker, and I. Stoica. Geographic routing without location information. In Proc. Mobile Computing and Networking (MobiCom' 03), 96–108. ACM, 2003.
  - [9] R. Tamassia, editor. *Handbook of Graph Drawing and Visualization (Discrete Mathematics and Its Applications)*. Chapman & Hall/CRC, 2007.