

メビウスの反転公式を用いた織物組織図の数え上げ

松浦 勇^{1,a)}

受付日 2020年4月2日, 採録日 2020年8月7日

概要: よこ糸本数 m とたて糸本数 n の関数として織物組織の個数を数える問題を考える. 織物組織 W と W' が等価であるとは, W を単位としてそれを格子状に繰り返して製織される織物の模様と, W' を単位としてそれを格子状に繰り返して製織される織物の模様が, 平行移動で一致する場合をいう. 先行研究では等価組織を含めて数える式が与えられている. また, m と n がともに素数の場合に限って, 等価組織を除外した織物組織の数え上げの式も与えられている. 本論文では, m と n が互いに素な場合に, メビウスの反転公式を用いて, 等価組織を除外した織物組織の個数を与える式を示す.

キーワード: 織物組織図, 数え上げ, 等価組織

Counting Weave Diagrams by Use of the Möbius Inversion Formula

ISAMU MATSUURA^{1,a)}

Received: April 2, 2020, Accepted: August 7, 2020

Abstract: We consider a problem of counting weave diagrams as a function of m weft yarns and n warp yarns. Weave diagrams W and W' are equivalent if a pattern of fabric woven based on W is coincident to that woven based on W' with two-dimensional translation. In preceding researches, a formula that counts the number of weave diagrams including equivalent ones was given. Based on this, a new formula that counts the number of non-equivalent weave diagrams for the case that both m and n are prime numbers has also been given. In this paper, we count the number of non-equivalent weave diagrams using the Möbius inversion formula for the case that m and n are coprime.

Keywords: weave diagram, counting, equivalent weave diagram

1. はじめに

織物はたて糸とよこ糸が交錯して成り立っている. たて糸とよこ糸の交錯の状態は織物組織と呼ばれる. 平織, 綾織, 朱子織は三原組織と呼ばれ, 最も基本的な織物組織であり, これらの織物は身の回りの衣服, 雑貨, インテリア生地に多く使われている. さらに, これらの織物組織を基に, 数多くの織物組織が考案されている. 織物組織のサイズはよこ糸本数 m とたて糸本数 n で表される. 最も小さなサイズの織物組織は平織であり $m = n = 2$ である. 大きなサイズの織物組織は, たとえば, 梨地織の一種であるアムンゼン組織があげられ $m = 40, n = 66$ 程度である.

本論文の目的は, 与えられたよこ糸本数 m とたて糸本数 n で構成される織物組織の個数を数え上げることである. ただし, 等価組織は除外することとする. ここで, 等価組織とは, 織物を製造すると同一の模様となる織物組織のことである.

これまでに, m, n の関数として織物組織の個数を与える数式 [2] が知られているが, この式では等価組織を除外せずに数えている. 等価組織を除外するために, 従来の研究では, 比較的小さな m, n に対して計算機を用いて織物組織を列挙することにより等価組織を除外した織物組織の個数を求めている [3], [4]. これらの研究で対象としている織物組織ではよこ糸 6 本, たて糸 6 本が最大である. 最近, m と n がともに素数の場合に限って, 等価組織を除外した織物組織の個数を与える式が筆者により示されている [5].

本論文の一部は繊維機械学会年次大会で発表されている [1].

¹ あいち産業科学技術総合センター
Aichi Center for Industry and Science Technology, Ichino-miya, Aichi 491-0931, Japan

^{a)} isamu_matsuura@aichi-inst.jp

本論文では、 m と n が互いに素な場合に、メビウスの反転公式を用いて、等価組織を除外した織物組織を数え上げる数式を示す。さらに、実際に $m \leq 9, n \leq 9$ の場合の織物組織の個数を計算した結果を示す。

本論文の構成は次のとおりである。2章で先行研究の概要について解説し、議論に必要ないくつかの定理を示す。3章で織物組織を数え上げる数式を示し、実際に数え上げた結果を示す。4章はまとめである。

2. 準備

2.1 組織図とブール行列

織物における糸の交錯の状態は、通常、たて糸本数、よこ糸本数で表される大きさを1つの単位として、その繰り返り返しとなっている。その最小単位を完全組織と呼ぶ。図1の織物では、黒で示すたて糸3本、白色で示すよこ糸3本からなる完全組織が繰り返されている。

完全組織における糸の交錯の状態は、織物組織図（以下、組織図と呼ぶ）で表現される。たて糸がよこ糸の上を通っている交差点（たて糸浮き）を■で表し、よこ糸がたて糸の上を通っている交差点（よこ糸浮き）を□で表す。組織図は同一織物内でも位置の取り方によって違って見える。これらを本論文では等価組織と呼ぶ（文献[6]では第一種等価組織と呼んでいる）。図1の織物の3通りの等価組織を図2に示す。組織図 D と D' が等価組織であるとすると、 D' は D を2次元的に循環シフトして得られたものになっている（これについては後で詳しく述べる）。

各要素が0または1である行列をブール行列と呼ぶ。本論文では組織図 D をブール行列 W で表す（組織図における■と□をそれぞれ1と0で表す）。また、組織図 D とブール行列 W を同一視することもある。ブール行列において、すべての要素が0である行（列）を0行（0列）と呼ぶ。また、すべての要素が1である行（列）を1行（1列）と呼ぶことにする。0行（0列）と1行（1列）をナル行（ナル列）と呼ぶ。ナル行（ナル列）は、たて糸（よこ糸）と1度も交錯しないよこ糸（たて糸）に対応し、その糸は織物から離れてしまう。よって、組織図はナル行とナル列をどちらも含まない。

2.2 先行研究

m 行 n 列のブール行列で、ナル行とナル列をともに含まないものの集合を B とすると、 $|B|$ を次のようにして求めることができる[2]。 m 行 n 列のすべてのブール行列からなる集合を I とし、このうちナル列とナル行をともに含むブール行列からなる集合を E とする。また、ナル行を含まないブール行列からなる集合を F とし、ナル列を含まないブール行列からなる集合を G とする。このとき、 $I = E \cup F \cup G$ であり、 $B = F \cap G$ である。よって、 $|I| = |E| + |F| + |G| - |B|$ であり、

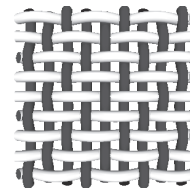


図1 織物における糸の交錯

Fig. 1 Yarn interlacement in woven fabric.

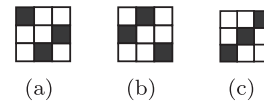


図2 等価組織図

Fig. 2 Equivalent weave diagrams.

$$\begin{aligned} |B| &= |E| + |F| + |G| - |I| \\ &= |E| + (2^n - 2)^m + (2^m - 2)^n - 2^{mn} \end{aligned} \quad (1)$$

である。 $|E|$ は包除原理により次式のように計算される。

$$|E| = 2 \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^m (-1)^{q+r} \frac{n! m!}{q! r! (n-q)! (m-r)!} 2^{(n-q)(m-r)} \quad (2)$$

交錯しないたて糸（0列）を含む場合、交錯しないよこ糸は0行に限られる。同様に、交錯しないたて糸（1列）を含む場合、交錯しないよこ糸は1行に限られる。式(2)右辺先頭の2は、これらの2通りの場合を表している。これ以降、式(1)に m, n を入力して得られた値を $N(m, n)$ と表記する。また、以下では、ナル行とナル列をともに含まない m 行 n 列のブール行列からなる集合を $B_{m \times n}$ と表記する。つまり、 $|B_{m \times n}| = N(m, n)$ である。 $m = n = 4$ の場合に式(1)を計算してみると、 $N(4, 4) = 22,874$ であり、ここから等価組織を除外すると、1,446 となる[6]。

先行研究の中には、比較的小さな m, n に対して等価組織を除外した組織図の個数の近似値を求めているものがある[2]。また、等価組織を除外した組織図の個数を正確に求めるために、手作業または計算機を用いて組織図を列挙する際に等価組織を除外しているものもある[3], [4], [6], [7]。これらの研究の中には、等価組織のみでなく、たとえば、表裏を逆にした織物が等価組織となるなど、他の観点から見ると同一と見なせる組織図を除外しているものもある。文献[4]では、計算機を用いて、よこ糸本数とたて糸本数が等しい場合を対象とし、組織図を列挙し、たて糸本数とよこ糸本数が、ともに2本の場合からともに6本の場合の5通りの、等価組織を除外した組織図の個数を求めている。文献[5]では、 m と n がともに素数の場合の、等価組織を除外した組織図の数え上げを行っている。

本論文では、 m と n が互いに素な場合に、等価組織を除外した組織図の個数を数える式を与える。具体的には、等価組織を除外して完全組織のみを数える式と、完全組織の

みでなく、組織図がより小さな組織図を繰り返して構成されている組織を含めて数える式を与える。

2.3 整数の合同

整数全体の集合を \mathbb{Z} と書く。 $a, b \in \mathbb{Z}$ について $b = ac$ となる $c \in \mathbb{Z}$ が存在するとき、 a は b を割り切る、あるいは整除するといひ、 $a|b$ で表す。このとき、 a は b の約数であるという。 a, b を整数とする。整数 c が、 $c|a, c|b$ を満たすとき c を a, b の公約数と呼ぶ。公約数の中で最大のものを最大公約数という。 a, b の最大公約数を $\gcd(a, b)$ と表す。 a, b について $\gcd(a, b) = 1$ のとき、 a, b は互いに素であるという。1でない正整数 p が1と p 以外に正の約数をもたないとき、 p は素数と呼ばれる。次の定理はユークリッドの定理と呼ばれる [8]。

定理 2.1 $a, b \in \mathbb{Z} (a \neq 0)$ について $b = qa + r (0 \leq r < |a|)$ と書けるような $q, r \in \mathbb{Z}$ がただ1組存在する。

定理 2.1 での q を、 b を a で割ったときの商といひ、 r を余りといひ。整数 a, b について $m|a-b$ なるとき、 a は b に m を法として (modulo m で) 合同であるといひ、 $a \equiv b \pmod{m}$ と書く。 a を m で割ったときの余りを r とすると $a \equiv r \pmod{m}$ である。このことを $r = a \bmod m$ と書くこともある。関数 $f(x)$ に対し、総和記号 \sum を使い次のように表記した場合、 n のすべての約数 d を x に代入したときの総和を表す。

$$\sum_{d|n} f(d)$$

たとえば、 $n = 4$ のとき、 $\sum_{d|4} f(d) = f(1) + f(2) + f(4)$ である。

2.4 メビウスの反転公式

次の関数をメビウス関数といひ [9]。

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ の場合} \\ 0 & n \text{ が素数の平方で割り切れる場合} \\ (-1)^k & n \text{ が } k \text{ 個の相異なる素数の積に等しい場合} \end{cases}$$

たとえば、 $\mu(2) = (-1)^1 = -1, \mu(3) = (-1)^1 = -1, \mu(4) = \mu(2 \cdot 2) = 0, \mu(5) = (-1)^1 = -1, \mu(6) = \mu(2 \cdot 3) = (-1)^2 = 1$ である。また、次の定理の式はメビウスの反転公式と呼ばれる。

定理 2.2 1 からある n までの自然数に対して定義された関数 $f(x), g(x)$ があって

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \tag{3}$$

ならば

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d) \tag{4}$$

が成立する。

2.5 オイラー関数

m を正整数とする。 m 以下の正整数で m と互いに素な整数の個数を $\varphi(m)$ と書く。たとえば、 $\varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2$ である。次の定理が知られている [9]。

定理 2.3

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d) \tag{5}$$

この式にメビウスの反転公式を適用すると

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d \tag{6}$$

を得る。

2.6 循環シフト

ベクトルの循環シフトとは、ベクトルの要素を格納した1次元の配列において、配列の要素を、与えられたシフト量だけ一方にシフトし、配列からあふれた要素を、シフトの方向と反対側に発生した空きの配列に格納する操作である。 n 次元ベクトル u の第 i ($0 \leq i \leq n-1$) 要素を u_i と書く。ベクトル u に対し、 t 要素分の循環シフトをしたベクトルを u^t と書くと、 $u_i^t = u_{(t+i) \bmod n}$ である。 u が行ベクトルの場合には、 u^t は t 要素分だけ左方向に循環シフトした行ベクトルとなり、 u が列ベクトルの場合には、 u^s は s 要素分だけ上方向に循環シフトした列ベクトルとなる。

次にベクトルの循環シフトを行列の循環シフトに拡張する。 m 行 n 列のブール行列 W を考える (列は左から順に第0列, ..., 第 $n-1$ 列とし、行は上から順に第0行, ..., 第 $m-1$ 行とする)。2つの数 s ($0 \leq s \leq m-1$), t ($0 \leq t \leq n-1$) に対しブール行列 W を“シフト量 (s, t) だけ循環シフト”する。つまり、ブール行列 W の各列をそれぞれ s 要素分だけ上方向に循環シフトし、次に、結果の行列の各行をそれぞれ t 要素分だけ左方向に循環シフトする。このように行列 W を (s, t) 循環シフトした行列を $W^{(s,t)}$ と表記する。このとき、 W の (s, t) 要素は $W^{(s,t)}$ の $(0, 0)$ 要素になる。

m 行 n 列のブール行列 W を格子状 (上下左右) に繰り返した行列 W もまた m' 行 n' 列のブール行列と見なすことができる ($m' \gg m, n' \gg n$)。 $s' \geq m$ または $t' \geq n$ である (s', t') に対し W の (s', t') 要素を $(0, 0)$ 要素とする m 行 n 列の行列 (W の小行列) は、 W をシフト量 $(s' \bmod m, t' \bmod n)$ で循環シフトした行列 $W^{(s' \bmod m, t' \bmod n)}$ に等しい。これ以降、ブール行列 W に対してシフト量 (s, t) ($0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1$) で k 回循環シフトした行列を $W^{(ks, kt)}$ と表した場合、それは W をシフト量 $(ks \bmod m, kt \bmod n)$ で循環シフトした

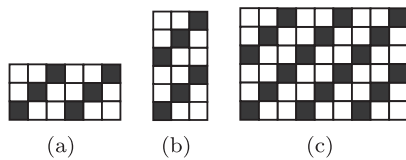


図 3 同一の小行列の繰り返しである組織図の例

Fig. 3 Examples of weave diagrams that are repetition of the same sub-matrix.

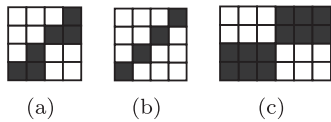


図 4 行列の循環シフトによりもとの組織図と一致する例

Fig. 4 Examples of weave diagrams that are coincident to the original one by cyclic shifts for matrix.

行列を表すこととする。

文献 [5] では次の補題が示されている。

補題 2.1 W, V を m 行 n 列のブール行列とする。 W と V が等価組織であることと、ある整数 s ($0 \leq s \leq m-1$) と t ($0 \leq t \leq n-1$) が存在し、 $V = W^{(s,t)}$ であることは同等である。

m 行 n 列のブール行列 W が “同一の小行列の繰り返しである” とは、 $k|m, l|n$ なる k, l ($1 < kl < mn$) と k 行 l 列のブール行列 W' が存在し、 W の (i, j) 要素が W' の $(i \bmod k, j \bmod l)$ 要素に等しい場合をいう。 また、 $k = m$ で $l < n$ のとき、 W は “行方向に周期的である” ともいう。 このとき、 W の周期は l である。 また、 $k < m$ で $l = n$ のとき、 W は “列方向に周期的である” ともいう。 このとき、 W の周期は k である。 同一の小行列の繰り返しである組織図の例を図 3 に示す。 同図 (a) は行方向に周期的な例であり、同図 (b) は列方向に周期的な例である。 同図 (c) は行方向と列方向に周期的な例である。 2.1 節で述べた完全組織とはその組織図が、同一の小行列の繰り返しでないことを意味する。

以下では、 $W^{(s,t)} = W$ となるシフト量 (s, t) が存在する組織図 W を扱う。 そのような例を図 4 に示す。 同図 (a) の場合、 $W^{(2,2)} = W$ である。 同図 (b) の場合、 $W^{(1,3)} = W^{(2,2)} = W^{(3,1)} = W$ である。 同図 (c) では $W^{(2,3)} = W$ である。 文献 [5] では、次の補題が示されている。

補題 2.2 W を m 行 n 列のブール行列とする。 $W = W^{(0,t)}$ であるシフト量 $(0, t)$ ($1 \leq t \leq n-1$) が存在するとする。 このような t が複数存在する場合には最小の t を考える。 このとき、 $t|n$ であり、ブール行列 W は、 m 行 t 列の同一の小行列の繰り返しである。 つまり、 W は行方向に周期的であり、その周期は t である。 n を t で割った商を q とすると、 $W = W^{(0,t)} = W^{(0,2t)} = \dots = W^{(0,(q-1)t)}$ である。 また、 $W = W^{(s,0)}$ であるシフト量 $(s, 0)$ ($1 \leq s \leq m-1$) が

存在するとする。 このような s が複数存在する場合には最小の s を考える。 このとき、 $s|m$ であり、ブール行列 W は、 s 行 n 列の同一の小行列から構成されている。 つまり、 W は列方向に周期的であり、その周期は s である。 m を s で割った商を q' とすると、 $W = W^{(s,0)} = W^{(2s,0)} = \dots = W^{((q'-1)s,0)}$ である。

次章での議論に備えて 1 つの補題を示す。

補題 2.3 正整数 m, n が互いに素とし、 W を m 行 n 列のブール行列とする。 $W = W^{(s,t)}$ であるシフト量 (s, t) ($0 < s \leq m-1, 0 < t \leq n-1$) が存在するとする。 このとき、 W は行方向および列方向に周期的である。

【証明】 $W = W^{(s,t)}$ であるため、 $W^{(s,t)}$ をさらにシフト量 (s, t) で循環シフトした $W^{(2s,2t)}$ もまた W に等しい。 これを繰り返すと $W^{(ms,mt)}$ もまた W に等しいことが分かる。 $ms \bmod m$ を考えると、これは 0 である。 次に、 $r = mt \bmod n$ とすると、 m と n は互いに素であり、 $1 \leq t \leq m-1$ であるため、 $r \neq 0$ である。 そのため、 $W^{(0,r)} = W$ ($r \neq 0$) である。 よって、補題 2.2 より、 W は行方向に周期的である。 同様の議論により W が列方向に周期的であることも示すことができる。 ■

補題 2.3 より m と n が互いに素ならば、 W が行方向にも列方向にも周期的でない場合には、 $W (= W^{(0,0)})$ と、 W の等価組織 $W^{(i,j)}$ ($0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1$) から $W^{(0,0)}$ を除いた $mn-1$ 個の等価組織とは異なる。 任意の i ($0 \leq i \leq m-1$)、 j ($0 \leq j \leq n-1$) に対し、 $W^{(i,j)}$ を改めて W とすることで、この議論を適用できる。 つまり、 W の mn 個の等価組織はすべて互いに異なる。

3. 等価組織を除外した織物組織図の数え上げ

本章では、 m と n が互いに素な場合に、 m 行 n 列の組織図の集合 $\mathcal{B}_{m \times n}$ の中から等価組織を除外した組織図の集合のサイズ $N^*(m, n)$ を与える数式を示す。 そのために、まず $\mathcal{B}_{m \times n}$ の要素で同一の小行列の繰り返しでない組織図 (つまり完全組織) の集合のサイズ $N_c(m, n)$ を与える式を示す。 次に、完全組織の集合から等価組織を除外した集合のサイズ $N_c^*(m, n)$ を与える式を示す。 最後に、 $N^*(m, n)$ を与える式を示す。 議論を簡単にするために、まず m が素数の場合を考える。

3.1 m が素数で n が合成数の場合

m が素数なので、 W が周期的であるとすると、 W は行方向にのみ周期的である。 W が周期的でない場合、前章の議論により、 W の mn 個の等価組織はすべて互いに異なる。

3.1.1 $N_c(m, n)$ と $N_c^*(m, n)$ の計算

n のすべての約数を小さい順に並べたものを、 $d_1 (= 1)$, $d_2, \dots, d_k (= n)$ とする。 m 行 n 列の組織図の集合 $\mathcal{B}_{m \times n}$ は、シフト量 $(0, d_1)$ で循環シフトして初めて W 自身と

表 1 よこ糸本数 m , たて糸本数 n の場合の $N_c^*(m, n)$ と $N^*(m, n)$

Table 1 The number of non-equivalent complete weave diagrams $N_c^*(m, n)$, and the number of non-equivalent weave diagrams $N^*(m, n)$ for m weft yarns and n warp yarns.

m	n	$N_c^*(m, n)$	$N^*(m, n)$
2	9	28	29
3	4	75	76
	8	68,370	68,446
5	4	20,889	20,892
	6	20,747,573	20,748,010
	8	15,772,936,770	15,772,957,662
	9	428,934,260,888	428,934,261,322
4	9	565,044,060	565,044,164
8	9	59,234,277,007,085,234,460	59,234,277,007,650,346,994

一致するもの、シフト量 $(0, d_2)$ で循環シフトして初めて W 自身と一致するものというふうに、 k 個の集合 $\mathcal{S}_i = \{W \in \mathcal{B}_{m \times n} | W = W^{(0, d_i)}, W \neq W^{(0, d_{i'})} \text{ for } 1 \leq i' < i\}$ ($1 \leq i \leq k$) に分割することができる。 $W \in \mathcal{S}_i$ は m 行 d_i 列の小行列を右方向に n/d_i 回繰り返した組織図である。よって、 $|\mathcal{S}_i| = N_c(m, d_i)$ である。これより

$$N(m, n) = \sum_{i=1}^k |\mathcal{S}_i| = \sum_{d|n} N_c(m, d) \tag{7}$$

と表すことができる。メビウスの反転公式により

$$N_c(m, n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) N(m, d) \tag{8}$$

が成り立つ。 $N_c(m, n)$ は集合 \mathcal{S}_k のサイズであり、本節冒頭の議論により、 $W \in \mathcal{S}_k$ の mn 個の等価組織はすべて互いに異なるため、等価組織を除外した組織図の個数は

$$N_c^*(m, n) = \frac{1}{mn} N_c(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) N(m, d) \tag{9}$$

である。いくつかの m, n に対して $N_c^*(m, n)$ を計算した結果を表 1 上段左部に示す。

3.1.2 $N^*(m, n)$ の計算

次に $N^*(m, n)$ を求める。 \mathcal{S}_i から等価組織を除外した集合のサイズは $N_c^*(m, d_i)$ なので、

$$N^*(m, n) = \sum_{i=1}^k N_c^*(m, d_i) = \sum_{d|n} N_c^*(m, d) \tag{10}$$

である。 m と n が互いに素であるので、 m と n の約数である d もまた互いに素である。よって、右辺に式 (9) を適

用して次式を得る。

$$N^*(m, n) = \sum_{d|n} N_c^*(m, d) = \sum_{d|n} \frac{1}{md} N_c(m, d) = \sum_{d|n} \frac{1}{md} \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) N(m, d') \tag{11}$$

式 (6) で d と n/d を置き換えることができるので、

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} \tag{12}$$

である。よって、

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} \tag{13}$$

となる。これを用いて式 (11) をさらに、次のように変形する。なお、この変形において、加算の順序を変更することにより第 1 行目から第 2 行目の変形を行っている。

$$N^*(m, n) = \sum_{d|n} \frac{1}{md} \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) N(m, d') = \sum_{d|n} \frac{1}{m} \sum_{d'|\frac{n}{d}} \frac{\mu(d')}{dd'} N(m, d) = \sum_{d|n} \frac{N(m, d)}{md} \sum_{d'|\frac{n}{d}} \frac{\mu(d')}{d'} = \sum_{d|n} \frac{N(m, d)}{md} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{n}{d}\right)}{\frac{n}{d}} = \frac{1}{mn} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) N(m, d) \tag{14}$$

いくつかの m, n に対して $N^*(m, n)$ を計算した結果を表 1 上段右部に示す。

3.2 m と n がともに合成数の場合

前節の議論は m と n が互いに素であれば、 m が素数でなくても適用できる。式 (8) で得られる $N_c(m, n)$ の値は S_k のサイズであるが、 m が素数でない場合、 S_k は行方向に周期的でない組織図の集合になる。ただし、列方向に周期的な組織図は含まれる。 m のすべての約数を小さい順に並べたものを、 $e_1 (= 1), e_2, \dots, e_l (= m)$ とする。前節と同様に、 S_k を集合 $S_{k,1}, S_{k,2}, \dots, S_{k,l}$ に分割し、 $S_{k,i}$ のサイズを表す変数 $N'_c(e_i, n)$ を導入する。

3.2.1 $N'_c(m, n)$ と $N_c^*(m, n)$ の計算

$N'_c(e_i, n)$ は行方向には周期的ではないが、列方向には周期 e_i で周期的な組織図の集合のサイズである。ただし、 $N'_c(m, n)$ のみ周期的でない。 $W \in S_{k,i}$ は行方向に周期的でない e_i 行 n 列の小行列を下方向に m/e_i 回繰り返した組織図である。よって、

$$\begin{aligned} N_c(m, n) &= \sum_{i=1}^l |S_{k,i}| \\ &= \sum_{e|m} N'_c(e, n) \end{aligned} \quad (15)$$

と表すことができる。メビウスの反転公式により

$$N'_c(m, n) = \sum_{e|m} \mu\left(\frac{m}{e}\right) N_c(e, n) \quad (16)$$

となる。 $N_c(e, n)$ は式 (8) で計算されるので、

$$\begin{aligned} |S_{k,l}| &= N'_c(m, n) \\ &= \sum_{e|m} \mu\left(\frac{m}{e}\right) \left(\sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) N(e, d) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

が成り立つ。前節の議論と同様に $N'_c(m, n)$ に数えられる W の mn 個の等価組織はすべて互いに異なるため、等価組織を除外した組織図の個数は次式で表される。

$$\begin{aligned} N_c^*(m, n) &= \frac{1}{mn} N'_c(m, n) \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{e|m} \mu\left(\frac{m}{e}\right) \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) N(e, d) \end{aligned} \quad (18)$$

定理 3.1 m と n が互いに素なとき、よこ糸本数 m 、たて糸本数 n の等価組織を除外した完全組織の個数は

$$N_c^*(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{e|m} \mu\left(\frac{m}{e}\right) \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) N(e, d) \quad (19)$$

である。

$(m, n) = (4, 9)$ と $(8, 9)$ の 2 つの場合に、 $N_c^*(m, n)$ を計算した結果を表 1 下段左部に示す。

3.2.2 $N^*(m, n)$ の計算

次に、集合 $\mathcal{B}_{m \times n}$ から等価組織を除外した集合のサイズ $N^*(m, n)$ を求める。 n の約数を k 個、 m の約数を l 個とすると、前項での議論と同様に $S_{i,j}$ ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$) か

ら等価組織を除外した集合のサイズは $N_c^*(e_j, d_i)$ なので、

$$N^*(m, n) = \sum_{e|m} \sum_{d|n} N_c^*(e, d) \quad (20)$$

である。 m と n が互いに素であるので、 m の約数 e と n の約数 d もまた互いに素である。よって、右辺に式 (18) を適用できる。

$$\begin{aligned} N^*(m, n) &= \sum_{e|m} \sum_{d|n} N_c^*(e, d) \\ &= \sum_{e|m} \sum_{d|n} \frac{1}{ed} N'_c(e, d) \\ &= \sum_{e|m} \sum_{d|n} \frac{1}{ed} \sum_{e'|e} \mu\left(\frac{e}{e'}\right) \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) N(e', d') \end{aligned} \quad (21)$$

この式を式 (14) と同様に変形し、

$$\begin{aligned} N^*(m, n) &= \sum_{e|m} \sum_{d|n} \frac{1}{ed} \sum_{e'|e} \mu\left(\frac{e}{e'}\right) \sum_{d'|d} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) N(e', d') \\ &= \sum_{e|m} \sum_{d|n} \frac{1}{en} \sum_{e'|e} \mu\left(\frac{e}{e'}\right) \varphi\left(\frac{n}{d}\right) N(e', d) \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{e|m} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{m}{e}\right) \varphi\left(\frac{n}{d}\right) N(e, d) \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。

定理 3.2 m と n が互いに素なとき、よこ糸本数 m 、たて糸本数 n の等価組織を除外した織物組織の個数は

$$N^*(m, n) = \frac{1}{mn} \sum_{e|m} \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{m}{e}\right) \varphi\left(\frac{n}{d}\right) N(e, d) \quad (23)$$

である。

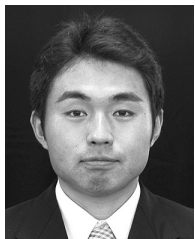
$(m, n) = (4, 9)$ と $(8, 9)$ の 2 つの場合に、 $N^*(m, n)$ を計算した結果を表 1 下段右部に示す。

4. まとめ

本論文では、よこ糸本数 m とたて糸本数 n が互いに素な場合の等価組織を除外した織物組織図 W を数え上げる数式を、メビウスの反転公式を用いて示すことができた。その理由は、 m が素数で n が合成数の場合には、組織図 W を (s, t) ($0 \leq s < m, 0 \leq t < n, s + t \geq 1$) だけ循環シフトした $W^{(s,t)} = W$ となるのが W が行方向に周期的な場合に限られるためであった。 m と n がともに合成数の場合にも、この考え方を列方向に拡張して等価組織を除外した組織図を数え上げることができた。しかし、 m と n が互いに素でない場合には、この方法は適用できず新たな解法が必要になると思われる。今後の課題は、たて糸本数とよこ糸本数が互いに素な場合に限らない、一般の場合の等価組織を除外した組織図の個数を与える数式について考察することである。

参考文献

- [1] 松浦 勇：メビウスの反転公式を用いた織物組織図の数え上げ，第 73 回繊維機械学会年次大会要旨集，pp.97–98 (2020).
- [2] Gu, P. and Greenwood, K.: The Scope for Fabric Engineering of the Weave, *Journal of Textile Institute*, Vol.77, No.2, pp.88–103 (1986).
- [3] Dawson, R.M.: Enumeration and Identification by Elimination of Weave Families of Given Repeat Size, *Textile Research Journal*, Vol.70, No.4, pp.304–310 (2000).
- [4] Yordzhev, K. and Kostadinova, H.: Mathematical Modeling in the Textile Industry, *Bulletin of Mathematical Sciences and Applications*, Vol.1, No.1, pp.20–35 (2012).
- [5] 松浦 勇：等価組織を除外した織物組織図の数え上げ-たて糸本数とよこ糸本数がともに素数の場合，情報処理学会論文誌，Vol.60, No.4, pp.1088–1096 (2019).
- [6] 高寺政行，篠原 昭：織物組織に関する研究 (3) 4 枚組織の数学的性質，繊維学会昭和 61 年度年次大会研究発表会講演要旨集，p.194 (1986).
- [7] 呉 祐吉，松橋房江，篠原 昭：織物組織に関する基礎的研究第 2 報織物組織の正則と不規則，繊維学会誌，Vol.17, No.10, pp.989–993 (1961).
- [8] 渡辺 豊：初歩からの数論，牧野書店 (2011).
- [9] 高木貞治：初等整数論講義第 2 版，共立出版 (1971).



松浦 勇 (正会員)

昭和 49 年生。平成 11 年名古屋大学工学研究科電子機械工学専攻修士課程修了。平成 13 年愛知県庁入庁。平成 21 年名古屋大学情報科学研究科計算機数理科学専攻満期退学。現在，あいち産業科学技術総合センター勤務。博士 (情報科学)。

士 (情報科学)。