

温度効果に基づくイジング計算機における埋込アルゴリズム

白井 達彦^{1,a)} 田中 宗^{2,3,b)} 戸川 望^{1,c)}

概要: 温度効果を用いたイジング計算機において、新しいタイプの埋込アルゴリズムを提案する。イジング計算機は組合せ最適化問題を高効率・高速に解法するソルバーとして注目されている。多くの組合せ最適化問題は、論理イジング模型の基底状態（最低エネルギー状態）を求める問題にマップされる。イジング計算機におけるスピン間の結合に制約がある時、論理イジング模型をイジング計算機のアーキテクチャによって定まる物理イジング模型に埋込む必要がある。我々は、統計物理の理論的アプローチによって、新しいタイプの埋込みアルゴリズムを導出した。そして、様々なベンチマーキング問題を定義し、その問題に対して、シミュレーテッドアニーリングを用いて、提案埋込み手法と既存埋込み手法との間の性能比較を行なった。その結果について報告する。

1. はじめに

組合せ最適化問題は、制約条件の下で目的関数の最小値もしくは最大値を与える決定変数の組合せを求める問題である。決定変数の数に従い、探索空間が指数的に増大するため、多くの問題が NP 困難もしくは NP 完全なクラスに属する。組合せ最適化問題の典型的な例としては、巡回セールスマン問題やナップサック問題がある。一方で、シフト計画などといった社会一般で生じる問題にも組合せ最適化問題が内在しており、組合せ最適化問題を効率良く解法するソルバーの開発は広く重要な課題である。

イジング計算機は、組合せ最適化問題を高効率かつ高速に解法するソルバーとして注目されている [1–12]。イジング計算機で組合せ最適化問題を解法する上で三つの段階がある。第一段階では、組合せ最適化問題をイジング問題として定式化する。イジング問題とは論理イジング模型の基底状態（最低エネルギー状態）を求める問題である。イジング模型は $+1$ と -1 の値を取り得るスピンによって構成される。論理イジング模型は頂点集合と辺集合からなる無向グラフ上で定義され、辺による頂点間の結合に関して制限は無い。組合せ最適化問題における目的関数や制約条件は論理イジング模型の形に表現される [13–15]。第二段階では、第一段階で定式化された論理イジング模型を、イジング計算機のアーキテクチャによって定まる物理イジング

模型にマップする。ここで物理イジング模型は、遠くに存在するスピン間を結合することの困難さなどによって生じる物理的な要因から、しばしば頂点間の辺の結合の仕方に制限のある無向グラフ上に与えられる。こうしたスピン間の結合の仕方に制限のある物理イジング模型へ論理イジング模型をマップすることを埋込みと呼ぶ [16]。埋込みは、CMOS (Complementary Metal Oxide Semiconductor) アニーリングマシン [3,8] や D-Wave マシン [1,2] といったイジング計算機で必要となる。埋込みにおいて、論理イジング模型の一つのスピンは、物理イジング模型の複数のスピンの集合をチェーンと呼ぶ。第三段階では、イジング計算機の動作原理に基づいて、物理イジング模型の基底状態の探索が行われる。

本稿では埋込みに焦点を当てる。埋込みのタイプは、チェーン内のスピン数の取り方に応じて、二つのタイプに分類される。第一のタイプでは、チェーン内のスピン数が全てのチェーンで等しくなるように取られる。このタイプの埋込みは、全結合の論理イジング模型を物理イジング模型にマップすることが可能であるため、クリーク埋込みや全結合埋込みと呼ばれる。これまでに、埋込みのためのアルゴリズムが、CMOS アニーリングマシン [17]、D-Wave マシン [18–20] に対して開発されてきた。第二のタイプでは、各チェーンでスピン数が異なっている。このタイプでは、第一のタイプと比較して、埋込みに必要となるスピン数が小さくなるため、スピン数のより多い論理イジング模型を解法することが可能となる。このタイプの埋込みを行なうためのヒューリスティックなアルゴリズムが、これまでに開発されている [21–27]。第一・第二の埋込みにおい

¹ 早稲田大学 基幹理工学部 情報通信学科

² 慶應義塾大学 理工学部 物理情報工学科

³ 早稲田大学 グリーン・コンピューティング・システム研究機構

a) tatsuhiko.shirai@aoni.waseda.jp

b) shu.tanaka@appi.keio.ac.jp

c) ntogawa@waseda.jp

表 1 各種埋込み手法の比較

	チェーンの長さ	チェーン内相互作用
等長・等相互作用	一樣	一樣
不等長・等相互作用	非一樣	一樣
不等長・不等相互作用 (提案埋込み手法)	非一樣	非一樣

て、チェーン内の相互作用の強さをチェーンごとに変調することは可能であるが、従来研究では一樣に設定されている。ここでは、第一のタイプの埋込みを等長・等相互作用埋込み、第二のタイプの埋込みを不等長・等相互作用埋込みと呼ぶ。

我々は、これら二つタイプの既存埋込みとは異なる、新しいタイプの埋込みを提案する。提案する埋込み手法では、第二のタイプと同様にチェーンの長さ（チェーン内のスピン数）を非一樣にとり、チェーン内の相互作用の強さをチェーンの長さによって定める。チェーン内の相互作用の強さとチェーンの長さとの間には、統計物理の議論によって導出される関係が成り立つ。この関係式では、チェーン内の相互作用の強さはチェーンの長さに応じて大きくなるように与えられる。このタイプの埋込みを不等長・不等相互作用埋込みと呼ぶ。これまでに紹介した三つの埋込み手法を表 1 にまとめた。

イジング計算機の動作原理の一つであるシミュレーテッドアニーリングの方法 [28–30] を用いて、三つの埋込み手法の性能比較を行なう。シミュレーテッドアニーリングは温度効果を用いたアニーリング手法である。我々は、タイプの異なる四つのベンチマーキング問題を作成し、提案埋込み手法と既存埋込み手法との間の性能比較を行なうことによって、提案埋込み手法の有効性を明らかにした。

本稿の構成は、次のように与える。第二章では、埋込みの導入を行ない、埋込みにおいてチェーン内の相互作用の強さとチェーンの長さを変調することのできる物理イジング模型を説明する。そして、二つの既存埋込み手法に加えて、新しいタイプの埋込み手法を説明する。第三章では、数値実験のセットアップについて説明する。この章では、ベンチマーキング問題や数値シミュレーションの詳細について説明する。第四章では、数値結果について紹介する。第五章では、議論と結論を述べる。

2. 埋込み手法

この章では、埋込み手法について説明する。まず埋込み手法の導入を行なう。次に、チェーン内の相互作用とチェーンの長さを系統的に変えることのできる物理イジング模型を導入する。最後に、提案手法である不等長・不等相互作用埋込み手法を、既存手法である等長・等相互作用埋込み手法および不等長・等相互作用埋込み手法とともに紹介する。

2.1 導入

埋込みは論理イジング模型から物理イジング模型へのマッピングである。以下では、論理イジングモデルに記号 L を物理イジングモデルに記号 P を用いる。

論理イジング模型は頂点集合 V_L と辺集合 E_L で与えられる無向グラフ $G_L = (V_L, E_L)$ 上で定義される。ここで、 G_L を論理グラフと呼ぶ。論理イジング模型のハミルトニアンは、

$$H_L(\{\sigma_i\}) = - \sum_{(i,j) \in E_L} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_{i \in V_L} h_i \sigma_i \quad (1)$$

によって与えられる。ここで、 σ_i は $+1$ もしくは -1 の値を取り、論理スピンと呼ぶ。論理スピン σ_i と σ_j 間の相互作用を J_{ij} で、論理スピン σ_i に働くバイアスを h_i で表す。また、 $J_{ij} > 0$ の時を強磁性相互作用と呼び、 $J_{ij} < 0$ の時を反強磁性相互作用と呼ぶ。

物理イジング模型は、論理イジング模型と同様にして、無向グラフ $G_P = (V_P, E_P)$ 上で定義される。ここで、 G_P を物理グラフと呼ぶ。物理グラフはイジング計算機のアーキテクチャによって決まり、一般に、各頂点の次数には上限が存在する。例えば、D-Wave マシンは Chimera グラフで次数 6 [2]、Pegasus グラフで次数 15 [31]、そして CMOS アニーリングマシンは次数 5 (第一世代) [3]、King グラフで次数 8 (第二世代) [8] である。スピン間の結合に生じる制限のため、必ずしも、論理グラフは物理グラフのサブグラフとならない。

埋込みは、 G_L が G_P のサブグラフでない場合についても、 G_L を G_P 上で表現することを可能にする。埋込みにおいて、論理グラフの頂点 $i \in V_L$ は、物理グラフの複数の頂点集合 $\phi(i) \subset V_P$ にマップされる。ここで写像 $\phi: V_L \rightarrow V_P$ は以下の 3 つの性質を満たす。

1. 各頂点 $i \in V_L$ に対し、 $\phi(i)$ は辺によって連結している。ここで、連結したスピンの集合をチェーンと呼ぶ。
2. 集合 V_L に属する頂点 $i, j (i \neq j)$ に対して、 $\phi(i) \cap \phi(j) = \emptyset$ (空集合)
3. 各辺 $(i, j) \in E_L$ に対し、物理グラフに対応する辺が存在する。つまり、 $k \in \phi(i)$ と $l \in \phi(j)$ に対し、 $(k, l) \in E_P$ が存在する。

チェーン内の物理スピンは、強磁性相互作用によって結合する。強磁性相互作用の大きさが十分に大きな時、チェーン内の頂点と辺を一つの対応する論理スピンに縮約することによって、論理イジング模型の基底状態と物理イジング模型の基底状態との間に 1 対 1 の対応関係が存在する。つまり、論理イジング模型の基底状態を物理イジング模型の基底状態を求めることによって得ることが可能となる。

2.2 物理イジング模型

ここでは、チェーン内の相互作用とチェーンの長さを

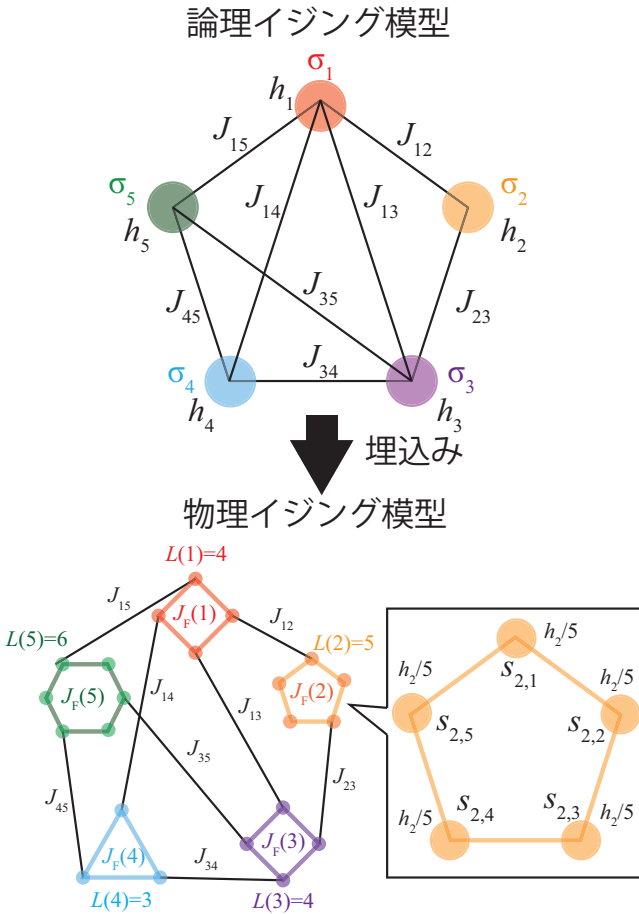


図 1 論理イジング模型から物理イジング模型へのマッピングの例。
上図：5 個の論理スピンからなる論理イジング模型を表す。論理イジング模型における相互作用の強さとバイアスの強さを $\{J_{ij}\}$ と $\{h_i\}$ で表す。下図：埋込みによってマップされた物理イジング模型を表す。各論理スピン σ_i は、長さ $L(i)$ と相互作用の強さ $J_F(i)$ で特徴付けられるリングにマップされる。物理スピンは $s_{i,j}$ で表され、ここで i は対応する論理スピンのラベルを与え、 j は 1 から $L(i)$ までの値をとる。この物理イジング模型を用いることで、リングの長さ $L(i)$ とリング内の相互作用の強さ $J_F(i)$ とを系統的に変化させることができる。

系統的に変えることの出来る物理イジング模型を与える (図 1)。図 1 (上) は、5 個の論理スピンからなる論理イジング模型を表す。論理スピン i と j はその間に辺が存在する場合、 J_{ij} の強さでお互いに相互作用し、論理スピン i には、 h_i の強さのバイアスが働く。論理イジング模型は図 1 (下) で表される物理イジング模型にマップされる。ここで、解析の簡単化のため、チェーンとしてリングの形を仮定した。各論理スピン $i \in V_L$ は、長さ $L(i)$ のリングにマップされ、リング内のスピンは相互作用 $J_F(i)$ の強さで相互作用する。物理イジング模型のハミルトニアンは、

$$H_P(s_{i,j}) = - \sum_{(i,j) \in E_L} J_{ij} s_{i,v_i(j)} s_{j,v_j(i)} - \sum_{i \in V_L} \frac{h_i}{L(i)} \sum_{k=1}^{L(i)} s_{i,k} - \sum_{i \in V_L} J_F(i) \sum_{k=1}^{L(i)} s_{i,k} s_{i,k+1} \quad (2)$$

で与えられる。ここで $s_{i,j}$ は -1 もしくは $+1$ の値を取り、リング $\phi(i)$ の j 番目の物理スピンを表す。周期境界条件 $s_{i,L(i)+1} = s_{i,1}$ を課す。リング $\phi(i)$ の物理スピンとリング $\phi(j)$ の物理スピンとの間に相互作用 J_{ij} が作用しており、 $v_i(j)$ はそのリング $\phi(i)$ の物理スピンを表す。この物理グラフにおいて、各頂点の最大次数を 3 とした。つまり、各物理スピンは他のリングに属するスピンと高々 1 つとしか相互作用することができない。また、リング内の物理スピにかかるバイアスの強さは一定とした。

2.3 2つの既存埋込み手法と提案埋込み手法

ここでは、これまでに説明した物理イジング模型を用いて、リングの長さやリング内の相互作用の取り方の異なる 3 つの埋め込み手法を説明する。

1. 等長・等相互作用埋込み手法 (既存手法)

この埋込み手法では、全てのリングに対して、リングの長さおよび相互作用の強さを一定にとる。リングの長さは、各論理スピンの最大結合数である $N_L - 1$ とする。つまり、

$$L(i) = N_L - 1. \quad (3)$$

また、

$$v_i(j) = \begin{cases} j & \text{if } i > j \\ j - 1 & \text{if } i < j \end{cases}$$

とする。この埋込み手法は、論理イジング模型が全結合である場合にも埋込むことが出来るので、クリーク埋込みに対応する。リング内の相互作用の強さとして、

$$J_F(i) = J_c \quad (4)$$

とする。ここで、 J_c はハイパーパラメタである。

2. 等長・不等相互作用埋込み手法 (既存手法)

このタイプの埋込みでは、物理イジング模型におけるスピンの数が最小となるように与える。この場合、リング $\phi(i)$ に含まれるスピン数は、与えられた論理イジング模型の次数 k_i によって与えられる。つまり、

$$L(i) = k_i. \quad (5)$$

リング内の相互作用の強さは、等長・等相互作用埋込み手

法と同様に一定にとる。つまり、

$$J_F(i) = J_c \quad (6)$$

3. 不等長・不等相互作用埋込み手法（提案手法）

この埋込み手法ではリングの長さに応じて、リング内の相互作用を変える。リングの長さは、等長・不等相互作用埋込み手法と同じにとる。つまり、

$$L(i) = k_i. \quad (7)$$

リング内相互作用は、

$$J_F(i) = \frac{J_c}{2} \log \left[\tanh \left(\frac{1}{2L(i)} \right) \right]^{-1} \quad (8)$$

とする。この関係式は、リング内の相互作用の強さ $J_F(i)$ をリングの長さ $L(i)$ とともに大きくとることを意味している。この式は、物理の考察に基づいて導出される。

提案埋込み手法である不等長・不等相互作用埋込み手法は、全てのリングにおいて、リングの長さが同じ時には、既存埋込み手法である等長・等相互作用埋込み手法に帰着する。従って、等長・不等相互作用埋込み手法は考えない。

3. 数値実験の設定

ここでは数値実験の設定について説明する。まず、ベンチマーキング問題について説明する。次に、シミュレーテッドアニーリングの詳細について説明する。

3.1 ベンチマーキング問題

3つの埋込み手法の性能比較を行なうため、4つのタイプの論理イジングモデルをベンチマーキング問題として用いた。それぞれ、論理グラフ G_L の次数分布と相互作用 $\{J_{ij}\}$ やバイアス $\{h_i\}$ の分布とが異なる。

A. 二項バイモーダル分布

論理グラフ G_L は、頂点 i と j とを確率 $1/2$ で辺で結合することによって作成する。従って、各頂点の次数分布は二項分布となる。相互作用 J_{ij} とバイアス h_i は、等確率で -1 もしくは $+1$ の値をとる。

B. 二項ガウス分布

論理グラフ G_L は、頂点 i と j とを確率 $1/2$ で辺で結合することによって作成する。相互作用 J_{ij} とバイアス h_i は、平均 0 と分散 1 とで特徴付けられるガウス分布に従って選択される。

C. べきバイモーダル分布

論理グラフ G_L は、Barabasi–Albert モデル [32] に基づい

Algorithm 1 マルコフ連鎖モンテカルロ法に基づくシミュレーテッドアニーリング (SA)

```

1: for 試行 do
2:   ランダムな初期状態を用意する（初期化）。
3:   for アウターループ do
4:     for インナーループ do
5:       更新先の候補となるスピン状態（遷移状態）を選択する。
6:       遷移状態と現在のスピン状態との間のエネルギー差  $\Delta E$ 
       を計算する。
7:       乱数  $r(0 \leq r < 1)$  を生成する。
8:        $r$  が遷移確率  $W(\Delta E, T)$  (9) より小さければ、遷移状態に現在のスピン状態を更新する。
9:     end for
10:    温度を下げる。
11:  end for
12: end for

```

て作成する。この時、次数分布がべき分布となるスケールフリーネットワークとなる。相互作用 J_{ij} とバイアス h_i は、等確率で -1 もしくは $+1$ の値をとる。

D. べきガウス分布

論理グラフ G_L は、Barabasi–Albert モデルに基づいて作成する。相互作用 J_{ij} とバイアス h_i は、平均 0 と分散 1 とで特徴付けられるガウス分布に従って選択される。

それぞれのベンチマーキング問題に対して 100 個の異なる論理イジングモデルを作成した。

3.2 シミュレーテッドアニーリング

ここでは、イジング計算機の動作原理としての、シミュレーテッドアニーリング (SA) について説明する。SA は温度と呼ばれるパラメータを徐々に下げることによって、組合せ最適化問題の目的関数の最適解を求めるヒューリスティックなアルゴリズムである (Algorithm 1)。ここでは、論理イジングモデルを埋込むことによって得られる物理イジングモデルに対して SA を適用した。SA のアルゴリズムでは、まず各物理スピンを確率 $1/2$ で $+1$ もしくは -1 の状態にし、その後スピン状態を繰り返し更新する。スピン状態を更新するルールとして、シングルスピンフリップ法を採用した。この方法では、まず更新先のスピン状態の候補として、現在のスピン状態から、ランダムに選んだある一つのスピンの値を変えた状態を選ぶ。そして、その状態と現在のスピン状態におけるエネルギー差 ΔE を測定し、スピン状態を更新するか否かを遷移確率を用いて決める。遷移確率 $W(\Delta, E)$ として、熱浴法を採用した。

$$W(\Delta E, T) = \left[1 + \exp \left(\frac{\Delta E}{T} \right) \right]^{-1}. \quad (9)$$

インナーループでは、温度を固定して、物理イジングモデルの頂点数の回数、スピン状態の更新を行なう。また、アウターループを回すごとに、温度を 10^{-4} ずつ下げた。初期

温度を $T_{\text{ini}} = 10$, 最終温度を $T_{\text{fin}} = 0$ に設定した. 初期温度は, 論理イジング模型のパラメタに対して十分大きな値となるようにした.

SA 終了後に行なう, 物理イジング模型のスピンの状態から論理スピンの値を決定する後処理の方法について説明する. リング内の物理スピンの値が全て同じ値を取る時には, 対応する論理スピンの値をその値にとる. そうでない場合には, 多数決で論理スピンの値を与える. 例えば, リング内の物理スピンのうち, 7個のスピンの値が +1 の値を取り, 3個のスピンの値が -1 の値をとる時には, 論理スピンの値を +1 にする. +1 の値をとる物理スピンの数と -1 の値をとる物理スピンの数が同じ場合には, 対応する論理スピンの値を +1 にする.

ここでは, SA と後処理を行なう操作を 100 回繰り返して, 観測量の平均と分散を求めた. 数値実験の結果を次の章で説明する.

4. 数値実験

この章では, それぞれのベンチマーキング問題に対し, 三つの埋込手法の性能比較を行なった結果について紹介する. まず, SA の性能を測るための量として Step to Solution (STS) [9, 33] を導入する. 次に, 数値実験結果について紹介する.

4.1 Step to Solution (STS)

STS は, 99 パーセントの確率で少なくとも一回最適解を得るために, アルゴリズムを実行する回数として与えられる. つまり,

$$R_{99}^k = \frac{\log(1 - 0.99)}{\log(1 - P_s^k)} \quad (10)$$

で定義される. STS が小さい値を取るほど, アニーリングの性能が良いことを表す. ここで, k は異なる論理イジング模型のラベルであり, 1 から 100 までの値を取る. また, P_s^k は成功確率で, 100 回 SA を行ない最適解を得た回数を N_s^k とした時, $P_s^k = N_s^k / 100$ で与えられる. ここで, 中間値の値を R_{99} で与える.

各埋込手法には, リング内の強磁性相互作用の強さを変えるハイパーパラメタ J_c が存在する. ここでは, それぞれのベンチマーキング問題に対して, J_c を刻み幅 0.1 の精度で変えながら STS の値を求め, R_{99} の J_c に対する最小値を評価した. 以下では, J_c を最適な値に選んだ時の R_{99} について, 数値実験結果を説明する.

4.2 数値実験結果

ここでは三つの埋込手法の性能を STS を用いて測定した結果について報告する. 図 2 にそれぞれのベンチマーキング問題に対する STS の論理スピン数 N_L 依存性を示した. 全ての場合において, STS は N_L に対して単調に増加

する. 論理スピン数が 8 個や 12 個の比較的小さいサイズの系では, 三つの埋込手法に対して明瞭な性能差は見られなかった一方で, 論理スピン数が大きくなると性能差が大きくなることが分かった. 全てのベンチマーキング問題に対して, 等長・等相互作用埋込手法の性能が最も悪くなることが分かった. また, 不等長・等相互作用埋込手法と不等長・不等相互作用埋込手法との間の性能差については, 二項バイモーダル分布 (図 2 (a)) と二項ガウス分布 (図 2 (b)) のベンチマーキング問題に対しては, 性能差は見られなかった. 一方で, べきバイモーダル分布 (図 2 (a)) とべきガウス分布 (図 2 (b)) のベンチマーキング問題に対しては, 不等長・不等相互作用埋込手法が最も性能が良くなることが分かった.

5. 議論と結論

シミュレーテッドアニーリングによる数値実験を行なった結果, 全てのベンチマーキング問題に対して, 等長・等相互作用埋込手法の性能が最も悪くなることが分かった. このことは, 等長・等相互作用埋込手法において探索空間の次元が他の埋込手法と比較して大きいことによって説明できる. 等長・等相互作用埋込手法において, 物理イジング模型のスピンの数はおよそ N_L^2 で与えられる. 一方, 等長・不等相互作用埋込手法と不等長・不等相互作用埋込手法では, 物理イジング模型のスピンの数は, 二項バイモーダル分布と二項ガウス分布のベンチマーキング問題に対してはおよそ $N_L^2/2$, べきバイモーダル分布とべきガウス分布のベンチマーキング問題に対しては N_L のオーダーとなる. 探索空間の次元は, 物理スピン数に対して指数関数的に増大するため, 最も物理スピン数の多い等長・等相互作用埋込手法では最適解の探索が困難になったと考えられる.

また, 二項バイモーダル分布と二項ガウス分布のベンチマーキング問題に対しては, 等長・不等相互作用埋込手法と不等長・不等相互作用埋込手法との間の性能差は現れなかった. これは, 論理グラフが二項分布によって生成される時, 物理イジング模型におけるリングの長さの不確かさが $N_L^{1/2}$ となり, その結果, 不等長・不等相互作用埋込手法におけるリング内相互作用の強さの不確かさが $N_L^{-1/2}$ となることで説明できる. つまり, 論理スピン数が増大するにつれて, 不等長・不等相互作用埋込手法は不等長・等相互作用埋込手法に漸的に近づくために, 両者に性能差が現れなかったことが考えられる. 一方で, べきバイモーダル分布とべきガウス分布のベンチマーキング問題に対しては, 不等長・不等相互作用埋込手法の方がより良い性能を示した. これは, 論理イジング模型の次数が広く分布している場合においては, リング内相互作用の強さをリングごとに変える必要があることを示している.

本稿では, 温度効果を用いたイジング模型において高性

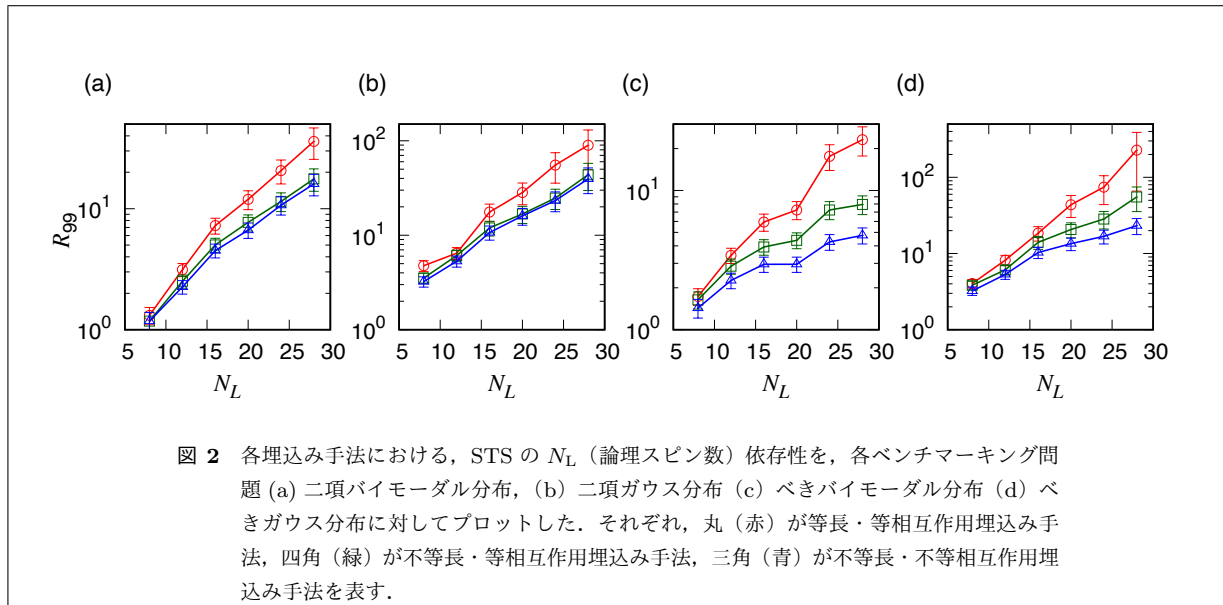


図 2 各埋込み手法における, STS の N_L (論理スピンの数) 依存性を, 各ベンチマーキング問題 (a) 二項バイモーダル分布, (b) 二項ガウス分布 (c) ベキバイモーダル分布 (d) ベキガウス分布に対してプロットした. それぞれ, 丸 (赤) が等長・等相互作用埋込み手法, 四角 (緑) が不等長・等相互作用埋込み手法, 三角 (青) が不等長・不等相互作用埋込み手法を表す.

能を与えるような埋込手法の構成方法を提案した. 提案した埋込手法は, 各チェーン内の相互作用の強さをチェーンの長さに応じて変えるという手法であり, 我々は相互作用の強さとチェーンの長さとの間に成り立つ関係式を統計物理学の立場から導出した. この埋込手法は, 全てのチェーンに対して相互作用の強さを一定とする従来の埋込手法とは異なっている. 4つのタイプの異なるベンチマーキング問題に対して, シミュレーテッドアニーリングを行ない. 2つのタイプの既存埋込手法と提案埋込手法との間の性能比較を行なった. その結果, 全てのベンチマーキング問題に対して, 提案埋込手法が最も良い性能を出し, 特に論理イジングモデルの次数分布に広がりがある問題に対して有効であることが分かった.

謝辞 この結果は, 国立研究開発法人新エネルギー・産業技術開発機構 (NEDO) の委託業務の結果得られたものである.

参考文献

- [1] Johnson, M. W., Amin, M. H. S., Gildert, S., Lanting, T., Hamze, F., Dickson, N., Harris, R., Berkley, A. J., Johansson, J., Bunyk, P., Chapple, E. M., Enderud, C., Hilton, J. P., Karimi, K., Ladizinsky, E., Ladizinsky, N., Oh, T., Perminov, I., Rich, C., Thom, M. C., Tolkacheva, E., Truncik, C. J. S., Uchaikin, S., Wang, J., Wilson, B. and Rose, G.: Quantum annealing with manufactured spins, *Nature*, Vol. 473, No. 7346, pp. 194–198 (online), DOI: 10.1038/nature10012 (2011).
- [2] Bunyk, P. I., Hoskinson, E. M., Johnson, M. W., Tolkacheva, E., Altomare, F., Berkley, A. J., Harris, R., Hilton, J. P., Lanting, T., Przybysz, A. J. and Whittaker, J.: Architectural Considerations in the Design of a Superconducting Quantum Annealing Processor, *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, Vol. 24, No. 4, pp. 1–10 (online), DOI: 10.1109/TASC.2014.2318294 (2014).
- [3] Yamaoka, M., Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T., Aoki, H. and Mizuno, H.: A 20k-Spin Ising Chip to Solve Combinatorial Optimization Problems With CMOS Annealing, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 51, pp. 303–309 (2016).
- [4] Inagaki, T., Haribara, Y., Igarashi, K., Sonobe, T., Tamate, S., Honjo, T., Marandi, A., McMahon, P. L., Umeki, T., Enbutsu, K., Tadanaga, O., Takenouchi, H., Aihara, K., Kawarabayashi, K.-i., Inoue, K., Utsunomiya, S. and Takesue, H.: A coherent Ising machine for 2000-node optimization problems, *Science*, Vol. 354, No. 6312, pp. 603–606 (online), DOI: 10.1126/science.aah4243 (2016).
- [5] McMahon, P. L., Marandi, A., Haribara, Y., Hamerly, R., Langrock, C., Tamate, S., Inagaki, T., Takesue, H., Utsunomiya, S., Aihara, K., Byer, R. L., Fejer, M. M., Mabuchi, H. and Yamamoto, Y.: A fully programmable 100-spin coherent Ising machine with all-to-all connections, *Science*, Vol. 354, No. 6312, pp. 614–617 (online), DOI: 10.1126/science.aah5178 (2016).
- [6] Mazawa, M., Imafuku, K., Hidaka, M., Koike, H. and Kawabata, S.: Design of Quantum Annealing Machine for Prime Factoring, *2017 16th International Superconductive Electronics Conference (ISEC)*, pp. 1–3 (online), DOI: 10.1109/ISEC.2017.8314195 (2017).
- [7] Okuyama, T., Hayashi, M. and Yamaoka, M.: An Ising Computer Based on Simulated Quantum Annealing by Path Integral Monte Carlo Method, *2017 IEEE International Conference on Rebooting Computing (ICRC)*, pp. 1–6 (online), DOI: 10.1109/ICRC.2017.8123652 (2017).
- [8] Yoshimura, C., Hayashi, M., Okuyama, T. and Yamaoka, M.: Implementation and Evaluation of FPGA-based Annealing Processor for Ising Model by use of Resource Sharing, *International Journal of Networking and Computing*, Vol. 7, No. 2, pp. 154–172 (2017).
- [9] Aramon, M., Rosenberg, G., Valiante, E., Miyazawa, T., Tamura, H. and Katzgraber, H. G.: Physics-Inspired Optimization for Quadratic Unconstrained Problems Using a Digital Annealer, *Frontiers in Physics*, Vol. 7, p. 48 (online), DOI: 10.3389/fphy.2019.00048 (2019).
- [10] Goto, H., Tatsumura, K. and Dixon, A. R.: Combinatorial optimization by simulating adiabatic bifurcations in nonlinear Hamiltonian systems, *Science Advances*, Vol. 5, No. 4 (online), DOI: 10.1126/sciadv.aav2372 (2019).

- (2019).
- [11] Maezawa, M., Fujii, G., Hidaka, M., Imafuku, K., Kikuchi, K., Koike, H., Makise, K., Nagasawa, S., Nakagawa, H., Ukibe, M. and Kawabata, S.: Toward Practical-Scale Quantum Annealing Machine for Prime Factoring, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 88, No. 6, p. 061012 (online), DOI: 10.7566/JPSJ.88.061012 (2019).
- [12] Okuyama, T., Sonobe, T., Kawarabayashi, K.-i. and Yamaoka, M.: Binary optimization by momentum annealing, *Phys. Rev. E*, Vol. 100, p. 012111 (online), DOI: 10.1103/PhysRevE.100.012111 (2019).
- [13] Lucas, A.: Ising formulations of many NP problems, *Frontiers in Physics*, Vol. 2, p. 5 (online), DOI: 10.3389/fphy.2014.00005 (2014).
- [14] Tanaka, S., Tamura, R. and Chakrabarti, B. K.: *Quantum spin glasses, annealing and computation*, Cambridge University Press (2017).
- [15] Tanahashi, K., Takayanagi, S., Motohashi, T. and Tanaka, S.: Application of Ising Machines and a Software Development for Ising Machines, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 88, No. 6, p. 061010 (online), DOI: 10.7566/JPSJ.88.061010 (2019).
- [16] Choi, V.: Minor-embedding in adiabatic quantum computation: I. The parameter setting problem, *Quantum Information Processing*, Vol. 7, No. 5, pp. 193–209 (online), DOI: 10.1007/s11128-008-0082-9 (2008).
- [17] Oku, D., Terada, K., Hayashi, M., Yamaoka, M., Tanaka, S. and Togawa, N.: A Fully-Connected Ising Model Embedding Method and Its Evaluation for CMOS Annealing Machines, *IEICE Transactions*, Vol. 102-D, No. 9, pp. 1696–1706 (2019).
- [18] Choi, V.: Minor-embedding in adiabatic quantum computation: II. Minor-universal graph design, *Quantum Information Processing*, Vol. 10, No. 3, pp. 343–353 (online), DOI: 10.1007/s11128-010-0200-3 (2011).
- [19] Klymko, C., Sullivan, B. D. and Humble, T. S.: Adiabatic quantum programming: minor embedding with hard faults, *Quantum Information Processing*, Vol. 13, No. 3, pp. 709–729 (online), DOI: 10.1007/s11128-013-0683-9 (2014).
- [20] Boothby, T., King, A. D. and Roy, A.: Fast clique minor generation in Chimera qubit connectivity graphs, *Quantum Information Processing*, Vol. 15, No. 1, pp. 495–508 (online), DOI: 10.1007/s11128-015-1150-6 (2016).
- [21] Cai, J., Macready, W. G. and Roy, A.: A practical heuristic for finding graph minors, *arXiv preprint arXiv:1406.2741*, (online), available from <https://arxiv.org/abs/1406.2741> (2014).
- [22] Hamilton, K. E. and Humble, T. S.: Identifying the minor set cover of dense connected bipartite graphs via random matching edge sets, *Quantum Information Processing*, Vol. 16, No. 4, p. 94 (online), DOI: 10.1007/s11128-016-1513-7 (2017).
- [23] Zaribafiyani, A., Marchand, D. J. J. and Changiz Rezaei, S. S.: Systematic and deterministic graph minor embedding for Cartesian products of graphs, *Quantum Information Processing*, Vol. 16, No. 5, p. 136 (online), DOI: 10.1007/s11128-017-1569-z (2017).
- [24] Harris, R., Sato, Y., Berkley, A. J., Reis, M., Altomare, F., Amin, M. H., Boothby, K., Bunyk, P., Deng, C., Enderud, C., Huang, S., Hoskinson, E., Johnson, M. W., Ladizinsky, E., Ladizinsky, N., Lanting, T., Li, R., Medina, T., Molavi, R., Neufeld, R., Oh, T., Pavlov, I., Perminov, I., Poulin-Lamarre, G., Rich, C., Smirnov, A., Swenson, L., Tsai, N., Volkmann, M., Whittaker, J. and Yao, J.: Phase transitions in a programmable quantum spin glass simulator, *Science*, Vol. 361, No. 6398, pp. 162–165 (online), DOI: 10.1126/science.aat2025 (2018).
- [25] King, A. D., Carrasquilla, J., Raymond, J., Ozfidan, I., Andriyash, E., Berkley, A., Reis, M., Lanting, T., Harris, R., Altomare, F., Boothby, K., Bunyk, P. I., Enderud, C., Fréchet, A., Hoskinson, E., Ladizinsky, N., Oh, T., Poulin-Lamarre, G., Rich, C., Sato, Y., Smirnov, A. Y., Swenson, L. J., Volkmann, M. H., Whittaker, J., Yao, J., Ladizinsky, E., Johnson, M. W., Hilton, J. and Amin, M. H.: Observation of topological phenomena in a programmable lattice of 1,800 qubits, *Nature*, Vol. 560, No. 7719, pp. 456–460 (online), DOI: 10.1038/s41586-018-0410-x (2018).
- [26] Sugie, Y., Yoshida, Y., Mertig, N., Takemoto, T., Teramoto, H., Nakamura, A., Takigawa, I., Minato, S.-I., Yamaoka, M. and Komatsuzaki, T.: Graph Minors from Simulated Annealing for Annealing Machines with Sparse Connectivity, *Theory and Practice of Natural Computing* (Fagan, D., Martín-Vide, C., O’Neill, M. and Vega-Rodríguez, M. A., eds.), Cham, Springer International Publishing, pp. 111–123 (2018).
- [27] Okada, S., Ohzeki, M., Terabe, M. and Taguchi, S.: Improving solutions by embedding larger subproblems in a D-Wave quantum annealer, *Scientific Reports*, Vol. 9, No. 1, p. 2098 (online), DOI: 10.1038/s41598-018-38388-4 (2019).
- [28] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P.: Optimization by Simulated Annealing, *Science*, Vol. 220, No. 4598, pp. 671–680 (online), DOI: 10.1126/science.220.4598.671 (1983).
- [29] Johnson, D. S., Aragon, C. R., McGeoch, L. A. and Schevon, C.: Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation; Part I, Graph Partitioning, *Operations Research*, Vol. 37, No. 6, pp. 865–892 (online), DOI: 10.1287/opre.37.6.865 (1989).
- [30] Johnson, D. S., Aragon, C. R., McGeoch, L. A. and Schevon, C.: Optimization by Simulated Annealing: An Experimental Evaluation; Part II, Graph Coloring and Number Partitioning, *Operations Research*, Vol. 39, No. 3, pp. 378–406 (online), DOI: 10.1287/opre.39.3.378 (1991).
- [31] Dattani, N., Szalay, S. and Chancellor, N.: Pegasus: The second connectivity graph for large-scale quantum annealing hardware, *arXiv preprint arXiv:1901.07636*, (online), available from <https://arxiv.org/abs/1901.07636> (2019).
- [32] Albert, R. and Barabási, A.-L.: Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 74, pp. 47–97 (online), DOI: 10.1103/RevModPhys.74.47 (2002).
- [33] Boixo, S., Rønnow, T. F., Isakov, S. V., Wang, Z., Wecker, D., Lidar, D. A., Martinis, J. M. and Troyer, M.: Evidence for quantum annealing with more than one hundred qubits, *Nature Physics*, Vol. 10, No. 3, pp. 218–224 (online), DOI: 10.1038/nphys2900 (2014).