Vol.2020-AL-178 No.9
2020/5/9

パス幅３以下でダイヤモンド無矛盾なグラフの３彩色可能性

島崎 浩幸[†1,a)]　玉木 久夫[†1,b)]

概要：グラフ G に対して、ダイヤモンド（K_4 から一辺を除いたグラフ）を誘導部分グラフとして持つ限り、その非隣接頂点対を１頂点に縮約するという操作を可能な限り繰り返し適用して得られるグラフを G のダイヤモンド縮約と呼ぶ。G のダイヤモンド縮約が K_4 を部分グラフとして持たないとき、G はダイヤモンド無矛盾であると言う。G がダイヤモンド無矛盾であることは、G が３彩色可能であるための自明な必要条件である。我々は、パス幅が３以下のグラフに対しては、これが十分条件でもあることを示す。一方、パス幅４かつ木幅３でダイヤモンドも K_4 も誘導部分グラフとして持たず、かつ３彩色不能なグラフを構築する。したがって、我々の結果をパス幅と木幅に関して一般化することはできない。

1. はじめに

G をグラフ、k を正整数とするとき、G の k 彩色とは、G の各頂点に対する１以上 k 以下の整数（色）の割り当てで、どの隣接２頂点も異なる色を持つという条件を満たすものを言う。G が k 彩色を持つとき、G は k **彩色可能**であると言う。k を固定したとき、与えられた G が k 彩色可能であるかを判定する問題は $k \geq 3$ に対しては NP 完全である [1]。

グラフの３彩色問題は非自明な k 彩色問題で k が最小な場合であり、さまざまな観点から研究されている。例えば、Chudnovsky ら [2] は、６頂点からなるパス P_6 を誘導部分グラフとして持たないグラフの中で、３彩色不能な極小グラフは２４通りに限ることを示している。

ダイヤモンドは、K_4 から一辺を除いて得られるグラフであり、グラフ G の誘導部分グラフ D がダイヤモンドであるとき、D を G 中のダイヤモンドであると言う。D が G 中のダイヤモンドであるとき、G の D **縮約**を、D の非隣接頂点対 u, v を１頂点 w に縮約し、w を u と v の隣接点のすべてに隣接させるという操作によって得られるグラフとして定義する。G 中にダイヤモンド D がある限り G をその D 縮約で置き換えるという操作をかのうな限り繰り返して得られるグラフを G の**ダイヤモンド縮約**と呼ぶ。G からダイヤモンド縮約を得る操作は、Chudnovsky ら [2] の用いた「すべての極大トライポッドの縮約」という操作と等価である。G のダイヤモンド縮約 G' が K_4 を部分グラフとして持たないとき、G' は G の唯一のダイヤモンド縮約である。G のダイヤモンド縮約が K_4 を部分グラフとして持たないとき、G は**ダイヤモンド無矛盾**であるという。

ダイヤモンド縮約はグラフの３彩色可能性を保存するので、グラフ G がダイヤモンド無矛盾であることは、G が３彩色可能であることの自明な必要条件である。この簡明な必要条件がどのようなグラフクラスにおいて十分でもあるかを問うことは自然である。我々は、パス幅が３以下のグラフがそのようなクラスのひとつを成すことを示す。

定理 1. G がパス幅３以下でダイヤモンド無矛盾なグラフであるとき、G は３彩色可能である。

一方、我々はパス幅が４で木幅が３であり、ダイヤモンドも K_4 も誘導部分グラフとして持たないグラフで３彩色を持たないグラフの例を構築する。したがって、定理１をパス幅や木幅に関して一般化することはできない。

2. 準備

定義 1. S を集合とするとき写像 $\gamma : S \to \{1, 2, 3\}$ を S の**３彩色**と呼ぶ。各 $v \in S$ に対して、$\gamma(v)$ を γ が v に与える**色**と呼び、γ は v を色 $\gamma(v)$ で塗ると言う。$|\gamma(S)|$ を３彩色 γ の**色数**と呼ぶ。ここで、$\gamma(S)$ は、写像 γ による S の像 $\{\gamma(v) \mid v \in S\}$ を表す。集合 S のすべての**３彩色**からなる集合を $\Gamma(S)$ で表す。グラフ G の**３彩色**とは、$V(G)$ の３彩色 γ で、G のどの辺 $\{u, v\}$ に対しても $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ という条件を満たすものを言う。

一般に、$Y \subseteq X$ であるとき、写像 $f : X \to R$ に対して写像 $f' : Y \to R$ を各 $x \in Y$ に対して $f'(x) = f(x)$ によって定めるとき、f' を f の Y への**制限**と呼び、$f|Y$ で表す。

†1　現在，明治大学
Presently with Meiji Uniersity
a)　shimazaki@cs.meiji.ac.jp
b)　tamaki@cs.meiji.ac.jp

また、f は $f|Y$ の X hの**拡張**であると言う。G をグラフ、γ を G の部分グラフ H の3彩色であるとする。γ の $V(G)$ への拡張が G の3彩色であるとき、その3彩色は γ の G への**拡張**であると言う。γ の G への拡張が存在するとき、γ は G へ**拡張可能**であるという。

定義 2. 木分解 T とは、$V(G)$ の頂点集合 $X_1, X_2, \ldots, X_t$ をノードとする木で、以下の条件を満たすものである。各頂点集合 $X_1, X_2, \ldots, X_t$ を**バッグ**という。

(1) $\bigcup_{1 \le i \le t} X_i = V(G)$

(2) 任意の辺 $\{u, v\} \in E(G)$ に対して、$u, v \in X_i$ を満たす $i (1 \le i \le t)$ が存在する。

(3) 任意の頂点 $v \in V(G)$ を要素として持つバッグの集まりは、T において連結な部分木を成す。

木分解 T の**幅**とは、$\max_{1 \le i \le t} |X_i| - 1$ である。グラフ G の**木幅**とは、G が幅 k の木分解を持つような最小の整数 k である。特に、G の木分解 T がパスであるとき、T を**パス分解**といい、グラフ G の**パス幅**とは、G が幅 k のパス分解を持つような最小の整数 k である。

3. 定理1の証明

この章では定理1を証明する。

定義 3. G をグラフ、S を G の3つの頂点からなる集合、γ を $G[S]$ の3彩色とする。このとき、グラフ $G(S, \gamma)$ を次のように定義する。γ の色数が2以下であれば $G(S, \gamma) = G$、γ の色数が3のときは $G(S, \gamma)$ は G に必要ならば辺を加えて S を三角形にしたグラフである。

定義 4. パス分解 $P = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ が次の条件をすべて満たすとき、P を3-4パス分解と呼ぶ。

(1) m が奇数である。

(2) i が奇数ならば $|X_i| = 3$ であり、かつもし $i \ge 3$ ならば $X_i \subseteq X_{i-1}$ である。

(3) i が偶数ならば $|X_i| = 4$ であり、かつ $X_{i-1} \subseteq X_i$ である。

G のパス幅が3以下であるとき、必要に応じて孤立点を追加したグラフ G' で3-4パス分解を持つものがあるので、定理の証明において G は3-4パス分解を持つと仮定して良い。この定理の帰納法による証明を、次の補題を用いて定式化する。

補題 1. G を3-4パス分解を持つグラフ、 $S \subseteq V(G)$ を要素数が3の G の頂点集合とし、S を終端バッグとするような G の3-4パス分解が存在すると仮定する。 γ を $G[S]$ の任意の3彩色とするとき、もし $G(S, \gamma)$ がダイヤモンド無矛盾であるならば γ は G の3彩色に拡張可能である。

Proof. G の3ー4パス分解で S を終端バッグとして持つもの P を固定する。証明は P の長さに関する帰納法による。P の長さが1のときは、$S = V(G)$、$G[S] = G$ であるから、補題の言明は自明に成り立つ。

以下では P の長さが3以上であると仮定する。P において S の直前のバッグを X とおき、P から S と X を除いてできるバッグのパスを P' とおく。さらに、P' の終端バッグを S' とおく。$V' = V(G) \setminus (X \setminus S')$、$G' = G[V']$ とおくとき、P' は G' の3-4パス分解である。

$X \setminus S$ の唯一の要素を s、$X \setminus S'$ の唯一の要素を x とおく。

$s = x$ のときは、$G' = G$、$S' = S$ であるから、補題の言明は帰納法の仮定により成り立つ。そこで、以下では $s \neq x$ と仮定し、X の s、x 以外の2頂点を a、b とおく。すなわち、$S = \{a, b, x\}$,$X = \{a, b, s, x\}$,$S' = \{a, b, s\}$ である。

$G[S]$ の任意の3彩色 γ で、$G(S, \gamma)$ がダイヤモンド無矛盾であるよなものを固定する。

証明は場合分けを含むが、まず共通の手順を述べる。

手順1 γ を $G(S, \gamma)[X]$ の3彩色 γ' に拡張する。s の色を適切に選ぶことにより、$G'(S', \gamma'|S')$ がダイヤモンド無矛盾であるようにできることを示す。

手順2 帰納法の仮定により、$\gamma'|S'$ を拡張する G' の3彩色 α を得る。

手順3 α に、x の色 $\gamma(x)$ を加えて $V(G)$ の彩色 α' に拡張する。すなわち、 $\alpha'(x) = \gamma(x)$、各 $v \neq x$ に対しては $\alpha'(v) = \alpha(v)$ と定める。 頂点 x の V' の中にある隣接点はすべて X のなかにあり、α' は $G[X]$ の3彩色であるところの γ' の拡張であるので、α' は G の3彩色である。γ' は γ の拡張であるから、α' は γ の拡張である。よって、補題の言明が成り立つ。

以下の場合分けでは、手順1のみを実行する。

まず、γ の色数が3の場合を考える。もし、s が S の3頂点すべてと隣接すると $G(S, \gamma)[X]$ は K_4 であるので、仮定に反する。したがって、s は S の高々ふたつの頂点と隣接するので、γ を $G[X]$ の彩色 γ' に拡張することができる。

γ の色数が3で、s が a と b の両方に隣接する場合

この場合、$D = G(S, \gamma)[X]$ はダイヤモンドであり、$G(S, \gamma)$ の D 縮約は $G'(S', \gamma')$ であるか、あるいは $G'(S', \gamma')$ に辺 $\{a, b\}$ を加えたグラフである。$G(S, \gamma)$ がダイヤモンド無矛盾であるから、$G'(S', \gamma')$ もダイヤモンド無矛盾である。

γ の色数が3で s が a と隣接しない場合

$\gamma'(s) = \gamma(a)$ とすれば、$\gamma'|S'$ の色数は2である。したがって、$G'(S', \gamma'|S') = G'$ である。G' に辺 $\{a, b\}$ を（もしまだなければ）加えてできるグラフを G'' とおくと、G'' のダイヤモンド縮約は $G(S, \gamma)$ のダイヤモンド縮約に等しいか、あるいは $G(S, \gamma)$ のダイヤモンド縮約から頂点 x を除いて得られるグラフである。$G(S, \gamma)$ がダイヤモンド無矛盾であるから、G'' もダイヤモンド無矛盾である。したがって、G'' の部分グラフである $G'(S', \gamma'|S') = G'$ もダイヤモンド無矛盾である。s が b と隣接しない場合も同様で

ある。

次に γ の色数が２以下である場合を考える。

γ の色数が２以下で、$G[X]$ が s を１頂点とする三角形を含まないとき

$\gamma'(s)$ は少なくとも二つの色から選べるので、$\gamma'|S'$ の色数を２以下にできる。このとき、$G'(S', \gamma'|S') = G'$ であるから、$G = G(S, \gamma)$ がダイヤモンド無矛盾であることより、$G'(S', \gamma'|S')$ もダイヤモンド無矛盾である。

γ の色数が２以下で、$G[X]$ が s を１頂点とする三角形を含むとき

S のうちでこの三角形に含まれない頂点を y とする。$\gamma'|S'$ の色数が２以下であれば、上と同様に議論できるので、$\gamma'|S'$ の色数が３であると仮定する。このとき、$G(S', \gamma'|S')$ は $G[V(G) \setminus \{y\}]$ と同型である。$G = G(S, \gamma)$ がダイヤモンド無矛盾であるから、したがって $G'(S', \gamma'|S')$ もダイヤモンド無矛盾である。 □

定理の証明:

G をパス幅３以下でダイヤモンド無矛盾なグラフとする。G に必要なだけ孤立頂点を追加することにより、３-４パス分解を持つグラフ G' に拡張する。G' の３-４パス分解のひとつを選び、その終端バッグを S とする。$G'[S]$ の最小色数の３彩色のひとつを γ とすれば、S が G' の三角形でない限り γ の色数は２以下であるので $G'(S, \gamma)$ は G に等しい。したがって、補題１により、γ は G' の３彩色 γ' に拡張できる。$\gamma'|V(G)$ は G の３彩色である。 □

4. 定理１の一般化に対する反例

この節では、パス幅４かつ木幅３でダイヤモンド無矛盾であるにも関わらず３彩色不能なグラフを構築する。

定義 5. 下図のような、頂点 $\{x, y\}$ を含む *8* 頂点のグラフを $H(x, y)$ と表す.

頂点 $\{x, y\}$ のどちらとも隣接しない２頂点を $\{1, 4\}$、x に隣接する２頂点を $\{2, 5\}$、y に隣接する２頂点を $\{3, 6\}$ とする。$\{1, 2, 3\}$ と $\{4, 5, 6\}$ はそれぞれ K_3 を成す。

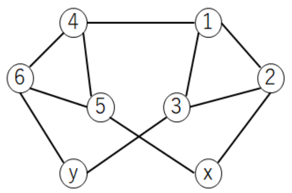

図 1　グラフ H(x,y)

定義 6. $H(a, b)$ と $H(b, c)$ が頂点 c を共有し、辺 $\{a, b\}$ と、*3* 頂点 $\{a, b, c\}$ に隣接する頂点 d を加えたグラフをグラフ W とする。

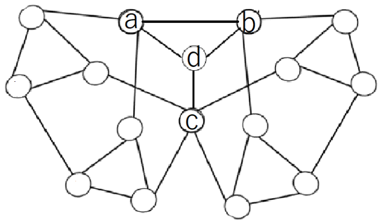

図 2　グラフ W

グラフ W はダイヤモンドも K_4 も誘導部分グラフとして持たない。

補題 2. $H(x, y)$ の木分解を考える。根バッグが $\{x, y\}$ であるような $H(x, y)$ の幅 *3* の木分解が存在する。

Proof. グラフ F を、$H(x, y)$ から辺 $\{1, 4\}$ を取り除いたグラフとし、F の木分解を T を次のように定義する。T のバッグを $X_1, X_2, \ldots, X_t$ で表す。ここで T を、X_1 を根とし、$X_1 = \{x, y\}$、$X_2 = \{x, y, 2\}$、$X_3 = \{y, 2, 3\}$、$X_4 = \{1, 2, 3\}$、$X_5 = \{x, y, 5\}$、$X_6 = \{x, y, 6\}$、$X_7 = \{4, 5, 6\}$ とすると、T の幅は２である。

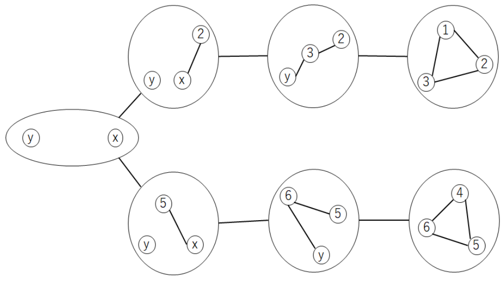

図 3　グラフ F の木分解

このような T の全てのバッグに、頂点４を導入することで $H(x, y)$ の木分解が得られ、幅は３である。 □

補題 3. グラフ W は木幅 *3* である。

Proof. 補題２で得られる $H(a, c)$、$H(b, c)$ の木分解の根バッグはそれぞれ $\{a, c\}$、$\{b, c\}$ である。この２つのバッグを子とし、親バッグ $\{a, b, c, d\}$ で結合することで W の幅３の木分解が得られる。一方、グラフ $H(x, y)$ は K_4 をマイナーとして含むので木幅は３以上である。 □

補題 4. $H(x, y)$ のパス分解を考える。末端バッグが $\{x, y\}$ であるような $H(x, y)$ の幅 *4* のパス分解が存在する。

Proof. $H(x, y)$ のパス分解を P を次のように定義する。P はバッグ $X_1, X_2, \ldots, X_t$ がこの順で並んだパスであるとする。ここで $X_1 = \{x, y\}$、$X_2 = \{x, y, 1, 2, 3\}$、$X_3 = \{x, y, 1, 4\}$、$X_4 = \{x, y, 4, 5, 6\}$ とすると、P の幅は４である。

□

補題 5. W のパス幅は *4* 以下である.

Vol.2020-AL-178 No.9
2020/5/9

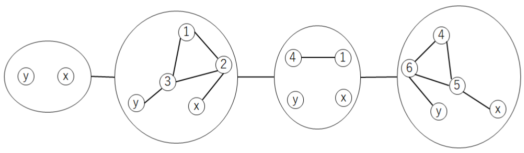

図 4　グラフ H(x,y) のパス分解

Proof.　補題 4 で得られる $H(a,c)$、$H(b,c)$ のパス分解の末端バッグはそれぞれ $\{a,c\}$、$\{b,c\}$ である。この 2 つのバッグと隣接するように、バッグ $\{a,b,c,d\}$ で連結することで W のパス分解が得られる。このとき、W のパス幅は 4 である。 □

グラフ W のパス幅が 3 以下でないことは、定理 1 と補題 8 からも結論できるが、計算機プログラムによって独立に、パス幅が 4 であることを確認してある。

$H(x,y)$ と W の 3 彩色可能性を議論するために、次の $H(x,y)$ の部分グラフを考える。

定義 7. 下図のような、頂点 $\{x,y,z\}$ を含む 5 頂点のグラフを家型グラフとする。

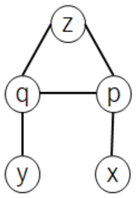

図 5　家型グラフ

x の隣接点を p、y の隣接点を q とする。

補題 6. 家型グラフの *3* 彩色において、頂点 $\{x,y\}$ が同色のとき、頂点 z もそれらと同色で彩色される。

Proof.　家型グラフの 3 彩色を γ とする。頂点 p と頂点 q は隣接しているため $\gamma(p) \neq \gamma(q)$ である。$\gamma(x) = \gamma(y) = 1$ とすると、$\gamma(p) = 2$、$\gamma(q) = 3$ が定まる。このとき、$\gamma(z) = 1$ であり、頂点 $\{x,y\}$ と同色である。 □

補題 7. 頂点 $\{x,y\}$ が同色であるような $H(x,y)$ の彩色は、*3* 彩色ではない

Proof.　$H(x,y)$ の 3 彩色を γ とする。頂点 1 と頂点 4 は隣接しているため $\gamma(1) \neq \gamma(4)$ である。ここで、頂点 $\{x,y\}$ が同色であると仮定する。つまり $\gamma(x) = \gamma(y) = 1$ とすると、補題 7 より、$\gamma(1) = 1$,$\gamma(4) = 1$ である。これは $\gamma(1) \neq \gamma(4)$ に反するため、頂点 $\{x,y\}$ が同色であるとき $H(x,y)$ は 3 彩色できない。 □

補題 8. グラフ W は *3* 彩色出来ない。

Proof.　W の 3 彩色 γ が存在すると仮定する。頂点 a と頂点 b は隣接しているため $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ である。補題 7 より、$\gamma(a) \neq \gamma(c)$ かつ $\gamma(b) \neq \gamma(c)$ である。これより、$\gamma(a) = 1$、$\gamma(b) = 2$、$\gamma(c) = 3$ と表せる。一方、頂点 d は $\{a,b,c\}$ と隣接するため 3 彩色可能な色が存在しない。したがって、W は 3 彩色できない。 □

なお、W は 6 頂点のパス P_6 を誘導部分グラフとして含んでおり、したがって Chudnovsky ら [2] の２４個のグラフ例のなかには含まれない。

5.　都築の予想

この研究は、次に述べる都築の予想 [3] の解決を動機として開始された。

G の相異なる頂点の列 v_1、v_2、$\ldots v_m$ が、各 $1 \leq i < m$ に対して (v_i, v_{i+1}) が G 中のダイヤモンドの非隣接頂点対であるとき、この列を G のダイヤモンド連鎖と呼び、v_1 と v_m をこのダイヤモンド連鎖の端点と呼ぶ。G のダイヤモンド連鎖で、その両端点が辺をなすようなものが存在しないとき、G は**弱ダイヤモンド無矛盾**であると言う。都築は木幅が 3 以下のグラフにおいては、K_4 を持たずかつ弱ダイヤモンド無矛盾であることが 3 彩色性の必要十分条件であると予想した。第 4 節の例は、木幅が 3 以下であり、かつ弱ダイヤモンド無矛盾であるので、都築の予想の反例にもなっている。木幅が 3 以下の条件をパス幅が 3 以下と弱めた予想にも、下のような反例が存在する。

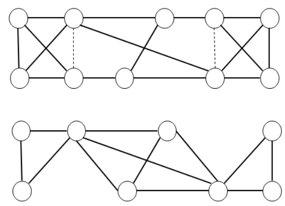

図 6　上：縮約前 /下：縮約後 (点線を縮約)

このグラフは弱ダイヤモンド無矛盾ではあるが、ダイヤモンド縮約が K_4 を部分グラフとして含むため、ダイヤモンド無矛盾ではない。

木幅 3 以下の条件をパス幅 3 以下に強め、同時に弱ダイヤモンド無矛盾の条件をダイヤモンド無矛盾に強めることによってはじめて、定理として成立する予想の変種を得ることができた。

参考文献

[1] Dailey, David P. ”Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete.” Discrete Mathematics 30.3 (1980): 289-293.

[2] Chudnovsky, Maria, et al. ”Obstructions for three-coloring graphs without induced paths on six vertices.” arXiv preprint arXiv:1504.06979 (2015).

[3] 都築秀之”3 彩色問題での 3 彩色不可のグラフパターンの検証”卒業研究,(2017)