新たな全象（universal）ゲーム「タイル返し」のルールと全象性の証明

末續 鴻輝[1,a)]

概要：組合せゲーム理論は，偶然や運に左右されず，伏せられた情報のないゲームを数学的対象として研究する理論であり，ゲームのそれぞれの局面には値が定まる．同じゲームの異なる局面や，さらには別々のゲームの局面ですら，同じ値を持ち，それらは同一視して扱うことができるため，ゲームの値を理解することは非常に重要である．あるゲームが全象（universal）であるとは，そのゲームの局面として，任意の値が現れることを意味し，先行研究では，一般化コナネと呼ばれるゲームのみが全象であると示されているが，本研究では，単純なルールでプレイされる新たなゲーム『タイル返し』を提案し，それが全象であることを示す．

1. はじめに

組合せゲーム理論は，偶然や運，伏せられた情報のないゲームの数学的構造を探る理論である．囲碁や将棋など，現実にプレイされているゲームのなかにも組合せゲームとして捉えることのできるゲームは多くあり，本理論を研究することはそのようなゲームの理解につながる．

組合せゲーム理論においては，ゲームの局面に値を定義し，同一の値を持つ局面は（必勝性に影響を与えないという意味で）同一視して考えることができると知られている．あるルールのゲームをプレイしたときに，どのような値がそのルールの下での局面として表現されるかは，ゲームの解析の難しさなどとも関連する可能性があり，興味深い内容である．

特に短い非不偏ゲームの正規形という前提のもとで，全てのゲームの値が現れるルールのことを**全象**（*universal*）であると呼ぶ．全象ルールについてはこれまで，自明なものを除き一般化コナネというゲームのルールが唯一全象であると知られていた．本研究では新たなルール『タイル返し』を定義し，これも全象であることを証明する．また，『Go on lattice』を定義し，帰着的手法を用いてこれもまた全象であることを示す．

1.1 組合せゲーム理論の基本的な定義と定理

本節では組合せゲーム理論の基礎的な定義と定理を紹介する．詳しくは [2], [3] などを参照いただきたい．

なお，本研究では『**短い**』(有限手数で必ず終わる)，『**非不偏**』(盤面に対する可能な着手が，プレイヤによって異なることがある)，『**正規形**』(最後の着手者を勝者とする）のゲームについて考える．

第一に，集合を用いたゲームの定義を行う．

定義 1.
- $G = \{|\}$ はゲームである．
- $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ はゲームである．片側が空である場合も含む．

$G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L$ をそれぞれ G の**左選択肢**，$G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R$ をそれぞれ G の**右選択肢**と呼ぶ．

定義 2 (ゲームの和)**.** $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}, H = \{H_1^L, H_2^L, \ldots, H_{k'}^L \mid H_1^R, H_2^R, \ldots, H_{l'}^R\}$ とする．再帰的に，$G + H = \{G_1^L + H, G_2^L + H, \ldots, G_k^L + H, G + H_1^L, G + H_2^L, \ldots, G + H_{k'}^L \mid G_1^R + H, G_2^R + H, \ldots, G_l^R + H, G + H_1^R, G + H_2^R, \ldots, G + H_{l'}^R\}$ と定義する．

定義 3 (ゲームの逆元)**.** $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とする．再帰的に，$-G = \{-G_1^R, -G_2^R, \ldots, -G_l^R \mid -G_1^L, -G_2^L, \ldots, -G_k^L\}$ と定義する．$G + (-H)$ を $G - H$ とかくこととする．

定義 4 (ゲームの帰結類)**.** ゲームの局面の集合 $\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ を以下のように定義する．$G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とし，$\mathcal{G}^L = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L\}, \mathcal{G}^R = \{G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$．とする．$G^L, G^R$ をそれぞれ，$\mathcal{G}^L, \mathcal{G}^R$ の元とする．

1 国立情報学研究所
National Institute of Informatics, Chiyoda, Tokyo 101–8430, Japan
a) suetsugu.koki@gmail.com

$$\mathcal{P} = \{G \mid (\forall G^L(G^L \in \mathcal{N} \cup \mathcal{R})) \wedge (\forall G^R(G^R \in \mathcal{N} \cup \mathcal{L}))\}$$
$$\mathcal{N} = \{G \mid (\exists G^L(G^L \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L})) \wedge (\exists G^R(G^R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}))\}$$
$$\mathcal{L} = \{G \mid (\exists G^L(G^L \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L})) \wedge (\forall G^R(G^R \in \mathcal{N} \cup \mathcal{L}))\}$$
$$\mathcal{R} = \{G \mid (\forall G^L(G^L \in \mathcal{N} \cup \mathcal{R})) \wedge (\exists G^R(G^R \in \mathcal{P} \cup \mathcal{R}))\}$$

また，$o(G)$ を $\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ のうち G が属するものと定義する．定義によりこれは唯一に定まる．$o(G)$ を G の帰結類と呼ぶ．

$\mathcal{P}, \mathcal{N}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ はそれぞれ，後手，先手，左，右に必勝戦略がある局面の集合として意味づけることができる．

定義 5 (同型なゲーム)**.** ゲーム G, H の選択肢がすべて等しいとき，G と H は同型であると言い，$G \cong H$ とかく．

定義 6 (同値なゲーム)**.** ゲーム G, H があって，任意のゲーム X に対して $o(G+X) = o(H+X)$ のとき，G と H は同値であるといい，$G \equiv H$ とかく．

定義 7 (ゲームの大小関係)**.**
- ゲーム G, H があって，任意のゲーム X に対して $o(H+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P} \to o(G+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}, o(H+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N} \to o(G+X) \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ を満たすとき，$G \geq H$ とかく．
- ゲーム G, H があって，任意のゲーム X に対して $o(H+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P} \to o(G+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}, o(H+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \to o(G+X) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$ を満たすとき，$G \leq H$ とかく．

$G \geq H \Leftrightarrow H \leq G$ が常に成り立つ．

定理 1. 任意のゲーム G, H に対し，以下が成り立つ．
- $G > 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{L}$
- $G < 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{R}$
- $G \equiv 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{P}$
- $G \mid\mid 0 \Leftrightarrow G \in \mathcal{N}$
- $G > H \Leftrightarrow G - H > 0$
- $G < H \Leftrightarrow G - H < 0$
- $G \equiv H \Leftrightarrow G - H \equiv 0$
- $G \mid\mid H \Leftrightarrow G - H \mid\mid 0$
- $G + 0 \equiv G$
- $G - G \equiv 0$

ただし，$0 = \{|\}$. また，$||$ は $\not\leq$ かつ $\not\geq$ を意味し，比較不能と呼ぶ．

定理 2 (劣位な選択肢の削除)**.** $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とする．$G_1^L \leq G_2^L$ ならば $G \equiv \{G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ である．右選択肢についても同様．

定理 3 (打ち消し可能な選択肢の短絡)**.** $G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ とする．G_1^L のある右選択肢 $H = \{H_1^L, H_2^L, \ldots, H_{k'}^L \mid H_1^R, H_2^R, \ldots, H_{l'}^R\}$ が存在して，$G \geq H$ を満たすとき，$G \equiv \{H_1^L, H_2^L, \ldots, H_{k'}^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ が成り立つ．左右逆の場合についても同様．

これらの定理が成り立つことは，定義をもとに数学的に証明することができる．一方，ゲームとしての意味づけは，劣位な選択肢の削除は，『自分にとってより不都合な選択肢は，どうせ選ばれないのでないものとして考えても影響ない』，打ち消し可能な選択肢の短絡は，『相手の着手に即座に応手して，相手が打つ直前よりも自分にとってよくできるなら，その応手を打たない必要性はない』ということだと考えることができる．

定理 4. $G_1 \equiv G_2$ を満たすゲーム G_1 と G_2 に対して，劣位な選択肢の削除と打ち消し可能な選択肢の短絡を可能な限り適用する．得られたゲームをそれぞれ G_1', G_2' とすると，$G_1' \cong G_2'$ が成り立つ．

このように，劣位な選択肢の削除と打ち消し可能な選択肢の短絡を可能な限り適用して得られたゲームのことを、もとのゲームの**標準形**と呼ぶ．

これらの定理により，ゲームの多くの局面を同一視することができる．また同一視された局面同士は入れ替えても，ゲームの勝敗に影響を与えず，ゲームを解析するうえで意味のある同一視であると言える．

このようなゲームの任意の値を持つ局面が，ある与えられたルールのもとで現れるかどうかは，ゲームがどのくらい複雑な構造を持っているかを表す一つの指標になる．次節ではそのようなゲームについての先行研究を紹介する．

2. 全象ルールとコナネ

定義 8. あるルールの局面として任意のゲームの値が表現できるとき，そのルールを全象（universal）ルールと呼ぶ．

ゲームの値を計算することができれば，そのゲームの必勝戦略をいずれのプレイヤが保持しているのか判定することができる．従って，あるルールの下でどのようなゲームの値を持つ局面が登場するかは，ゲームを解析するうえで注目に値する．一例として，不偏ゲームと呼ばれるゲームのクラスで現れるゲームの値は，すべて Nim というゲームの局面として表現できることが知られている．これまで，全象ルールとしては以下のルールがただ一つ知られていた．

定義 9 (一般化コナネ)**.** 一般化コナネのルールについて説明する．格子状の盤面があり，それぞれのマスは黒駒ないし白駒が一つ置かれているか，空である．プレイヤは黒と白に分かれ，交互に着手する．可能な着手は，隣接する相手の駒を飛び越えるという手であり，飛び越えた先のマスは空でなければならない．また，二つ以上の連続する駒を飛び越えたり，自分の色の駒を飛び越えたりすることはできない．飛び越えた後で，その駒がまた相手駒と隣接しており飛び越えられる場合は，方向転換をしない場合のみ，続けて同じく相手の駒を飛び超え続けることができる．飛び越えられた駒は盤上から消える．最後の着手を打ったプレイヤの勝ち（動かせなくなったプレイヤの負け）である．

なお,『一般化』とある理由は，もとのハワイのゲームで

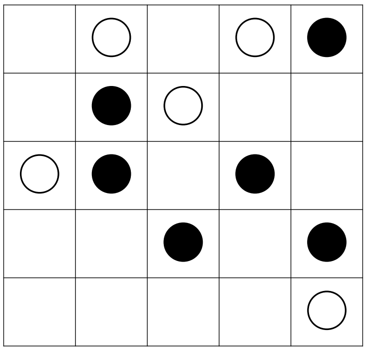

図 1　一般化コナネの局面の一例

あるコナネにおいては，黒駒と白駒の置かれうる場所が市松模様状に定まっており，この制限をなくして議論を行うことで以下の全象性の証明ができるからである．

定理 5 ([1])．一般化コナネは全象ルールである．

3. タイル返し

これまで，コナネは唯一全象なルールとして知られていた．本稿では，『**タイル返し**』と呼ばれるルールを定義し，本ルールが全象ルールであることを示す．

定義 10 (タイル返し)．タイル返しのルールを定義する．タイルが敷き詰められており，その色は青，赤，黒のいずれかである．青と赤のタイルは裏返すと黒になる．ある黒タイルの上に駒が乗っている．プレイヤは，青プレイヤと赤プレイヤに分かれる．着手は駒を取り，自分の色のタイルが続いている限り，任意の方向に好きなだけ動かしてよいというものである．途中で方向転換をすることはできない．駒が通過したタイルは裏返り，黒タイルになる．着手できなくなったプレイヤの負けである．

図 2 にタイル返しで表現される単純な値をいくつか紹介する．白黒表示される場合に備え，赤タイルには点を打っておく．なお，ゲームの値の詳しい意味については参考文献を参照いただきたい．

駒の数は複数でも遊ぶことができるが，以下では駒の数は一つとして考察する．駒の数を一つとして考えても，以下の定理が成り立つ．

定理 6．タイル返しは全象ルールである．

Proof.　一般化コナネの全象性の証明 [1] を参考に，タイル返しの全象性も証明することができる．再帰的手法を用いて証明する．$G = \{G_1^L, G_2^L, \ldots, G_k^L \mid G_1^R, G_2^R, \ldots, G_l^R\}$ について，すでにそれぞれの選択肢はタイル返しの局面として表現できていると仮定して，G をタイル返しの局面として表現する．

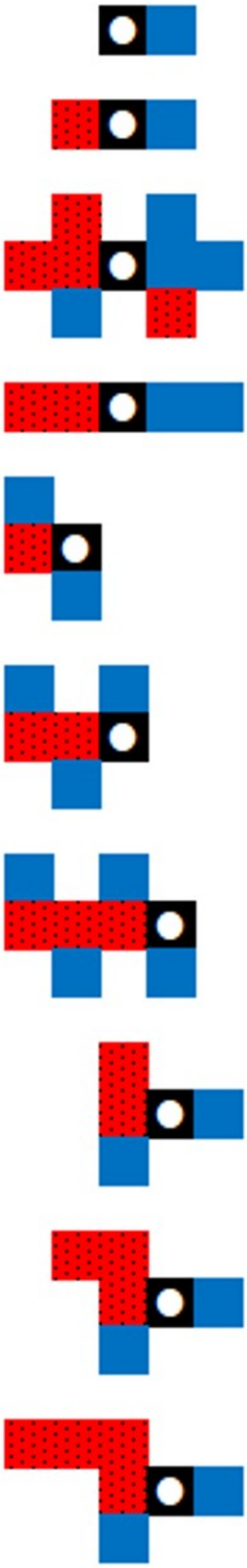

図 2　タイル返しで表現するいくつかの単純な値．
上から $1, *, *2, \pm 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \uparrow$, タイニー 1，タイニー 2

図 3 はその概要図を示す．L の字型に局面は広がってお

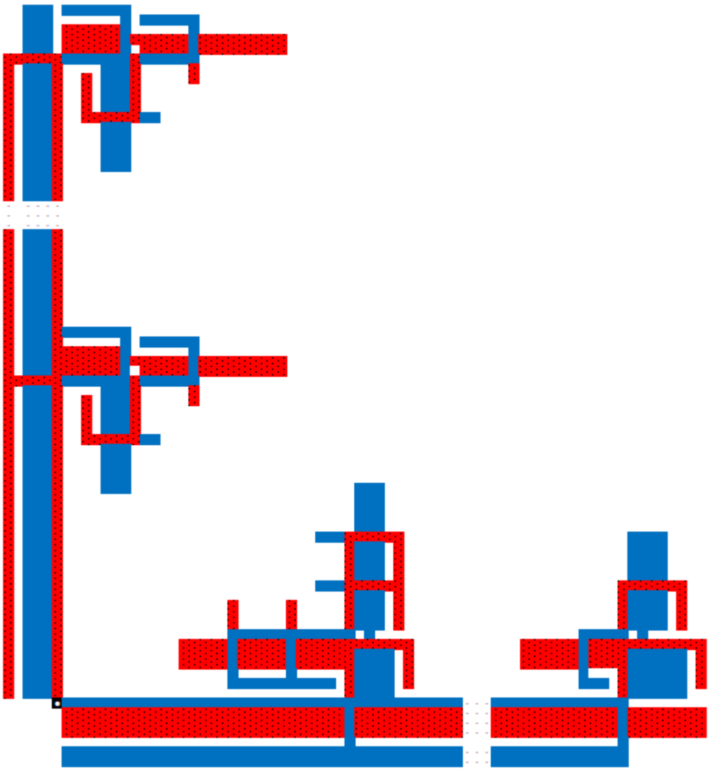

図 3　局面の再帰的構成

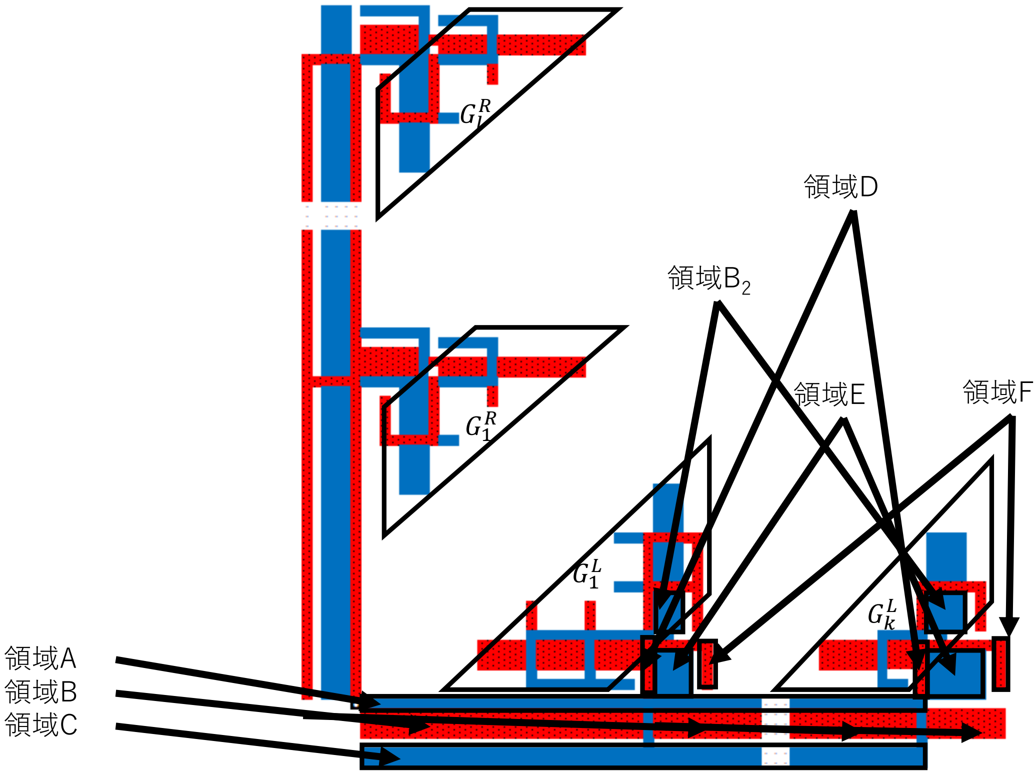

図 4　各領域の名前

り，それぞれの選択肢の値を持った局面が接続されている．図 4 は，図 3 のいくつかの領域に，証明を行うための名前を付けたものである．また，それぞれの領域 D の下にある青タイルを接続点，上にある点を再帰点と呼ぶ．再帰点に駒が到達したら，ゲームの局面はそれぞれの選択肢となるように設計されている（厳密には完全に分離されないが，つながっている部分はその色のプレイヤーが用いる必要のないよう，領域 B_2 が十分大きく設計されている）．このゲーム全体の値を仮に X と置き，$X - G \in \mathcal{P}$，すなわち，$X - G$ が後手必勝ゲームとなることを示すことで，主張を証明する．一般性を失わず，簡略に証明するために，左が先手で X に着手すると右が勝つことと，右が先手で $-G$ に着手すると左が勝つことを示す．左の色を青，右の色を赤とする．

以下の議論を成り立たせるために，図における領域 B, B_2, C, E, F の大きさは十分大きくとっておく．

まず，左が初手で X に着手したとき右が勝つことを示す．
- 初手で左が駒を領域 A で，接続点やその隣ではない場所に移動させた場合，右は次の着手で駒を領域 B に移動させる．領域 B の中では左が着手できない状態で手を打ち続けられるので，この領域が十分大きければ右が勝つ．
- 初手で左が駒を領域 A の，接続点の隣に移動させた場合は，右は次の着手で駒を 2 マス，領域 B 内に移動させる．左がここで $-G$ に着手すれば右は領域 B に着手し続けることで勝つことができる．また左が駒を 1 マス移動させることはできるが，右は応手として，直前にいたのと逆側の領域 B に駒を動かし，その後も領域 B に着手し続けることで勝つことができる．
- 次に初手で，ある $-G_i^L$ が接続している接続点に左が駒を動かしたと仮定する．このとき，右は進められるだけ駒を移動する．ここで，左が 1 マスも駒を動かさなかった場合（すなわち，$-G$ に着手した場合），右は領域 F に駒を移動する．領域 F は十分大きいと仮定しており，ここに着手し続けることで右は勝つことができる．
- 左が 1 マス動かした場合は，帰納的定義より局面がある左選択肢 G_i^L に変わる．よって右は $-G$ を $-G_i^L$ に変えて，ゲームの値は $G_i^L - G_i^L \equiv 0$ となり，これは後手に必勝手順があるので，右が勝つことができる．

次に，右が初手で $-G$ に着手して $-G_i^L$ に変えたとする．
- 左は X に着手し，駒を $-G_i^L$ が接続されている接続点に動かす．ここで，右が $-G_i^L$ に続けて着手すると，左は領域 C に駒を動かす．領域 C は十分大きいと仮定しているので，領域 C に着手を続けて左は勝つことができる．
- 左の着手に対し，右が駒を領域 D の，奥から 3 番目までの点に移動させたとする．このとき，左は駒を領域 E に動かす．領域 E が十分大きいので，左はここに着手し続けることで勝つことができる．
- 右が領域 D の奥から 2 番目の点に移動させたとする．このときは左が領域 E に 2 マス移動させることで，右が $-G_i^L$ に着手すれば左は領域 E に打ち続けることができ，また右が駒を 1 マス移動させれば，左はさらに駒を 1 マス移動させることで，その後 G_i^L に対する領域 B（B_2）に打ち続けることができ，勝つことができる．
- 右が領域 D の最も奥まで駒を動かせば，左は駒を 1 マス動かし，再帰点に到達する．するとゲームの値は $G_i^L - G_i^L \equiv 0$ となり，これは後手に必勝手順があるので，左が勝つことができる．

以上により，$X - G \in \mathcal{P}$ が示された．

□

4. Go on lattice と帰着的手法

ある問題の複雑さを示すために，すでに複雑であることが知られている問題を用意して，その問題と同等かそれ以上に複雑であることを示すことで，元の問題の複雑さを証明する手法がある．これを帰着的手法と呼ぶ．このような手法は計算複雑性の証明においてしばしば用いられるが，本稿ではゲームの全象性を証明するためにこのような手法を利用する．以下に新たなルール Go on lattice を定義し，これが全象であることを帰着的手法を用いて証明する．

定義 11. *Go on lattice* のルールを以下のように定める．
- 格子状の盤面があり，格子点上に駒が置かれている．また，各辺は色付けられており，青，赤，および点線辺の 3 種が存在する．
- プレイヤは駒を好きな方向に好きなだけ進めることができるが，点線辺か自分の色の辺上を通らなければならず，途中で方向転換はできない．また，点線辺は各着手の最初の一本目でなければ通れない．
- 一度通過した頂点は通過済みとなり，二度と通過できない．
- 最後の着手者が勝者である．

図 5 は Go on lattice の局面の一例である．白黒表示される場合に備え，赤線は二重線にして表している．

定理 7. *Go on lattice* は全象ルールである．

Proof. 任意のタイル返しの局面に対して，Go on lattice の局面を以下のように構成する．
- 青，赤，ないし黒のタイルに対応して，格子状に頂点を用意する．黒タイルに対応する頂点は，すでに通過済みとして扱う．
- 青同士，赤同士の隣接に対応して，青辺，赤辺を用意し，青と赤の隣接に対応して，点線辺を用意する．黒タイルとの隣接には辺を用意しない．

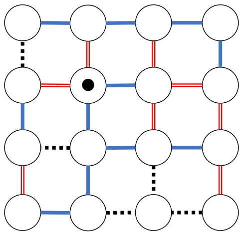

図 5　Go on lattice の局面

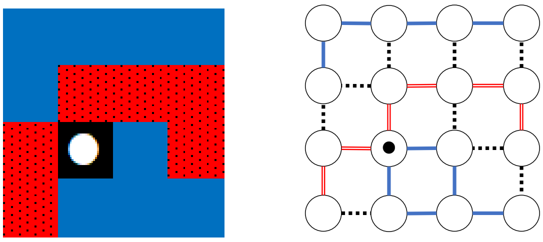

図 6　帰着の例

- 駒があるタイルに対応する頂点に駒を置く．

図 6 は局面の対応の一例である．

このとき，タイル返しで同色のタイル上を駒が移動する着手は，Go on lattice において同色の辺上を駒が移動する着手に対応する．また，一手目の着手は，タイル返しにおいては異なる色同士の隣接で行われるが，この着手とは Go on lattice における点線辺が対応している．

従って，もとのタイル返しの局面のゲーム木と，対応させて作った Go on lattice の局面のゲーム木は等しくなり，二つの値は等しくなる．任意の値を持つタイル返しの局面が存在するため，任意の値を持つ Go on lattice の局面も存在し，Go on lattice は全象となる．　□

5.　まとめと今後の課題

本研究では，一般化コナネに次ぐ全象ルールとしてタイル返しにも全象性があることを証明し，よりゲームの値に関する研究を深めることができた．一般化コナネに類似する手法で全象性を証明できたことで，ほかにも同様の形で全象性を証明できるルールが存在する可能性を示唆している．一方で，囲碁やドミナリング，ドミノ倒しなど，組合せゲーム理論で扱うことができるゲームの種類は多岐に及んでいることが知られており，同様の手法を用いることができないゲームに別種のアプローチが必要であるだろうことが考えられる．また，一般化コナネやタイル返しの全象性を利用し，あるルールが一般化コナネ（タイル返し）の任意の局面をシミュレートできることを示して，そのゲームの全象性を証明するような手法も考えられる．これは計算複雑性を判定する際の帰着的手法に似た考え方であり，知見が応用できる可能性もあるが，現在のところ，Go on lattice しかこのような手法では発見できていないため，より非自明なルールの全象性の証明に挑戦したい．

参考文献

[1] Carvalho A., Dos Santos C. P., *A nontrivial surjective map onto the short Conway group*, Games of No Chance 5, 70, 271(2019).

[2] Albert M. H., Nowakowski R. J., Wolfe D., 川辺治之訳：組合せゲーム理論　勝利の方程式， 共立出版 (2011).

[3] Siegel A. N.: *Combinatorial Game Theory*, American Mathematical Society(2013).