不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル

木谷 裕紀[1,a)]　大渡 勝己[,b)]　小野 廣隆[1,c)]

概要：単貧民とは，不完全情報多人数ゲームである大貧民を完全情報ゲームとして簡易化したものである．これまでの研究により，二人単貧民に関しては配られた手札からどちらが必勝プレイヤであるかどうかを線形時間で判定できることがわかっている．本研究では手札非公開で行う不完全情報単貧民において如何に「必勝戦略」を得るかについて考える．手札に関する情報が全くない場合，確定的な意味で「必勝戦略」を得ることは難しい．このため，本研究では相手の手札に関する部分的な情報を提供するオラクルの存在を許したモデルを定義し，そのオラクル存在下で必勝戦略が得られるかどうかについて考察する．相手がどの札を持っているかなどの情報がない状況でも，マッチング数と呼ばれるゲームの構造パラメータを得るオラクルさえあれば完全情報単貧民と同様の必勝戦略をとることができるなど，オラクルの強さと必勝戦略発見可能性に関する様々な結果が得られることを示す．

Oracle Models for analyzing imperfect information two-player TANHINMIN

KIYA Hironori[1,a)]　OHTO Katsuki[,b)]　ONO Hirotaka[1,c)]

Abstract: TANHINMIN is a simplified and perfect information variant of DAIHINMIN game, which is major playing card game in Japan. We know that it can be decided in linear time which player has a winning strategy in 2-player TANHINMIN game. This study is concerned with how we obtain a "winning strategy" for imperfect information variant of TANHINMIN game. If any information about the opponent player's hand is not given at all, it is obviously difficult to find a winning strategy, though such a hard situation does not likely happen in real game plays; players usually receive some little information about the opponent player's hand, e.g., the number of cards. To handle the situation that a player can receive some information about the opponent player's hand, we introduce an oracle model in which the oracle provides partial information about the opponent's hand. Interestingly, if the oracle provides only some structural information about the game with no information about opponent player's cards themselves, the winning player can find a winning strategy as if it is the (perfect information) TANHINMIN. Furthermore, we show various results about other relationships between the power of oracles and the existence of a computable winning strategy.

1. はじめに

大貧民は日本で遊ばれるトランプカードゲームの中でも認知度，人気が高い遊びである．近年，将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に，大貧民のような不完全情報ゲームの研究も進んでいる．2006 年度から毎年コンピューター大貧民大会が電気通信大学で開催され，「強い」大貧民 AI の開発を競う場となっている．2015 年，プロ棋士に対する勝利宣言が出された将棋同様，日々コンピューター大貧民 AI の実力も向上しているがまだまだ成長の余地がある [1], [3], [4].

このような大貧民研究の一環として電気通信大学の西野は単貧民というゲームを定義した [5]．単貧民は大貧民に

- 特殊ルールが一切存在しない，
- 1 枚出しのみを認める，
- 手札は公開で行われる，

という制約を課したものであり，大貧民を単純化し，かつ

[1] 名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻
Department of athematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University
[a)] kiya.hironori@f.mbox.nagoya-u.ac.jp
[b)] katsuki.ohto@gmail.com
[c)] ono@i.nagoya-u.ac.jp

完全情報化したものと言える．著者らはこれまで特殊ルールまで拡張した単貧民においての具体的な必勝判定及び必勝戦略を与える研究を行ってきた [2]．

本研究では単貧民をより通常の大貧民に近づけるために単貧民ゲームに**不完全情報性**を導入した**不完全情報単貧民**，つまり基本的にはお互いの手札が全く分からない単貧民の必勝判定を考える．まず，このゲームにおいて最善手が確定できない場合があることを示す．また，単貧民において，完全情報性がどのくらいゲームを簡単にしているかを確かめるために相手手札の部分的な情報を与えるオラクルを導入する．本研究の目的はどのような情報を与えるオラクルがあれば最善手の特定が可能かあるいは完全情報単貧民の最善手における本質となるものは何かを考えるものである．

2. 問題

2.1 単貧民のルール

まず本研究の基礎となる二人単貧民を以下のようにモデル化する: 各プレイヤの**手札集合**を $[N] = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合の形で与える．プレイヤに配布された札 (**手札**と呼ぶ) の札数は必ずしも等しくなくてよい．札の番号は強さを表し，大きいほど強いものとする．この設定の下，以下の形でゲームを進める．

- 先手後手を決め，**先手プレイヤ**，**後手プレイヤ**の順に交代で，手札から**場**に 1 枚ずつ札を出していく．
- 場は最初，空である (0 の札がおかれていると考える)．
- 順番のプレイヤは，手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を 1 枚出すことができる．出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる (場に出ている札は今出した札に代わる)．この場合，順番はもう一人のプレイヤに移る．
- 順番のプレイヤは，手札を出さずに順番をもう一人のプレイヤに譲ることができる (**パス**する，という)．この場合場に出ている札は空になる (改めて，0 の札がおかれる)．
- いずれかのプレイヤの手札がなくなった時点で終了であり，この場合手札を 0 枚にしたほうが勝ちである．

ゲームを通して順番は交互に移るが，それぞれの手札を出すタイミングを**手番**，ある時点で順番が来ているプレイヤを**手番プレイヤ**，もう一人のプレイヤを**相手プレイヤ**と呼ぶ．また場が空の状態からいずれかのプレイヤがパスをするまでを**巡**と呼ぶ．

2.2 諸定義

P_0 を初期手番プレイヤ，P_1 を初期非手番プレイヤとする．初期手番プレイヤ (以下では単に先手と呼ぶ) の手札集合を $X_0 \subseteq [N]$，初期非手番プレイヤの手札集合を $X_1 \subseteq [N]$ とする．また場に最後に出された札を r とする．まだ札が出されていない空場では仮想的に 0 の札が置かれているものとする．この場合，任意の手番に対して，以下のような二部グラフを定義する: $G_0 = (X_0, X_1 \cup \{r\}, E_0)$，ただし，$E_0 = \{\{i, j\} \mid i \in X_0, j \in X_1 \cup \{r\}, i > j\}$．つまり，$G_0$ は，プレイヤ P_0 の全ての手札と場の札の各札を点としたグラフであり，プレイヤ P_0 の各手札から，その札が勝てるプレイヤ P_1 の手札へ辺を引く形で定義されている．このように定義したグラフ G_0 においてマッチング辺は，プレイヤ P_1 が出した札に対してプレイヤ P_0 が札を出す関係を表しており，ゲームが進むことはそれぞれのグラフにおいてマッチング辺 (と両端のノード) が抜かれていく状況を表している．本研究で提案する判定法ではこれを利用するため，G_0 の最大マッチングのサイズ $\mu_{(G_0)}$ を定義する．また，後に示す定理において単貧民における必勝戦略保持者は P_1 の最弱札を除いたグラフにおける最大マッチングのサイズにも影響されることを示していく．従って P_1 の最弱札を除いたグラフにおける最大マッチングのサイズを $\mu_{(G_0 \setminus \{\min X_1)\}}$ と表記する．ただし，$\{\min X_1)\}$ は $|P_1|$ の手札集合で最も弱い札 (そのような札が複数枚あればその中から一枚) である．また同様に以下のような二部グラフを定義する: $G_1 = (X_1, X_0, E_1)$，ただし，$E_1 = \{\{i, j\} \mid i \in X_1, j \in X_0, i > j\}$．つまり，$G_1$ は，プレイヤ P_1 の全ての手札と P_0 の最弱札を除く全ての札と場の札の各札を点としたグラフであり，プレイヤ P_0 の各手札から，その札が勝てるプレイヤ P_1 の手札へ辺を引く形で定義されている．G_0 と同様に G_1 の最大マッチングのサイズ $\mu_{(G_1)}$，$\mu_{(G_1 \setminus \{\min X_0)\}}$ を定義する．ただし，$\{\min X_0\}$ は $|P_0|$ の手札集合で最も弱い札 (そのような札が複数枚あればその中から一枚) である．

本研究での証明には，この単貧民ゲームにおいて以下の命題が成立することを利用する [2]．

命題 1. 単貧民ゲームにおいて P_0 の手番において，$\mu_{(G_0 \setminus \{\min X_1)\}} > \mu_{(G_1 \setminus \{\min X_0)\}}$ が成立する場合 P_0 は必勝戦略を持つ．成立しない場合，P_1 は必勝戦略を持つ．

また以下の命題も成立する．

命題 2. $x_i > x_j$, $x_i \in X_0$, $x_j \in X_1$ を満たす x_i, x_j が存在する場合，任意の x_j に対して，$x_i > x_j$, $x_i \in X_0$, $x_j \in X_1$ を満たす最小の $x_i{}^*$ をとることができ，$G_0 = (X_0, X_1, E_0)$ において，辺 $(x_i{}^*, x_j)$ を含む最大マッチングが存在する．

この命題から相手の出した札に対して出すことのできる最小の札を場に出すことによるグラフの最大マッチング数の減少は高々 1 であることが導かれる．この証明も本研究では省略する．

また，本研究ではオラクルをプレイヤが受け取ることにより必勝判定可能な局面を示す．$\mu_{(G_0 \setminus \{\min X_1\})}$ を受け取ることができるオラクルを μ_0 オラクル，$\mu_{(G_1 \setminus \{\min X_0\})}$ を受け取ることができるオラクルを μ_1 オラクル，プレイヤの手札集合のサイズを受け取ることができるオラクルを

$|X_i|(i=0,1)$ オラクルとする．

3. 不完全情報ゲームにおける必勝戦略の計算可能性

単貧民の解析は著者らの過去の研究によって必勝プレイヤ判定の意味で，完全に解明されている [2]．一方，単貧民研究の契機となった大貧民自体は完全情報ではないため，大貧民における戦略設計の観点から見るとその成果は限定的である．また，完全情報ゲームにおける結果を不完全情報ゲームに適用することは一般には困難である．例えば，不完全情報二人単貧民において以下の定理が成り立つ (証明は 4 節にて与える)．

定理 1. 不完全情報二人単貧民において，いずれのプレイヤも必勝戦略計算不可能な局面が存在する．

ここで，あるプレイヤが**必勝戦略計算可能**とは，相手プレイヤがどのような戦略をとったとしても，勝つことができる手順が存在し，かつそれらの手順のうち少なくとも一つを与えられた情報から計算できる (アルゴリズムが存在する) ことを表す．またそうでないことを**必勝戦略計算不可能**という．任意の引き分けのない完全情報有限確定ゲームではいずれかのプレイヤが必勝プレイヤ，つまり相手がどのような戦略をとったとしても勝つことができ，かつ (現実的な実行時間で計算できるかはともかく，理論上は) 計算可能であるため，必勝戦略計算可能である [6]．定理 1 は単貧民を不完全情報ゲームへ一般化すると，必勝戦略や必勝プレイヤが存在しないことがあることを意味している．さて，単貧民のもとになった一般の大貧民自体は完全情報ゲームではない．しかし，全く情報がないゲームとして遊ばれることも稀である．例えば，大貧民においては通常トランプのカードを用いられるため，自分の手札に Q の札が 4 枚あるなら他プレイヤの手札には Q の札が存在し得ない．あるいは Q の札が手札に 3 枚あるなら他プレイヤの手札内には Q の札は高々 1 枚しかないなど様々な推測可能な「情報」が存在する．つまり，一般の大貧民は他人の手札に関する情報が全くないゲームではなく，部分的な情報が与えられているゲームとみなすことができる．以上のような状況を実現する目的の下，本研究ではそのような部分的な情報を形式的に与える**部分情報オラクル** (以下，単に**オラクル**とも呼ぶ) を導入する．

本研究では $|X_i|$ オラクル $(i=0,1)$, μ_i オラクル $(i=0,1)$ という大きく分けて二種類のオラクルを扱う．$|X_i|$ オラクル $(i=0,1)$ は集合のサイズ，つまり手札の枚数を返すオラクルである．手札の枚数は大貧民のゲーム中においても容易に入手可能な情報である．μ_i オラクル $(i=0,1)$ は最大マッチングのサイズを返すオラクルである．最大マッチングのサイズは完全情報単貧民では，与えられた情報から両者の最大マッチングのサイズを計算することにより，勝者を確定できる [2]．本研究では，μ_i オラクル $(i=0,1)$ のみを与えた場合の検証を行う．

これらのオラクルを導入した単貧民において，次の二つの定理が成立する．

定理 2. 不完全情報二人単貧民において，ゲーム開始時に両プレイヤが μ_0 オラクル，あるいは μ_1 オラクルのどちらかの情報を得たとき，いずれかのプレイヤは必勝戦略計算可能である．

定理 3. 不完全情報二人単貧民において，ゲーム開始時に両プレイヤが μ_i オラクル，$|X_i|$ オラクル $(i=0,1)$ の両方を得ても，いずれのプレイヤも最善手決定不可能な局面が存在する．

ここで最善手決定可能とはゲーム中に自身に必勝戦略が存在する場合，その局面において必勝戦略をたどることができることを言う．また，そうでないことを最善手決定不可能であることを言う．

この定理 2 はマッチングと自分の手札の初期状況のみで初期局面が必勝戦略を持つならばその最善手を遂行可能であることを意味している．一方で定理 3 は初期局面に必勝戦略を持っているプレイヤがミスをすることにより，相手プレイヤに必勝手が生まれた局面において，そのような最善手を一意に発見することはできない場合があることを示している．また，定理 2 から容易に次の系を示すことができる．

系 1. 毎手番開始時に μ オラクルが与えられる不完全情報二人単貧民において，$\mu_{(G_0)} > \mu_{(G_1)}$ の場合，P_0 は必勝戦略を持つ．$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1)}$ の場合，P_1 は必勝戦略を持つ．

この系は毎手番開始時にオラクルを受け取ることで相手プレイヤのゲーム中のミスにつけ込むことができることを意味している．このように本研究ではオラクルの導入により，不完全情報単貧民に追加の部分情報オラクルを加え，最善手の発見可能性がどのように変わるかを考察する．本研究の結果をまとめたものが図 1 である．ここで μ は自

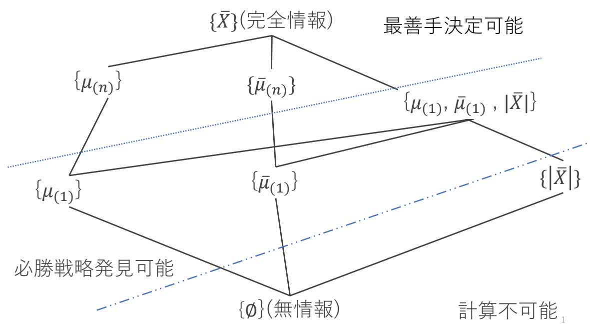

図 1 部分情報オラクルと必勝戦略計算可能性の関係

身から見た最大マッチング数，$\bar{\mu}$ は相手プレイヤから見た最大マッチング数，$\bar{X}$ は相手の手札集合，$|\bar{X}|$ は相手の手

札集合のサイズの大きさ，すなわち相手の手札の枚数を表す．また，$\mu_{(1)}$ はゲーム開始時に一度だけ最大マッチングのサイズを聞くことができるゲームを示し，$\mu_{(n)}$ は最大マッチングのサイズを何度でも聞くことができるゲームを表す．この図を見る通り，相手プレイヤ手札集合のサイズのオラクルが最善手決定に大きな影響を与えない．また，最大マッチングを毎ターン受け取るゲームにおいては完全情報と同じようにゲームをすることが可能であることがわかる．前述のように全く相手プレイヤの手札に関して情報がない場合や手札集合のサイズのみ分かっている単貧民においては必勝戦略は発見不可能である．本研究ではさらに本研究ではさらに，こういった条件における単貧民において取りうる戦略の有効性についても検証する．

Algorithm 1 最小札戦略

1: 空場の場合，出すことができる札のうち強さ最小の札 (複数枚ある場合はそのいずれか) を出す．
2: 場に札が存在する場合，場の札に対して勝つことができる札が手札にあれば，場に出すことができる手札のうち強さ最小の札 (複数枚ある場合はそのいずれか) を出す，なければパスをする．

Algorithm 2 最小二番目札戦略

1: 自身の手札が残り一枚の場合，場に札を出すことができればその札を場に出す．なければパスをする．
2: 空場もしくは強さ最小の札が勝つことができる札が場においてある場合，出すことができる札のうち強さ最小の札を除いた札 (1枚) の中で最も弱い札 (複数枚ある場合はそのいずれか) を出す．
3: 1 に該当しない場合，場の札に対して勝つことができる札が手札にあれば，場に出すことができる手札のうち強さ最小の札 (複数枚ある場合はそのいずれか) を出す，なければパスをする．

これらの戦略に関して以下が成立する．

定理 4. 不完全情報二人単貧民において，最小札戦略を用いることにより，P_0 の手番において，(1)$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1)}$ が成立する場合，P_0 は必勝戦略を持つ．(2)$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，P_1 は必勝戦略を持つ．

定理 5. 不完全情報二人単貧民において，$|\bar{X}| = 1, 2$ の場合，P_0 の手番において，(1)$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，最小二番目札戦略を用いることにより，P_0 は必勝である．(2)$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，最小二番目札戦略を用いることにより，P_1 は必勝である．

これらの定理は，P_0 または P_1 が一定の条件が満たされたゲームにおいて上記戦略を用いることにより，必勝戦略をとることができることを示している．本研究 4 節にて定理 4 の証明を行う．また，定理 4 は定理 1 で述べられている必勝戦略計算不可能な局面が $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ 内に限られていることを示している．

4. 証明

本節では，3 節で紹介した定理の証明を与える．

4.1 定理 1 の証明

証明. 具体的な局面を記述する．場を空場とし，P_0 の手番とする．P_0 の初期手札集合を $\{2, 3\}$ とする．この場合，完全情報であれば P_0 に必勝手が存在する P_1 の手札として $\{1, 2, 5\}$ や $\{2, 2, 3\}$ が挙げられるが，P_1 の手札がこの 2 つのいずれかであるか限定しても，どちらであるかにより P_0 の必勝手が異なることを下記では示す．

まず，$X_1 = \{1, 2, 5\}$ の場合は，P_0 は 2 を出すことによって，P_1 の対応手に関わらず勝つことができる一方，3 を出した場合その対応手として，P_1 が 5 を出すと P_0 はパスをせざるを得ない局面になる．ここで，P_1 が 2 を出すことによって再び P_0 はパスをせざるを得ないため，その後 P_1 が 1 を出して P_1 の勝ちとなる．従ってこの場合，P_0 にとって，2 を出すことが最善手である．

これに対し，$X_1 = \{2, 3, 3\}$ の場合，P_0 は 3 を出すことによって，P_1 の対応手に関わらず勝つことができる一方，2 を出した場合その対応手として，P_1 が 3 を出すと P_0 はパスをせざるを得ない局面になる．ここで，P_1 が 3 を出すことによって再び P_0 はパスをせざるを得ないため，その後 P_1 が 2 を出して P_1 の勝ちとなる．従ってこの場合，P_0 にとって，3 を出すことが最善手である．

各プレイヤが相手プレイヤの情報を何も受け取っていない場合，上記 2 局面は区別不可能であるため，この局面は P_0 は必勝戦略を持たない．一方で P_0 の手の選択によっては自身の応手によらず負けるため，P_1 も必勝戦略を持たない．以上より本定理は示された． □

4.2 定理 2 の証明

本節では定理 2 を示す．定理 2 は以下の二つの補題が成立すれば，定理は成立する．

補題 1. 不完全情報二人単貧民において，ゲーム開始時に P_0 が μ_1 オラクルを得るならば，ゲーム開始時に (1)$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ の場合，P_0 は必勝戦略を持つ．ゲーム開始時に (2)P_1 が μ_0 オラクルを得るならば，ゲーム開始時に $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ の場合，P_1 は必勝戦略を持つ．

補題 2. 不完全情報二人単貧民において，ゲーム開始時に P_0 が μ_0 オラクルを得るならば，ゲーム開始時に $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，P_0 は必勝戦略を持つ．ゲーム開始時に P_1 が μ_1 オラクルを得るならば，ゲーム開始時に $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，P_1 は必勝戦略を持つ．

以下では補題 1 のみの証明を行う．補題 2 の証明に関しても補題 1 とほぼ同様の証明により，示すことができるた

め，本稿では省略する．

補題 1 の証明． 得られたオラクルの値を Algorithm 3 に従って出していくことにより，それが必勝戦略であることを μ_0 オラクル，μ_1 オラクル (以降 α とする) に関する帰納法を用いて示す．

Algorithm 3 マッチングオラクルアルゴリズム

初期値として $\alpha := \bar{\mu}$(オラクルで受け取った値) とする．
自分の手番時，強さ最小の札が場に出せる場合 (空場など)，手札の枚数が $\alpha+1$ 枚以内の場合，最小の札を場に出す．手札の枚数が $\alpha+2$ 枚以上の時，強さ二番目の札を出す．自分の手番時，強さ最小の札が場に出せない場合，場に出すことができる最小の札を出す．場に出すことができる札がない場合，パスを選択し，$\alpha := \alpha+1$ とする．
相手の手番時，相手が場に札をだした場合，$\alpha := \alpha-1$ とする．

ここで $\alpha := \alpha-1$ は，相手がマッチングに従って出した場合, 最低でも最大マッチングが 1 減少することに対応している．また，$\alpha := \alpha+1$ は空場へのマッチングにより増えるマッチング数は高々 1 であることを示している．**基礎ステップ**

(1)P_0 の手番において $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ が成立する場合，P_0 が場の札に対して勝つを手札に保持しているか否かによってさらに場合分けを行う．

(1-1)P_0 **が場の札に対して勝つ札がある場合**: 手札が残り 1 枚であるかどうかによってさらに場合分けを行う．

(1-1-a) **手札が残り一枚である場合**: その札を出すことによって勝利することができるのでこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ．(1-1-b) **手札が残り二枚である場合**: P_0 は勝てる札の中から強さ最小の札を除く札を選んで (強さ最小の札が勝てる場の札に対してはほかの札も勝てるため) 出すことができる．札を出した直後の P_1 の手番において，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ が成立するので，P_1 は場の札に対して勝てる札を持っていない．従って，P_1 はパスを選択し，空場において再び P_0 の手番となる．P_1 の手札内には P_0 の強さ最小の札以外の手札に対して勝てる札が一枚もないため，P_0 はゲーム終了まで最小の札を出し続け，勝つことができる．従ってこの場合も，P_0 が必勝戦略を持つ．最後に手札残り 1 枚になった場合その札を出すことにより P_0 が勝つことができる．従ってこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ．

(1-2)P_0 **が場の札に対して勝つ札がない場合**: P_0 はパスを選択し，場の札は空になり P_1 の手番になる．P_0 が場の札に対して勝つ札がない場合，P_0 はパスを選択し，場の札は空になり P_1 の手番になる．$|X_1| > 1$ が成立するため，P_1 は 2 枚以上の手札から選んで手札を出すことになる．一方で $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} = 1$ が成立しており且つ P_0 が場の札に対して勝つ札がなかったことから，P_1 の手札内には少なくとも 2 枚は P_0 の強さ最大の札よりも弱い札が存在する．これらから，P_1 が空場に出す札に対し，出せない札であればパスを出せる札になれば札を出すことによって P_1 が勝利条件を満たす前に P_0 は札を出すことができる．また，この場合，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ が成立するため，札を出した直後の P_1 の手番において，P_1 は場の札に対して勝てる札を持っていない．従って，P_1 はパスを選択し，空場において再び P_0 の手番となる．P_1 の手札内には P_0 の手札に対して強さ最小の札を除くと勝てる札が一枚もないため，P_0 はゲーム終了まで強さ最小から 2 番目の札を出し続け，勝つことができる．従ってこの場合，P_0 が必勝戦略を持つ．

(2)P_0 **の手番において，**$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ **が成立する場合**: $\mu_{(G_0)} = 0$ が成立する．したがって初期の場の札及び強さ最小札を除く P_1 の手札に対して P_0 の手札の中にはそれより真に強い札はない．従って P_1 は強さ最小の札以外を出し続けることによって P_0 は札を一枚も場に出すことができない．従って $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ が成立する局面も P_1 が必勝戦略を持つ．

帰納ステップ

P_0 の手番において，$k-1 \geq \mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合 (k は自然数)，P_0 は必勝戦略を持ち，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k-1$ が成立する場合，必勝戦略を持つと仮定する．

(1)P_0 **の手番において** $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = k$ **が成立する場合**: 場の札よりも強い札が手札にある場合とない場合で場合分けを行う．

(1-1)P_0 **に手札に場の札よりも強い札がある場合**: Algorithm 3 に従って出す札を決定する場合，α の値は，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = k$ より $\alpha = k$ である．手札の枚数が $\alpha+1$ 枚以内の場合，最小の札を場に出す．手札の枚数が $\alpha+2$ 枚以上の時，強さ二番目の札を出す．この場合，手番は P_1 に移り，補題 2 より $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$ は 1 だけ減少するため，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k-1$ が成立する盤面になる．帰納法の仮定よりこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ局面である．

(1-2) **手札に場の札よりも強い札が手札にない場合**: P_0 はパスを選択せざるを得ない．パスした直後の空場の盤面に対し，P_1 は何かしらの札を出すことになる．この場合，P_1 の出した札が P_0 のすべての手札よりも強い (P_0 のどの手札も勝つことができない札) かどうかでさらに場合分けを行う．

(1-2-a)P_0 **のすべての手札よりも強い (**P_0 **のどの手札も勝つことができない札) が場に出た場合**: P_0 はパスを選択するため，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$ は減少せず，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$=k で再び P_1 が空場で手番となる．この場合 $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$=k が成立するため，このループは高々 (プレイヤ 1 の手札の総数 $-k$) 回しかおきない．(1-2-b)P_0 **がその札よりも強い札を保持している場合**: P_0 は出すことができる最

も弱い札を P_0 は場に出す．この場合，手番は P_1 に移り，補題 2 より $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ は 1 だけ減少するため，$\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} \leq \mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})} \leq k-1$ が成立する盤面になる．帰納法の仮定よりこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ局面である．

従っていずれの場合も P_0 が必勝戦略を持つ．

(2)P_0 の手番において $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} \leq k$ が成立する場合:

P_0 がパスを選択するか否かで場合分けを行う．

(2-1)P_1 がパスを選択しない場合: 直後の盤面は，P_1 の手番となり，$k \geq \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} > \mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ が成立する．従ってこの局面は P_1 が必勝戦略を持つ．

(2-2)P_0 がパスを選択する場合: パスを選択した直後の盤面は，P_1 の手番となる．この場合，P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と α が一致しているか否かでさらに場合分けを行う．

(2-2-a)P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と α が一致している場合: P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と α が一致しているため，$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ は高々 $|X_1|-1 = \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}-1$ である．$k \geq \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} > \mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ が成立する．従ってこの局面は P_1 が必勝戦略を持つ．**(2-2-b)P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と α が一致していない場合:** 空場に対して強さ最小の札を出すと，$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ の値は増加せず，$\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}$ の値も減少しない．従って，再び，P_0 の手番となり，$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} \leq k$ が成立する盤面となる．この局面は高々 P_1 の手札の総数 $-\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ 回しか起きず，(2-1)，あるいは (2-2-a) の状況へ移行することになる．従ってこの局面も P_1 が必勝戦略を持つ．

従っていずれの場合も P_1 が必勝戦略を持つ．以上より本補題は示された． □

4.3 定理 3 の証明

証明． 具体的な区別できない局面を示す．初期盤面を $X_1 = \{2,3\}$ 場札を空とする．また，この場合与えられるオラクルを $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})} = 2$，$\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} = 1$，$|X_0| = 5$ とする．このゲームにおいて以下の進行が与えられたとする．

1. P_0 が場に 4 を出す．
2. P_1 が出す札がないため，パスを選択する．
3. P_1 が 1 を出す．

この局面 (P_1 が 1 を出した局面) において相手の初期手札集合として考えられる集合として，$X_0 = \{1,2,3,3,4\}$ という集合が考えられる．この場合，P_1 が 1 を出した局面において X_0 の手札は $X_0 = \{2,3,3\}$ となり，P_0 は 3 を出すことによってのみ勝つことができる．一方で，この局面において相手の初期手札集合として考えられる集合として，$X_0 = \{1,2,2,4,5\}$ という集合も考えられる．この場合，P_0 は 2 を出すことによってのみ勝つことができる．

このように P_0 は相手の手札集合によって出す札を適切に選択することで勝利することができるがどちらの手が最善手であるかをオラクル情報だけでは区別不可能である．従って本定理は示された． □

4.4 定理 4 の証明

証明． 最小札戦略が条件を満たす場合の必勝戦略であることを $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}, \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}$ に関する帰納法を用いて示す．

基礎ステップ

(1)P_0 の手番において $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1)} = 0$ が成立する場合:

P_0 が場の札に対して勝つ札があるかどうかで場合分けを行う．なお，この場合 $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})} > 0$ より，$X_1 \setminus \{\min X_1\} > 0$ が成立するため，$|X_1| > 1$ が成立することに留意したい．

(1-1)P_0 が場の札に対して勝つ札がある場合:

P_0 は勝てる札の中から強さ最小の札を出すことができる．$\mu_{(G_1)} = 0$ が成立するため，札を出した直後の P_1 の手番において，P_1 は場の札に対して勝てる札を持っていない．従って，P_1 はパスを選択し，空場において再び P_0 の手番となる．P_1 の手札内には P_0 の手札に対して勝てる札が一枚もないため，P_0 はゲーム終了まで最小の札を出し続け，勝つことができる．従ってこの場合，P_0 が必勝戦略を持つ．

(1-2)P_0 が場の札に対して勝つ札がない場合:

P_0 はパスを選択し，場の札は空になり P_1 の手番になる．$|X_1| > 1$ が成立するため，P_1 は 2 枚以上の手札から選んで手札を出すことになる．一方で $\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}$ が成立しており且つ P_0 が場の札に対して勝つ札がなかったことから，P_1 の手札内には少なくとも 2 枚は P_0 の強さ最大の札よりも弱い札が存在する．これらから，P_1 が空場に出す札に対し，出せない札であればパスを出せる札になれば札を出すことによって P_1 が勝利条件を満たす前に P_0 は札を出すことができる．また，この場合，$\mu_{(G_1)} = 0$ が成立するため，札を出した直後の P_1 の手番において，P_1 は場の札に対して勝てる札を持っていない．従って，P_1 はパスを選択し，空場において再び P_0 の手番となる．P_1 の手札内には P_0 の手札に対して勝てる札が一枚もないため，P_0 はゲーム終了まで最小の札を出し続け，勝つことができる．従ってこの場合も，P_0 が必勝戦略を持つ．

従ってこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ．

(2)P_0 の手番において，$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})} = 0$ が成立する場合，$\mu_{(G_0)} = 0$ が成立する．したがって初期の場の札及び任意の P_1 の手札に対して P_0 の手札の中にはそれより真に強い札はない．従って P_1 が場の札に勝つことができる最小の札を出し続ける戦略を続けることによって P_0 は札を一枚も場に出すことができない．従って

$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ が成立する局面は P_1 が必勝戦略を持つ．帰納ステップ

P_0 の手番において，$k-1 \geq \mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1)}$ が成立する場合 (k は自然数)，P_0 は必勝戦略を持ち，$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k-1$ が成立する場合，必勝戦略を持つと仮定する．

(1)P_0 の手番において $k = \mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1)}$ が成立する場合:

場の札よりも強い札が手札にある場合とない場合で場合分けを行う．

(1-1)P_0 に手札に場の札よりも強い札がある場合:

P_0 は出すことができる最も弱い札を P_0 は場に出す．この場合，手番は P_1 に移り，補題 2 より $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$ は 1 だけ減少するため，$\mu_{(G_1)} \leq \mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq k-1$ が成立する盤面になる．帰納法の仮定よりこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ局面である．

(1-2) 手札に場の札よりも強い札が手札にない場合:

P_0 はパスを選択せざるを得ない．パスした直後の空場の盤面に対し，P_1 は何かしらの札を出すことになる．この場合，P_1 の出した札が P_0 のすべての手札よりも強い (P_0 のどの手札も勝つことができない札) かどうかでさらに場合分けを行う．

(1-2-a)P_0 のすべての手札よりも強い (P_0 のどの手札も勝つことができない札) が場に出た場合: P_0 はパスを選択するため，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$ は減少せず，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$=k で再び P_1 が空場で手番となる．この場合 $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$=k が成立するため，このループは高々 (プレイヤ 1 の手札の総数 $-k$) 回しかおきない．

(1-2-b)P_0 がその札よりも強い札を保持している場合: P_0 は出すことができる最も弱い札を P_0 は場に出す．この場合，手番は P_1 に移り，補題 2 より $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$ は 1 だけ減少するため，$\mu_{(G_1)} \leq \mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq k-1$ が成立する盤面になる．帰納法の仮定よりこの局面は P_0 が必勝戦略を持つ局面である．

従っていずれの場合も P_0 が必勝戦略を持つ．

(2)P_0 の手番において $\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = k$ が成立する場合:

P_0 がパスを選択するか否かで場合分けを行う．

(2-1)P_1 がパスを選択しない場合: 直後の盤面は，P_1 の手番となり，$k = \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} > \mu_{(G_0)}$ が (補題 2 より $\mu_{(G_0)}$ が 1 減少するため) 成立する．従ってこの局面は P_1 が必勝戦略を持つ．

(2-2)P_0 がパスを選択する場合: パスを選択した直後の盤面は，P_1 の手番となる．パスを選択した直後の P_1 の手番において，P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と $\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が一致しているか否かでさらに場合分けを行う．**(2-2-a)P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と $\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が一致している場合:** P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と $\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が一致しているため，$\mu_{(G_0)}$ は高々 $|X_1| = \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ である．この場合，$|P_1|$ は最小札を出すことによって再び $\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k$ が成立する局面となる．この場合，さらに場合分けが生じる．**(2-2-a') 再び P_0 がパスを選択する場合:** 再び $|P_1|$ は最小札を出すことによって，$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k-1$ が成立するため，後手必勝である．**(2-2-a") 再び P_0 が場に何かしらの札を出す場合:** その札に勝てる最小の札を出す (できない場合はパスをする) ことによって $\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k-1$ が成立する盤面になるため，この局面は P_1 が必勝戦略を持つ．

したがって P_0 がパスを選択する場合 P_1 が必勝戦略を持つ．

(2-2-b)P_1 の手札の枚数 $|X_1|$ と $\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が一致していない場合，空場に対して強さ最小の札を出すと，$\mu_{(G_0)}$ の値は増加せず，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ の値も減少しない．従って，再び，P_0 の手番となり ,$\mu_{(G_0)} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq k$ が成立する盤面となる．この局面は高々 P_1 の手札の総数 $-\mu_{(G_0)}$ 回しか起きず，(2-1)，あるいは (2-2-a) の状況へ移行することになる．従ってこの局面も P_1 が必勝戦略を持つ．以上より本定理は示された． □

4.5 定理 5 の証明

本節では定理 5 を示す．定理 2 は以下の二つの補題が成立すれば，定理は成立する．

補題 3. 不完全情報二人単貧民において，$|\bar{X}| = 1, 2$ の場合，P_0 の手番において，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，最小二番目札戦略を用いることにより，P_0 は必勝である．

補題 4. 不完全情報二人単貧民において，$|\bar{X}| = 1, 2$ の場合，P_0 の手番において，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} \leq \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合，最小二番目札戦略を用いることにより，P_1 は必勝である．

以下では補題 3 のみの証明を行う．補題 4 の証明に関しても補題 3 とほぼ同様の証明により，示すことができるため，本稿では省略する．

証明. P_0 の手番時 $\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合としない場合それぞれで成立することを示す．

$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} > \mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})}$ が成立する場合:

$|X_1| = 2$ より，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})}$ は高々 2 である．従って不等式の関係より，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} = 1$，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ または，$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} = 2$，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} \leq 1$ が成立する．このいずれにおいても P_0 が最小二番目札戦略をとることによって P_0 必勝であることを以下では示す．

$\mu_{(G_0\backslash\{\min X_1\})} = 1$，$\mu_{(G_1\backslash\{\min X_0\})} = 0$ が成立する場合:

場の札に勝つことができる札が P_0 の手札内にあるかないかでさらに場合分けを行う．

場の札に勝つことができる札が P_0 の手札内にある場合:

最小二番目札戦略により，最小札以外の札を場に出すことになる．一方で，$\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}=0$ より，P_1 は P_0 の最小札以外に勝つことができる札が手札内には無い．従って，P_1 はパスをすることになるが以降も最小二番目札戦略を続けることにより，P_1 は場に札を出すことができない．従って P_0 必勝である．

場の札に勝つことができる札が P_0 の手札内にない場合:

パスを選択することになり，P_1 の手番となる．この場合，$|P_1|$ がいずれの札を出したとしても，$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}=1$ より，最小二番目戦略を用いることで最小札以外の札を場に出すことができる．一方で，$\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}=0$ より，P_1 は P_0 の最小札以外に勝つことができる札が手札内には無い．従って，P_1 はパスをすることになるが以降も最小二番目札戦略を続けることにより，P_1 は場に札を出すことができない．従って P_0 必勝である．

$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}=2$，$\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}=1$ が成立する場合:

$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}=2$，$|X_1|=2$ より場の札に対して必ず勝つことができる札を P_0 は保有している．したがって最小二番目札戦略に従いパスすることなく札を出すことができる．この新しい場札に対し，$|P_1|$ は $\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}\leq 1$ より，高々 1 枚しか場の札に対して勝つことができる札を持っていない．この場合，$|P_1|$ がパスを選択した場合，最小二番目札戦略に従い P_0 が再び札を出すことができ，再び新しい場札に対して $|P_1|$ は高々 1 枚しか場の札に対して勝つことができる札を持っていない，もしくは最後の一枚を P_0 が出した状況 (P_0 が既にすべての手札を出し終えた状況) になる．従っていずれかのタイミングでパスを選択しないで札を出すことをしなければ，P_0 が勝つことになる．従って，いずれかのタイミングで札を出すことを考えるが，初期局面において，$\mu_{(G_0\setminus\{\min X_1\})}=2$，$|X_1|=2$ が成立していたため，最小二番目札戦略に従い札を出していくと，必ず $|P_1|$ が出した札に対して札を出すことができる．その札を最小二番目札戦略に従い出すことによって，$|P_1|$ は $\mu_{(G_1\setminus\{\min X_0\})}\leq 1$ より，場の札に対して勝つことができる札を持っていないため，パスを選択することになる．以降，最小二番目札戦略に従い札を出していくと $|P_1|$ はパス以外選択することができないため P_0 が最後の一枚を出すまでパスを選択することになり，この局面もまた P_0 必勝であることが示された．以上より本補題は示された． □

5. まとめと今後の展望

本研究では不完全情報二人単貧民において追加的に与えられる部分情報が，必勝戦略の計算可能性に与える影響を調べた．まず，定理 1 に示すように情報の不完全性により最善手が特定できない盤面が存在する．この事実により，必勝戦略の考察には何らかの部分情報を与えることが必須となる．このため本研究では部分情報オラクルによる解析を提案するとともに，各種のオラクルの強さにより必勝戦略が得られるかどうかがどのように変わるか調べた．重要な結果として，毎手番マッチングに関するオラクルが与えれる場合，完全情報と同じように常に最善手をプレイできることが分かった．この結果は，必勝戦略を得るのに本質的な情報がカードすべての情報ではなく，むしろマッチングサイズという構造量であることを示唆するものである．その反面，マッチングサイズを毎回得ることができるオラクルの存在は非現実的である．このため，現実のプレイの局面で得られる情報として典型的な「枚数」を表す手札枚数オラクルに関しても議論を行った．その結果，相手の手札枚数が 2 枚以下と分かっている状況においては最善手が打てることが分かった．一方で定理 1 の証明で用いた例のように，相手の手札枚数が 3 枚であったとしても最善手が一つに決定できない局面があるため，手札枚数オラクルの有効性の限界も明らかになった．

最後に，不完全情報ゲームの新しい解析スキームとしてオラクルモデルを提案した点が本研究の重要な貢献の一つであることを主張しておきたい．これまで不完全情報ゲームに対する理論的な解析は著者らの知る限り，混合戦略をはじめ，不確実性を確率を利用してモデル化するものがほとんどであった．これに対し，本研究で提案したオラクルモデルは情報自体の欠落と補填に焦点を置いている．オラクルモデルによる解析はそれ自体が（著者らの知る限り）新しいスキームであり，他の不完全情報ゲーム解析への応用が期待できるが，それのみならず，ゲームごとに様々なオラクルを考えることができる点，確率モデルとの組合せも可能である点など拡張性の面からもその発展が期待できる．

参考文献

[1] 大渡勝己，田中哲朗:方策勾配を用いた教師有り学習によるコンピュータ大貧民の方策関数の学習とモンテカルロシミュレーションへの利用，情報処理学会研究報告，Vol. 2016，No. 10，pp. 1 – 8 (2016).

[2] 木谷裕紀，大渡勝己，小野廣隆: 8 切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題．研究報告ゲーム情報学 (GI) Vol. 2018，No. 3，pp. 1 – 5，2018.

[3] 桑原和人，保木邦仁: 大貧民の状態価値 (期待順位) の強化学習，研究報告ゲーム情報学 (GI)，Vol. 2018，No. 7: pp. 1 – 8，2018.

[4] 須藤郁弥，成澤和志，篠原 歩: UEC コンピュータ大貧民大会向けクライアント「snowl」の開発，第 2 回 UEC コンピュータ大貧民シンポジウム講演予稿集，電気通信大学，2010.

[5] 西野順二: 単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察 (“An analysis on TANHINMIN game”)，ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集，pp. 66 – 73，2007.

[6] Ulrich Schwalbe, Paul Walker: Zermelo and the Early History of Game Theory, Games and Economic Behavior, Vol. 34, pp. 123–137, 2001.