要素数4のFES集合に対するAll-but Nim

末續 鴻輝[1,a)]　安福 智明[2,b)]

概要：Nim の一種である制限 Nim は，石の山からあるルールに従って二人のプレイヤが石を取り除いていき，最後に石を取ったプレイヤを勝ちとするゲームである．除去可能な石の数が非負整数の集合で表される例がよく研究されているが，特に除去不可能な石の数が有限集合である場合が，近年研究されつつある．このようなゲームは All-but Nim と呼ばれる．除去不可能な石の数の集合の要素数が 3 以下の場合はこれまで研究されているため，本稿では要素数が 4 の場合について解析を行った．

キーワード：組合せゲーム理論，All-but Nim，不偏ゲーム，G-value

All-but Nim with FES sets of size 4

Koki Suetsugu[1,a)]　Tomoaki Abuku[2,b)]

Abstract: Subtraction Nim, which is a variant of Nim, is a game in which each player removes stones from a heap obeying a certain rule and the player who moves the last wins. Almost all researches are conducted under assumption that the set of the removable numbers of stones are given. In particular, the case that the set is cofinite (that is, the set of the prohibited numbers of stones is finite) has often been studied. Such games are a called All-but Nim. The case that the size of the prohibited-number set is no more than three has been studied well by Siegel, Sleator and Slusky. We study the case that the size is 4.

Keywords: Combinatorial game theory, All-but Nim, Impartial game, G-value

1. はじめに

組合せゲーム理論は，偶然や運に左右されず完全情報を持つゲームの数学的構造について研究する理論であり，これまで多くの成果が発表されている．また， [1], [2] など，本理論を紹介する書籍もいくつも出版されている．

1.1 不偏ゲームと G-value

本研究では，二人で行う**不偏ゲーム**（盤面に対して，可能な着手がプレイヤによって異ならない）の**正規形**（最後の着手者を勝者とする）について議論を行う．引き分けのない不偏ゲームの任意の局面は，先手に必勝戦略があるか後手に必勝戦略があるかのいずれかとなる．しかしゲーム木における頂点数や分岐が過多であるため，終了局面からの再帰的なしらみつぶしでは現実的な時間内で実際に必勝戦略を見つけることが困難な例が多々ある．そこでゲームの必勝法に関する様々な理論が研究されている．本小節では，その中でも中心的な役割を果たす G-value の理論について紹介する．

定義 1. 非負整数 a, b に対して，$a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ とする $(a_i, b_i \in \{0, 1\})$．排他的論理和（ニム和，XOR）$\oplus$ を，以下のように定義する．桁数が足りないときは，適宜左桁に 0 を補う．

$$a \oplus b = \sum_i 2^i ((a_i + b_i) \bmod 2).$$

排他的論理和は結合律が成り立つので，三項以上の和も括弧を用いずに表記することとする．

例 1. $3 \oplus 6 = 11_2 \oplus 110_2 = 101_2 = 5.$

例 2. $4 \oplus 5 \oplus 7 = 100_2 \oplus 101_2 \oplus 111_2 = 110_2 = 6.$

次に，ゲーム同士の**直和**を定義する．

定義 2. 二つのゲームの局面 g と h に対して，g と h を並

1 国立情報学研究所
National Institute of Informatics, Chiyoda, Tokyo 101-8430, Japan
2 筑波大学
University of Tsukuba, Tsukuba, Ibaraki 305-8577, Japan
a) suetsugu.koki@gmail.com
b) buku3416@gmail.com

行にプレイするゲームを考える．すなわち，局面として g と h のペア (g,h) が与えられ，プレイヤは g に対する合法手を着手し，g のある次局面 g' と h のペア (g',h) へと全体を変えるか，h に対する合法手を着手し，h のある次局面 h' と g のペア (g,h') へと全体を変えるかのいずれかを行うゲームである．このようなゲームを，g と h の直和ゲームと呼び，$g+h$ と表す．

ゲームの局面 g,h,j に対して，結合律 $(g+h)+j = g+(h+j)$ が成り立つ．従って，3 つ以上の局面の直和も，括弧を用いずに表す．

正規形不偏ゲームの直和ゲームについては，構成成分それぞれの G-value と呼ばれるパラメータを調べることで，全体のゲームの性質を知ることできる．G-value は他に，Grundy 数，Sprague-Grundy 数，Nimber，エネルギーなどとも呼ばれている．以下に紹介する事実が，Sprague [3] と Grundy [4] によって，見出された．

定義 3. $\mathbb{N}_0$ の真部分集合 S を引数に，非負整数を返す関数 mex を以下のように定義する．ただし，$\mathbb{N}_0$ は非負整数全体の集合である．

$$\mathrm{mex}(S) = \min(\mathbb{N}_0 \setminus S).$$

例 3. $\mathrm{mex}(\{0,1,3\}) = 2.$

例 4. $\mathrm{mex}(\{1,2,3,4,6,7\}) = 0.$

定義 4. ゲームの局面 g に対して，G-value $\mathcal{G}(g)$ を以下のように定義する．

$$\mathcal{G}(g) = \begin{cases} 0 & (g \text{ が終了局面}) \\ \mathrm{mex}(\{\mathcal{G}(g') \mid g' \text{は } g \text{ の次局面 }\}) & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

定理 1. g で後手に必勝戦略があるとき，かつそのときに限り，

$$\mathcal{G}(g) = 0.$$

定理 2. 二つのゲームの局面 g と h について，以下が成り立つ．

$$\mathcal{G}(g+h) = \mathcal{G}(g) \oplus \mathcal{G}(h).$$

本定理によって示されている通り，不偏ゲームの必勝性を判定する際に G-value は非常に重要な役割を果たす．そのため，多くの先行研究において，様々なゲームの G-value の求め方が考察されている．詳しくは [1], [5] なども参照いただきたい．

1.2 制限 Nim

制限 Nim とは以下のようなゲームである．

ゲーム 1. 石の山がいくつかある．ある正整数の集合 S が最初に与えられる．プレイヤは各手番で，$s \in S$ 個の石を山の一つから取り除く．最後の着手者が勝者である．

$S = \mathbb{N}$ のとき，よく知られた不偏ゲームである Nim となる．ただし $\mathbb{N}$ は正整数全体の集合とする．

S が与えられているとき，山の石の個数 n に対して G-value $\mathcal{G}_S(n)$ は一意に定まる．よって数列 $\{\mathcal{G}_S(n)\}$ を考えることができる．これを *Grundy* **数列**と呼ぶこととする．

定義 5. $l \geq 0$，$s > 0$ と $p > 0$ が存在して，任意の $n \geq l$ に対して $a_{n+p} = a_n + s$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は加法周期的であるという．また，$l = 0$ で成り立つとき純加法周期的であるという．

制限 Nim の Grundy 数列については，いくつかの性質が知られている．そのなかで，本研究では以下の性質についてより深く研究する．

定理 3 (Siegel [6])**.** X が有限集合であるとき，$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n)\}$ は加法周期的になる．

有限集合 X に対して，$S = \mathbb{N} \setminus X$ に対する制限 Nim を特に All-but Nim と呼ぶ．また，このとき集合 X を FES 集合（有限除外集合）と呼ぶ．All-but Nim について，先行研究 [6], [7] で以下が示されている．

定理 4. $|X| \leq 3$ のとき，$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n)\}$ は純加法周期的となる．

$|X|$ が 4 以上の場合は，$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n)\}$ が純加法周期的とならない場合が存在することが知られている（$X = \{2,3,6,8\}$ など）[6]．しかし，具体的にどのような場合が純加法周期的となり，どのような場合が純加法周期的にならないかはこれまで詳しく調べられてこなかった．そこで本稿では，主に $|X| = 4$ の場合について，詳細を調べた．

1.3 FES アルゴリズム

All-but Nim の Grundy 数列を解析するために，Sleator と Slusky が考案した FES アルゴリズムについて紹介する．本小節の内容はすべて [7] によるものである．

FES アルゴリズム (Algorithm 1) は G-value $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m)$ を，引数 m が小さい順ではなく G-value $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m)$ が小さい順に求めていくというものである．ステップ $k = 0, 1, \ldots$ に対し，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = k$ となるすべての m を以下のように求める．

- $n = \min\{i : \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(i) \text{ が未確定 }\}$ とする．$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) = k.$
- $x \in X$ について昇順に $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n+x)$ が未確定，かつすべての $m < n+x, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = k$ について $(n+x)-m \in X$ ならば $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n+x) = k.$

定理 5. *FES* アルゴリズムは，それぞれの局面の *G-value* を正しく求める．

証明. 帰納法で証明する．ステップ k の前に，G-value が $0, 1, \ldots, k-1$ となるすべての局面が正しく求められていると仮定する．このとき，G-value が k となる全ての局面を求められることを示す．まず，$n = \min\{i : \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(i) \text{ が未確定 }\}$ について，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) = k$ が成り立つ．なぜならば，帰納法の仮定より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) > k-1$ であり，かつ $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = k$ となるような $m < n$ が存在しないので，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) > k$ とはなら

ないからである．$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n+x)$ についても同様に，帰納法の仮定より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n+x)$ が未確定であれば $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n+x) > k-1$ であり，またすでに求められた $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = k$ となるような任意の m について $n+x-m \in X$ が保障されているので $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n+x) = k$ となる．また，この操作で G-value が確定しなかった値 m についてはある $x \notin X$ が存在して $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m-x) = k$ となるため，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = k$ とはならない． □

Algorithm 1 FES アルゴリズム

```
k = 0
while  do
  n ⇐ min(i : G[i] が未確定)
  G[n] ⇐ k
  for j = 0 ... X.length do
    if G[n + X[j]] が未確定 then
      for m = 0 ... n + X[j] − 1 do
        if G[m] = k then
          if n + X[j] − m ∉ X then
            goto breakloop
          end if
        end if
      end for
      G[n + X[j]] ⇐ k
      breakloop
    end if
  end for
  k ⇐ k + 1
end while
```

注意すべき点は，ステップ $k-1$ が終わり，G-value が $k-1$ 以下となる局面が求められた時点で，どの局面の G-value が k となるかを知りたいときに，それまでの各局面の G-value を記録しておく必要がなく，ただすでに G-value が求められているか否かがわかれば十分であるという点である．この性質を利用するために，関数 $\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(n) : \mathbb{N} \to \{*, \text{␣}\}$ を以下のように定義する．

定義 6.

$$\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(n) = \begin{cases} * & (\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) < k) \\ \text{␣} & (\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) \geq k) \end{cases}$$

すなわち，ステップ k が始まる前に，すでに G-value が求められているか否かを表す関数である．このとき，$\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(n)$ は n が十分小さい範囲においては $*$ が連続し，n が十分大きい範囲においては ␣ が連続することとなる（$k = 0$ の場合を除く）．

補題 1. 定数 k に対し，$n = \min\{i : \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(i) = \text{␣}\}$ と定義する．このとき，$m \geq n + \max(X)$ に対し，$\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = \text{␣}$ となる．

証明. FES アルゴリズムより，任意の $k' < k$ に対して，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n') = k'$ となる最小の n' は $n' < n$ を満たす．従って，$m \geq n + \max(X)$ に対して，$m - n' > \max(X)$ となるので $m - n' \notin X$ を満たし，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(m) \neq k'$ となる． □

定義 7. $\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}$ の境界パターンを以下の列であると定義する．

$$\{\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(n), \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(n+1), \ldots, \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(n+\max(X)-1)\}$$

ただし，$n = \min\{i : \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(i) = \text{␣}\}$.

このとき，$m < n$ であれば $\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = *, m > n + \max(X) - 1$ であれば $\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(m) = \text{␣}$ となる．$\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}$ の境界パターンは，$\mathcal{H}^{k-1}_{\mathbb{N}\setminus X}$ の境界パターンにより一意に定まる．

境界パターンが周期的になる，すなわち，ある $p > 0, l \geq 0$ が存在して，$k \geq l$ のときに $\mathcal{H}^{k+p}_{\mathbb{N}\setminus X}$ の境界パターンと $\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}$ の境界パターンが等しくなることは，G-value が加法周期的になることと同値である．このことを利用して，定理 3 の別証明が得られる．

定理 *3* の別証明. 境界パターンは $2^{\max(X)}$ 通り存在しう

る．ここで，それぞれの境界パターンに対応した $2^{\max(X)}$ 個の頂点を持つ有向グラフを考える．頂点 A から頂点 B に有向辺があるとき，頂点 A に対応する境界パターンの次のステップの境界パターンが頂点 B に対応する境界パターンであるようにする．ある境界パターンから，次の境界パターンは一意に定まるため，各頂点の出次数は高々 1 となる．今，$\mathcal{H}^0_{\mathbb{N}\setminus X}$ の境界パターンから始めて有向辺を辿って行くと，各境界パターンには次の境界パターンが存在するため無限に辿り続けることができる．一方グラフは有限サイズであるため，どこかでサイクルになっていることがわかる．これは，境界パターンが周期を持っていることを意味し，従って，Grundy 数列は加法周期的になる． □

2. 本研究

準備として，以下の定理を示す．

定理 6. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ の要素の最大公約数 $\mathrm{GCD}(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ を g とする．$X' = \{a_1/g, a_2/g, \ldots, a_r/g\}$ とする．このとき，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X'}(\lfloor n/g\rfloor)g + (n \bmod g)$ となる．

証明. 帰納法で証明する．$n < k$ の時に主張が成立していると仮定する．$n = k$ のときについて考える．$G_1 = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X'}(\lfloor n/g\rfloor), G_2 = (n \bmod g)$ とする．まず，任意の $p < G_1g + G_2$ について，ある $s \in \mathbb{N}\setminus X$ が存在して，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n-s) = p$ となることを示す．$p = p_1g + p_2 (0 \le p_2 < g)$ とする．$p_1 = G_1, p_2 < G_2$ のとき，$G_2 - p_2 < g$ より $G_2 - p_2 \in \mathbb{N}\setminus X$ で，$s = G_2 - p_2$ とすると，帰納法の仮定より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n - (G_2 - p_2)) = G_1g + p_2 = p_1g + p_2 = p$ となる．次に，$p_1 < G_1$ のとき，ある $r < \lfloor n/g\rfloor$ が存在して，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X'}(r) = p_1$ かつ，$\lfloor n/g\rfloor - r \in \mathbb{N}\setminus X'$ をみたす．このとき，$n' = gr + p_2$ とすると，帰納法の仮定より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n') = p_1g + p_2 = p$ となる．また，$n - n' = g(\lfloor n/g\rfloor - r) + G_2 - p_2$ であるが，$G_2 - p_2 \neq 0$ であれば，$n - n'$ は g の倍数ではないので明らかに $n - n' \in \mathbb{N}\setminus X$ となり，$G_2 - p_2 = 0$ のときは，$\lfloor n/g\rfloor - r \in \mathbb{N}\setminus X'$ より，$n - n' = g(\lfloor n/g\rfloor - r) \in \mathbb{N}\setminus X$ となる．よって，$s = n - n'$ とすればよい．

一方，$p < n$ について，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(p) = G_1g + G_2$ のとき，$n - p \notin \mathbb{N}\setminus X$ を示す．$G_2 = p_2$ であるので，$n - p = \lfloor n/g\rfloor g - p_1g$ かつ，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X'}(\lfloor n/g\rfloor) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X'}(p_1)$ であるから，$\lfloor n/g\rfloor - p_1 \notin \mathbb{N}\setminus X'$．よって，$\lfloor n/g\rfloor - p_1 \in X'$ ゆえに，$\lfloor n/g\rfloor g - p_1g \in X$ となり，$n - p \notin \mathbb{N}\setminus X$ となる． □

本定理が成り立つため，S の要素の最大公約数が 1 より大きいときは，各要素を最大公約数で割った場合に帰着できる．

以下の定理が，本研究の主要な成果である．

定理 7. $|X| = 4$ の場合，$X = \{a, b, c, d\} (a < b < c < d)$ について，

$$\{a,b,c,d\} = \begin{cases} \{a, b, a+b, a+2b\} \\ \{a, b, c, a+c\} \end{cases} (b \neq 2a, c \neq 2a)$$

のいずれかの形で表せない場合は，$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n)\}$ は純加法周期的となる．

証明. 以下の補題 2, 3, 4, 5, 6 による． □

補題 2. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ とする．$(a_1 < a_2 < \cdots < a_r)$ 任意の p, q に対して $a_p - a_q \neq a_1$ とする．このとき，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(n)$ となる．

証明. Siegel [6] により，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(n) = a_1\lfloor n/2a_1\rfloor + (n \bmod a_1)$ が示されている．よって，任意の l に対して，$i = \min\{i : \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(i) = l\}$ とすると，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(i + a_1) = l$ となり，任意の $m (\neq i, i + a_1)$ に対して，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(m) \neq l$ となる．

FES アルゴリズムを用いた帰納法によって証明する．$\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X} = \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}$ と仮定する．このとき，$i = \min\{i : \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(i) = \text{␣}\}$ とすると，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(i) = k$ となる．また，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}$ の性質より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(i + a_1) = k$ となるが，これは $\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus X}(i + a_1) = \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}(i + a_1) = \text{␣}$ を意味する．従って，FES アルゴリズムより，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(i + a_1) = k$ となる．さらに $n > i + a_1$ について，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus X}(n) = k$ となるためには，ある p, q があって，$n - a_p = i, n - a_q = i + a_1$ となる必要があるが，そのためには $a_p - a_q = a_1$ となる必要がある．これは，任意の p, q に対して $a_p - a_q \neq a_1$ であるという仮定に反する．したがって，$\mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus X} = \mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a_1\}}$ となる． □

以上から，$|X| = \{a, b, c, d\}$ について，$b - a, c - b, d - c, c - a, d - b, d - a$ のそれぞれの値が a であるか否かで場合分けすればよいということがわかる．この場合分けは高々 64 通りであるが，実現不可能なものもあるので考える場合は実際には少ない．以下に，それぞれの場合の結果を示す．

補題 3. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,4a\}}(n) = a_1\lfloor n/5a_1\rfloor + (n \bmod a_1)$ となる．

証明. 定理 6 より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{1,2,3,4\}}(n) = \lfloor n/5\rfloor$ を示せば十分である．より一般に，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{1,2,\ldots,l\}}(n) = \lfloor n/(l+1)\rfloor$ であることを示す．数学的帰納法を用いる．$n < k$ で主張が成立していると仮定する．$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{1,2,\ldots,l\}}(k) = \mathrm{mex}(\{\lfloor (n-(l+1))/(l+1)\rfloor, \lfloor (n-(l+2))/(l+1)\rfloor, \ldots, 0\}) = \lfloor (n-(l+1))/(l+1)\rfloor + 1 = \lfloor n/(l+1)\rfloor - 1 + 1 = \lfloor n/(l+1)\rfloor$ となる． □

補題 4. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,3a\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,2a,3a\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(n)$ となる．ただし，中括弧内の 4 つの数は昇順に並んでいるとする．また，$d \neq 4a$ とする．

証明. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(n)$ について，FES

アルゴリズムを用いた数学的帰納法で証明する．$m < k$ について，$\mathcal{H}^m_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}} = \mathcal{H}^m_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}$ が成り立つと仮定する．このとき，ステップ k について考える．$i = \min\{i : \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(i) = \llcorner\!\lrcorner\}$ とすると，FES アルゴリズムと定理 6 より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(i + a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(i + 2a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(i + 3a) = k$ となる．一方，FES アルゴリズムと帰納法の仮定より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i+a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i+2a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i + 3a) = k$ となる．さらに，$i' > i + 3a$ について，$d \neq 4a$ より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i' - a) = k, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i' - 2a) = k, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i' - 3a) = k, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}}(i' - d) = k$ の四条件が同時に成り立つことはない．よって，$\mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a,d\}} = \mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}$ となる．

$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,3a\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(n), \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,2a,3a\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,3a\}}(n)$ についても同様である． □

補題 5. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,2a,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,2a\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(n)$ となる．ただし，中括弧内の 4 つの数は昇順に並んでいるとする．また，$c \neq 3a, d \neq 3a$, とする．

証明. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(n)$ について，FES アルゴリズムを用いた数学的帰納法で証明する．$m < k$ について，$\mathcal{H}^m_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}} = \mathcal{H}^m_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}$ が成り立つと仮定する．このとき，ステップ k について考える．$i = \min\{i : \mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(i) = \llcorner\!\lrcorner\}$ とすると，FES アルゴリズムと定理 6 より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(i + a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(i + 2a) = k$ となる．一方，FES アルゴリズムと帰納法の仮定より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i + a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i + 2a) = k$ となる．さらに，$i' > i+2a$ について，$c \neq 3a, d \neq 3a$ より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i' - a) = k, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i' - 2a) = k, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i' - c) = k, \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}}(i' - d) = k$ の四条件のうち三つ以上が同時に成り立つことはない．よって，$\mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a,c,d\}} = \mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}$ となる．

$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,2a,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(n), \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,2a\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,2a\}}(n)$ についても同様である． □

補題 6. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(n)$ となる．ただし，中括弧内の数は昇順に並んでいるとする．また，$c \neq 2a, d \neq a + 2b, d \neq 2a + b$ とする．

証明. $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(n)$ を示す．$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(n)$ については，任意の k について，$i = \min\{\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i) = \llcorner\!\lrcorner\}$ とすると，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i + a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i + a + b) = k$ となり，それ以外の引数について G-value が k とならないか，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i + b) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i + a + b) = k$ となり，それ以外の引数について G-value が k とならないかのいずれかであることが示されている [7].

$m < k$ について，$\mathcal{H}^m_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}} = \mathcal{H}^m_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}$ が成り立つと仮定する．このとき，ステップ k について考える．$i = \min\{\mathcal{H}^k_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(i) = \llcorner\!\lrcorner\}$ とすると，(1) $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i+a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i+a+b) = k$ となるか，(2) $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i+b) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(i + a + b) = k$ となるかのいずれかである．(1) の場合，FES アルゴリズムと帰納法の仮定より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(i + a) = k$ となる．また $i + a < i' < i + a + b$ なる i' について，$c \neq 2a$ より，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(i') = k$ となることはない．さらに，FES アルゴリズムと帰納法の仮定より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}}(i+a+b) = k$ となる．$i' > i + a + b$ については，$i' - i \in \mathbb{N} \setminus X$ なので，$\mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,c,a+b\}} = \mathcal{H}^{k+1}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}$ となる．(2) についても同様に示せる．$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,d\}}(n) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b\}}(n)$ についても同様である． □

さらに，定理がカバーしていない場合の一部については，以下の予想を立てた．

予想 1. $i = \lfloor (b - a)/2a \rfloor$, $j = \lfloor (b - (2i + 1)a)/a \rfloor$, $k = b-(2i+j+1)a$, $f = 4(i+j)(i+1)a^2+(4i+3)ka+k^2$ とする．$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,a+2b\}}(n)\}$ は純加法周期的となり，その周期は

$$\begin{cases} \dfrac{f}{b-a} & (a < b < 2a) \\[2ex] \dfrac{f}{\left\lfloor \dfrac{a+b-1}{2a} \right\rfloor a} & (b \geq 2a, \mathrm{GCD}(a, b) = a) \\[2ex] \dfrac{f}{\mathrm{GCD}(a, b)} & (b \geq 2a, \mathrm{GCD}(a, b) \neq a) \end{cases}$$

となる．

本予想は数値計算によって得られた G-value をもとに立てたものであり，$1 \leq a \leq 30, a + 1 \leq b \leq a + 30$ の範囲で予想が成立することを確認した．表 1 はその一部である．

予想 2. $\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n)\}$ は $b > 2a$ のとき純加法周期的となる．

なお，$a < b < 2a$ の場合は，純周期的とならない例が存在することを確認した（$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{2,3,5,7\}}(n)\}$ など）．本予想については，以下の補題はすでに示すことができた．

補題 7. $\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n)\}$ はある正整数 m が存在して $2ma \leq b \leq (2m + 1)a$ と表せるとき，周期の長さ $(2m + 3)a + b$ で純加法周期的となる．ただし，$b \neq 2a$ とする．

証明. FES アルゴリズムを用いて証明する．$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(0) = 0$ である．次に，$a \in \{a, b, a + b, 2a + b\}$ かつ $a = \min(\{a, b, a + b, 2a + b\})$

$a \backslash b$	$a+1$	$a+2$	$a+3$	$a+4$	$a+5$	$a+6$	$a+7$	$a+8$	$a+9$	$a+10$	$a+11$	$a+12$
1	4	8	8	12	12	16	16	20	20	24	24	28
2	7	8	23	16	47	16	79	24	119	24	167	32
3	10	11	12	46	58	24	94	118	24	166	190	36
4	13	14	15	16	77	46	109	32	157	94	221	32
5	16	17	18	19	20	116	134	154	176	40	236	274
6	19	20	21	22	23	24	163	92	69	116	259	48
7	22	23	24	25	26	27	28	218	242	268	296	326
8	25	26	27	28	29	30	31	32	281	154	337	92
9	28	29	30	31	32	33	34	35	36	352	382	138
10	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	431	232
11	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	518
12	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48

表 1 $\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,a+2b\}}(n)\}$ の周期の長さ

Table 1 Length of the periods of $\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,a+2b\}}(n)\}$.

なので $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a) = 0$ である．$b \neq 2a$ より，$b - a \notin \{a, b, a + b, 2a + b\}$ であるから，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(b) \neq 0$ となる．さらに $b \in \{a, b, a+b, 2a+b\}$ かつ $a+b \in \{a, b, a+b, 2a+b\}$ より $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a+b) = 0$ となり，$a \in \{a, b, a+b, 2a+b\}, a+b \in \{a, b, a+b, 2a+b\}, 2a+b \in \{a, b, a+b, 2a+b\}$ なので $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(2a + b) = 0$ である．以下同様に FES アルゴリズムから $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(i) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(i + a) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(i + a + b) = \mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(i + 2a + b) = i \ (0 < i < a)$ となる．従って，

$$\mathcal{H}^{a}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n) = \begin{cases} * & (0 \le n < 2a) \\ \textvisiblespace & (2a \le n < a+b) \\ * & (a+b \le n < 3a+b) \\ \textvisiblespace & (3a+b \le n) \end{cases}$$

を得る．さらに FES アルゴリズムを進めると，

$$\mathcal{H}^{ma}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n) = \begin{cases} * & (0 \le n < 2ma) \\ \textvisiblespace & (2ma \le n < a+b) \\ * & (a+b \le n < (2m+1)a+b) \\ \textvisiblespace & ((2m+1)+b \le n) \end{cases}$$

を得る．$x = b - 2ma$ とすると，

$$\mathcal{H}^{ma+x}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n) = \begin{cases} * & (0 \le n < 2ma+x) \\ \textvisiblespace & (2ma+x \le n < (2m+1)a) \\ * & ((2m+1)a \le n < (2m+1)a \\ & +b+x) \\ \textvisiblespace & ((2m+1)a+b+x \le n < \\ & (2m+2)a+b) \\ * & ((2m+2)a+b \le n < \\ & (2m+2)a+b+x) \\ \textvisiblespace & ((2m+2)a+b+x \le n) \end{cases}$$

を得る．すなわち，

$$\mathcal{H}^{b-ma}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n) = \begin{cases} * & (0 \le n < b) \\ \textvisiblespace & (b \le n < (2m+1)a) \\ * & ((2m+1)a \le n < a+2b) \\ \textvisiblespace & (a+2b \le n < (2m+2)a+b) \\ * & ((2m+2)a+b \le n < 2a+2b) \\ \textvisiblespace & (2a+2b \le n) \end{cases}$$

を得る．ここで，$\min\{i : \mathcal{H}^{b-ma}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(i) = \textvisiblespace\} = b$ であるから，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(b) = b - ma$ となり，また，$\mathcal{H}^{b-ma}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a+b) = *$ から，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a+b) < b - ma$ が示されている．一方 $\mathcal{H}^{b-ma}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a+2b) = \textvisiblespace$ から，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a + 2b) \ge b - ma$ であるので，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(a + 2b) = b - ma$，さらに $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(2a + 2b)$ についても同様に $\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(2a+2b) = b - ma$ となり，$i > 2a+2b$ では $i - b > 2a + b$ より $i - b \in \mathbb{N} \setminus \{a, b, a+b, 2a+b\}$ であることから，$\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(i) > b - ma$ となる．同様にして FES アルゴリズムを進めると，

$$\mathcal{H}^{(m+1)a}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n) = \begin{cases} * & (0 \le n < (2m+3)a+b) \\ \textvisiblespace & ((2m+3)a+b \le n) \end{cases}$$

を得るので，境界パターンが $\mathcal{H}^{0}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}$ と一致する．従って，周期の長さ $(2m+3)a+b$ で加法周期的になる． □

また，以下の予想を立てた．

予想 3. $f' = \lfloor (b + 2a - 1)/2a \rfloor 4a^2 + 3a(b \bmod a)$ とする．ある非負整数 m が存在して $(2m+1)a < b < (2m+2)a$ と表せるとき，$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n)\}$ は純加法周期的となり，その周期の長さは $f'/\mathrm{GCD}(a, b)$ となる．

このような場合については，数値計算により $1 \le a \le 30, 2a+1 \le b \le 2a+30$ の範囲で予想が成立することを確認した．

$a\backslash b$	$2a+1$	$2a+2$	$2a+3$	$2a+4$	$2a+5$	$2a+6$	$2a+7$	$2a+8$	$2a+9$	$2a+10$	$2a+11$	$2a+12$
1	8	11	12	15	16	19	20	23	24	27	28	31
2	15	16	38	22	23	24	54	30	31	32	70	38
3	22	23	24	81	90	33	34	35	36	117	126	45
4	29	30	31	32	140	76	164	44	45	46	47	48
5	36	37	38	39	40	215	230	245	260	55	56	57
6	43	44	45	46	47	48	306	162	114	180	378	66
7	50	51	52	53	54	55	56	413	434	455	476	497
8	57	58	59	60	61	62	63	64	536	280	584	152
9	64	65	66	67	68	69	70	71	72	675	702	243
10	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	830	430
11	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	1001
12	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96

表 2　$\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n)\}$ の周期の長さ

Table 2　Length of the periods of $\{\mathcal{G}_{\mathbb{N}\setminus\{a,b,a+b,2a+b\}}(n)\}$.

3. まとめと今後の課題

本研究では，これまであまり手が付けられていなかった要素数が 4 の FES 集合に対する All-but Nim の G-value について詳細に検証し，多くの場合において純加法周期的となることを示した．All-but Nim については周期の性質を利用した別のゲームの設計 [8] も知られていることからも，本研究は有用であると考えられる．また，一方で，純加法周期性を示せなかった場合についても，いくつかのパターンについて数値計算をもとに予想を立てることに成功した．特に予想 1, 3 は閉じた形で周期の長さを表現している一方，なぜそのような形になるのかが非常に不透明であり，今後解明することで G-value の性質をより深く理解することに貢献できると考えられる．

謝辞

本稿の執筆に際し，筑波大学アソシエイトの坂井公先生より多数のご助言をいただいたことを，ここに深謝する．

参考文献

[1] 佐藤文広：石取りゲームの数学　ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).

[2] Siegel, A. N.: *Combinatorial Game Theory*, Graduate studies in mathematics, Vol. 146, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2013).

[3] Sprague, R. P.: Über mathematische Kampfspiele, *Tôhoku Math. J.*, Vol. 41, pp. 438–444 (1935-36).

[4] Grundy, P. M.: Mathematics and games, *Eureka*, Vol. 2, pp. 6–9 (1939).

[5] 末續鴻輝：不偏ゲームの必勝局面判定における 2 進展開の様々な利用，情報処理学会研究報告，Vol. 2019_GI_41, No. 22, pp. 1–7 (2019).

[6] Siegel, A. A.: Finite excluded subtraction sets and Infinite Modular Nim, Master's thesis, Dalhousie University (2005).

[7] Sleator, D. and Slusky, M.: Subtraction games with FES sets of size 3, *arXiv e-prints*, p. arXiv:1201.3299 (2012).

[8] 末續鴻輝：縦横方向の可能着手を All-butNIM に変えた竜王 NIM の一般化，情報処理学会研究報告，Vol. 2018_GI_40, No. 1, pp. 1–6 (2018).