5P-03

ペントミノから成るアンチスライドパズルの解の列挙

楊璽　　武永康彦　　稲田明透河

電気通信大学 情報理工学研究科 情報・ネットワーク工学専攻

1 はじめに

アンチスライドパズルとは、ストライボスによって提案されたパズルの概念である[1]。盤面の中に、すべてのピースが盤面の端もしくは他のピースによって移動が妨げられているようにピースを詰めるというルールであり、盤面に隙間が存在してもよい。図1の例では3個のピースがどれも移動できなくなっている。

本研究では、5つの単位正方形で作られたペントミノをピースとして用いたアンチスライドパズルについて、二分決定グラフ(Binary Decision Diagram:BDD)を用いて解の列挙を行う。

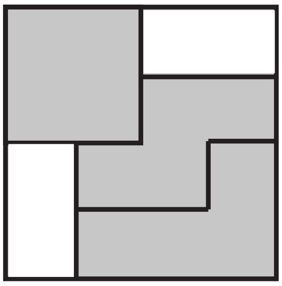

図1　アンチスライドパズルの例

2 二分決定グラフ

二分決定グラフ(BDD)[2]とは、論理関数を有向非巡回グラフで表現したものである(図2)。節点は2種類あり、0の値を持つ節点と1の値を持つ節点の2個の終端節点と、変数でラベル付けされた変数節点である。変数節点からは、0でラベル付けされた枝(0枝)と1でラベル付けされた枝(1枝)が、次の変数節点もしくは終端節点へと伸びている。BDDには変数順序という変数の全順序が存在し、BDDの開始節点から終端節点まで任意の経路で辿った時に変数の現れる順序は変数順序に矛盾しない。図2のBDDの変数順序はx,y,zである。BDDの開始節点点から終端節点まで、ある変数割り当てに応じて、変数の値が0なら0枝、1なら1枝を選んで辿った時、その終端節点の値が論理関数の値となる。

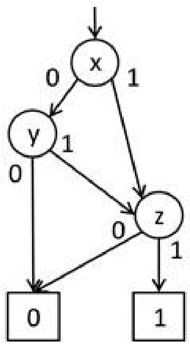

図2 二分決定グラフ

3.1 BDDの変数

3 BDDによるアンチスライドパズルの解の列挙

マスごと、ピースの形ごとに変数を用意する必要がある。ピースの種類は、図3に示すように12種類存在するが、回転、もしくは裏返しによって異なる形のピースになるものは、[3]と同様にそれぞれを別のピースとして扱う。例えば、ピースFは図4のように区別される。

盤面をn×mの正方格子、左上のマスを(1,1)として、あるピースが、そのピースを含む最小の長方形の左上の単位正方形がマス(i,j)に位置するように置かれているか否かを表す変数を、(ピースの名前)$_{i,j}$と定義する。変数はピースが置かれている時1の値をとり、置かれていないとき0の値をとる。例えば、ピースF6が図5のように配置されている時、 $F6_{i,j}=1$となる。

3.2 ピースを配置する条件

ピースを配置する条件として、次の2点が必要である。

(1)すべてのピースが重なっていないこと

(2)すべてのピースの移動が盤面の端もしくは他のピースによって妨げられていること

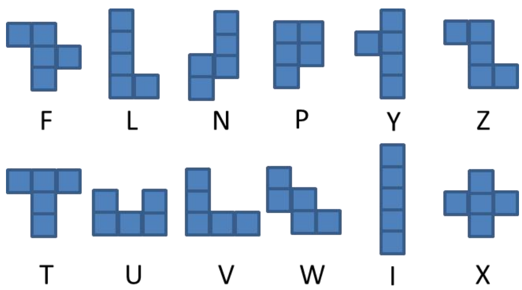

図3　ペントミノの種類

Enumeration of the solutions of anti-slide pentomino puzzles
Yang Xi, Yasuhiko Takenaga and Asuka Inada
Department of Communication Engineering and Informatics,
The University of Electro-Communications

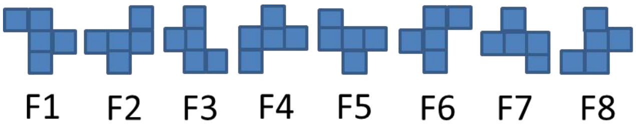

図４　ピースの名前

これらの条件を表した論理式全てのANDをとり、BDDを作成する。このとき、全変数の値が0以外の、BDDの値が1になる割り当てがそれぞれ1個の解に相当する。

条件(1)を満たすには、盤面にあるピースが存在するとき、それと重なる位置にピースが配置されていることを表す変数はすべて0である必要がある。

条件(2)はピースUを使用するか否かで場合分けされる。ピースUを用いない場合、ピースの上下左右それぞれに対して、盤面の壁に接しているか、このピースに接する位置に他のピースが配置されていることを表す変数のいずれかが1である必要がある。

ピースUを用いる場合は、ピースUの窪みに他のピースが入ることで、お互いのピースが上下か左右の移動を妨げあうが、組み合わさった状態でなら移動ができる状況が発生する。例えば、図6(a)の例では、ピースF6とピースU1が組み合わせた状態で左右に移動できる。そこで、本研究では、ピースUと、その窪みに他のピースが入った組み合わせを、一つの仮りのピースとして扱う。図6(a)で2個のピースが左右に移動できない条件を考える。Aのマスのいずれかに別のピースが配置されていることを表す論理式を$F6U1_{i,j}L$、同じく右に動かないことを表す論理式を$F6U1_{i,j}R$とする。このとき、この2個のピースが左右に移動できない条件は、論理式$\neg\left(F6_{i,j} \wedge U1_{i+2,j}\right) \vee \left(F6U1_{i,j}L \wedge F6U1_{i,j}R\right)$で表せる。

さらに、図6(b)のように、2個のピースUと他の1個のピースを組み合わせた状態で上下か左右の移動ができる場合も存在する。この場合も、上下あるいは左右に移動できない条件を表す論理式を同様に変更する。4個以上ピースの組み合わせは同じ方向の移動を妨げあう組み合わせは存在しないので、4個以上のピースの組み合わせを考える必要はない。

4 実験結果

制約条件の論理式を生成するプログラムを作成し、これを用いて列挙プログラムを作成した。ピースは指定した形のピースを任意の個数使用できるものとしている。盤面の大きさをn行m列として、nの値を変え実験を行った。

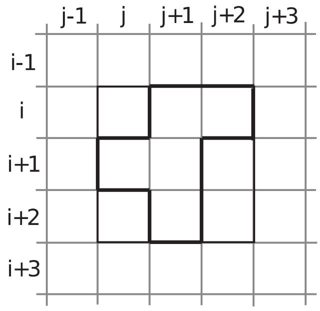

図５ 変数$F6_{i,j}$=1のときのピースの配置

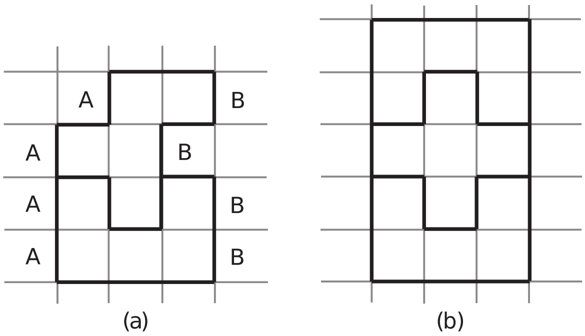

図６ ピースUを用いる場合

表１ 全てのピースを用いた場合

盤面	解の数
3×3	25
4×4	1668
5×5	455835
6×5	9313423
6×6	404121230

表２ ピースU以外を用いた場合

盤面	解の数
3×3	25
4×4	1356
5×5	321008
6×5	6101083
6×6	243307547

変数順序は1行目の1列目からm列目まで順に、次に2行目の1列目 からm列目まで順に、というように、列を優先する順序を選択した。表1および表2に、すべてのピースを用いた場合と、ピースU以外のピースを用いた場合の実験結果を示す。

参考文献

[1] 秋山久義, “キューブパズル読本,” 新紀元社, 2004.
[2] R.E.Bryant,“Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation,” IEEE Transactions on Computers, Vol. C-35, No. 8, pp.6 77-691, 1986.
[3] 鈴木拡,湊真一, “BDD/ZDDを用いたペントミノパズルの解の列挙,” 信学技報 COMP109(54),pp.1-7, 2009.