7B-03

グラフのスクールバス問題とその一般化

清野 裕崇　　畑中 達彦　　伊藤 健洋　　周 暁

東北大学大学院情報科学研究科

1 はじめに

最短経路問題や巡回セールスマン問題をはじめ，グラフの様々な経路問題が古くから研究されてきた．それらの多くは移動する側の移動距離や移動時間を最小化するものであり，コストの視点はサービスの提供者側にあったといえる．本稿で扱う**スクールバス問題 (SBP-R)** も経路問題の一つであるが，この問題では顧客側の不満を最小化することを目的としており，コストの視点をサービスの利用者側に置いたものとなっている．

1.1 スクールバス問題

SBP-R の入力は，単純連結無向グラフ $G=(V,E)$，学校 $s \in V$，生徒集合 $U \subseteq V$，バスの台数 $k \in \mathbb{Z}_+$，辺重み $w: E \to \mathbb{Z}_+$ である．ここで，$\mathbb{Z}_+$ は非負整数の集合を表す．SBP-R における実行可能解とは，k 台のバスによって全生徒を拾う移動経路のことであり，形式的には以下のように定義される．$P = \langle v_1, v_2, \ldots, v_l \rangle$ を G の $\langle v_1, v_l \rangle$ 歩道とし，P に現れる頂点の集合を $V(P)$ と書く．P の長さを $\ell(P) = \sum_{j=1}^{l-1} w(v_j v_{j+1})$ とする．2 頂点 $a, b \in V$ の最短距離 $d(a,b)$ を $d(a,b) = \min\{\ell(P) \mid P$ は G の $\langle a,b \rangle$ 歩道 $\}$ とする．各整数 $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ に対し**バス i の移動経路**は，G の $\langle s,s \rangle$ 歩道 P_i と，そのバスに乗車する生徒の集合 $X_i \subseteq U \cap V(P_i)$ の組 $B_i = (P_i, X_i)$ として表される．各生徒 $u \in X_i$ は，P_i 上で最後にその頂点 u が現れたときに，バスに乗車するものとする．生徒 u がバスに乗車してから学校 s までの P_i の部分歩道の長さを $\ell(u, B_i)$ と書く．$\ell(u,B_i) - d(u,s)$ を u の**不満度**と呼び，$r(u, B_i)$ で表す．k 台のバスの移動経路を $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ とする．$\mathscr{B}$ の**最大不満度**を $r_{\max}(\mathscr{B}) = \max_{1 \le i \le k} \max_{u \in X_i} r(u, B_i)$ とする．$\bigcup_{1 \le i \le k} X_i = U$ であるとき，$\mathscr{B}$ を **SBP-R の実行可能解**という．SBP-R の出力は，最大不満度 $r_{\max}(\mathscr{B})$ が最小となる実行可能解 $\mathscr{B}$ である．

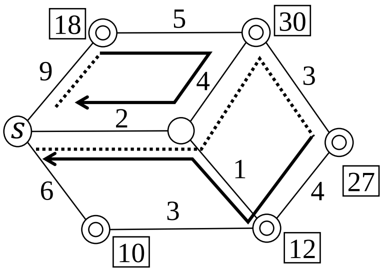

図 1: 一般化 SBP-R における 2 台のバスの移動経路の例．s は学校，各二重丸は生徒，各辺の数字は辺重み，各四角の中の数字はその頂点のコストを表す．各バスの移動経路において，点線部分は最初の生徒を乗せるまでの移動経路であり，実線部分は最初の生徒を乗せた後の移動経路を表す．

SBP-R は入力グラフをスターに制限したとしても，強 NP 困難である [1]．そこで，近似の観点から研究が行われており，木に対しては多項式時間の 12.5 倍近似アルゴリズムが存在する [1]．また，バスの台数 k を定数に制限した場合でも，一般のグラフでは強 NP 困難であることが示されており，多項式時間の $O(k^2)$ 倍近似アルゴリズムが与えられている [2]．

1.2 スクールバス問題の一般化

本稿では**一般化スクールバス問題 (一般化 SBP-R)** を定義し，これも扱う．一般化 SBP-R の入力は，単純連結無向グラフ $G=(V,E)$，学校 $s \in V$，生徒集合 $U \subseteq V$，バスの台数 $k \in \mathbb{Z}_+$，辺重み $w: E \to \mathbb{Z}_+$，コスト上限 $c_{\mathrm{lim}} \in \mathbb{Z}_+$，コスト関数 $c: U \to \mathbb{Z}_+$ である．SBP-R が全生徒をバスに乗車させなければならなかったことに比べ，一般化 SBP-R ではコストを支払うことで一部の生徒を乗車させなくてもよいものとする．k 台のバスの移動経路を $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ とし，各整数 $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ に対し $B_i = (P_i, X_i)$ とする．生徒 $u \in U$ をバスに乗車させないとき，す

The school bus problem on graphs and its generalization
Hirotaka Seino
Tatsuhiko Hatanaka
Takehiro Ito
Xiao Zhou
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

なわち $u \notin \bigcup_{1 \le i \le k} X_i$ であるとき，学校はその生徒 u にコスト $c(u)$ を支払うものとする．k 台のバスの移動経路 $\mathscr{B}$ において，学校が支払うコストの合計を $c_{\mathrm{sum}}(\mathscr{B}) = \sum\{c(u) \mid u \in U, u \notin \bigcup_{1 \le i \le k} X_i\}$ とする．学校が支払えるコストには上限 c_{lim} が設定されており，$c_{\mathrm{sum}}(\mathscr{B}) \le c_{\mathrm{lim}}$ であるとき，$\mathscr{B}$ を**一般化 SBP-R の実行可能解**という．一般化 SBP-R の出力は，最大不満度 $r_{\max}(\mathscr{B})$ が最小となる実行可能解 $\mathscr{B}$ である．一般化 SBP-R における 2 台のバスの移動経路の例を図 1 に示す．この移動経路では，最大不満度は 2 であり，学校が支払うコストの合計は 10 である．

一般化 SBP-R において，どの生徒 $u \in U$ もコストが $c(u) > c_{\mathrm{lim}}$ であるように設定すれば，全ての生徒をバスに乗車させなければならない．したがって一般化 SBP-R は，SBP-R の一般化であることがわかる．これより，SBP-R に対して与えられた困難性の結果は，一般化 SBP-R に対しても成り立つ．つまり，一般化 SBP-R は入力グラフをスターに制限したとしても強 NP 困難であり，バスの台数 k を定数に制限した場合でも一般のグラフでは強 NP 困難である

本稿では，バスの台数 k が定数の場合について，近似困難性と容易性の解析を行う．ただし本稿では，紙面の都合上，各定理の証明の概略だけを記す．

2　APX 困難性

本節では，SBP-R の近似困難性を次の定理の通り示す．なお，前述の通り，SBP-R に対して与えられた困難性の結果は，一般化 SBP-R に対しても成り立つことを思い出されたい．

定理 1 バスの台数を k とする．任意の定数 $k \ge 1$ に対し，全ての辺重みを 2 以下に制限しても，SBP-R は APX 困難である．

我々は定理 1 を証明するために，APX 困難であることが知られている巡回セールスマン問題 [3] から，SBP-R への近似率を保持した多項式時間帰着を与えた．

定理 1 より，SBP-R（したがって一般化 SBP-R）には，P $\neq$ NP の仮定の下では，多項式時間近似スキーム（PTAS）が存在しないといえる．

3　完全多項式時間近似スキーム

本節では，一般化 SBP-R の近似容易性を示す．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，入力サイズと $1/\varepsilon$ の両方に関する多項式時間で走る $1+\varepsilon$ 倍近似アルゴリズムを**完全多項式時間近似スキーム（FPTAS）**と呼ぶ．近似率を定める ε の値はアルゴリズムの使用者が決めることができるため，ε を小さく設定することで，任意に良い精度の近似解を求めることができる．一方で，その計算時間は $1/\varepsilon$ に依存するため，計算に時間がかかることに注意されたい．

本節の主定理は次の通りである．なお，一般化 SBP-R は SBP-R の一般化であるため，この定理は SBP-R の近似容易性も示していることに注意されたい．

定理 2 バスの台数 k が定数のとき，木に対する一般化 SBP-R には FPTAS が存在する．

定理 2 は，以下で述べる定理 3 と定理 4 を基にして，scaling and rounding の典型的な手法を適用することで証明できる．

定理 3 バスの台数を k とし，W を一般化 SBP-R の最適解の上限とする．このとき，n 頂点の木に対し，一般化 SBP-R は $O(27^k(W+1)^{3k}n)$ 時間で解ける．

我々は定理 3 を証明するために，木の構造を利用した動的計画法のアルゴリズムを与えた．

定理 4 生徒集合を U とする．バスの台数 k が定数であるとき，木に対する一般化 SBP-R には，多項式時間の $|U|$ 倍近似アルゴリズムが存在する．

我々は定理 4 の証明として，貪欲法のアルゴリズムを与えた．定理 4 を用いれば，我々は多項式時間で一般化 SBP-R の実行可能解を一つ求めることができ，それを最適解の上限 W として定理 3 を用いることができる．

参考文献

[1] A. Bock, E. Grant, J. Konemann and L. Sanita, The school bus problem on trees, Proc. of ISAAC 2011, LNCS 7074, pp. 10–19, 2011.

[2] Z. Friggstad and C. Swamy, Approximation algorithms for regret-bounded vehicle routing and applications to distance-constrained vehicle routing, Proc. of STOC 2014, pp. 744–753, 2014.

[3] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, The traveling salesman problem with distances one and two, Mathematics of Operations Research 18(1), pp. 1–11, 1993.