6B-02

グラフ上の経路固定サーバ割当問題のパラメータ複雑性 *

岩本 裕二, 水田 遥河, 鈴木 顕, 伊藤 健洋, 周 暁 †

東北大学 大学院情報科学研究科 ‡

1 はじめに

現在，通信ネットワークは私たちの生活に欠かせない存在となっている．特に近年，回線の広帯域化・高速化とともに高品質の動画のストリーミング配信や音声の通話などの多様なサービスが可能になった．このような継続的な通信を必要とするサービスは大きな帯域を必要とするだけでなく，通信が行われている間は回線の帯域が占有されてしまい，他のユーザがその回線を利用できなくなる．これを防ぐ方法の一つに，同一コンテンツを複数のサーバに分散させ，複数の経路でデータを供給することで，一つの回線当たりの使用する帯域を減らす方法がある．このとき，継続的サービスを利用するユーザへ，どのサーバがどれだけデータを供給するかの割り当て方によって他のユーザが使用できる帯域は変化する．そこで，他のユーザが利用できる帯域が最大となるようなサーバ割当を考える必要がある．

上記の問題をグラフ上にモデル化した問題として，経路固定サーバ割当問題が研究されている．既存研究では，入力グラフのクラスに基づき，当問題の計算複雑性の解析が行われてきた．具体的には，入力グラフがカクタスグラフでさえ強 NP 困難という結果が与えられた一方で，パスやサイクルに対する線形時間アルゴリズムや木に対する擬多項式時間アルゴリズムが与えられた [3]．

本研究では，入力の様々なパラメータに着目し，経路固定サーバ割当問題のパラメータ複雑性について解析した．また，実際のネットワークでは通信経路が「木状」であることが知られているため [2]，その仮定の下でも同様の解析を行った．本研究の結果により，一般には FPT アルゴリズムや XP アルゴリズムの構築が難しい一部のパラメータについても，ネットワークが木状であるという応用上自然な仮定の下では，アルゴリズムの構築が可能であることを明らかにした．なお，本稿では各定理の証明の概要だけ示す．

*Parameterized complexity of the server assignment problem under a given routing table

†Yuji Iwamoto, Haruka Mizuta, Akira Suzuki, Takehiro Ito, Xiao Zhou

‡Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

2 定義と準備

2.1 ネットワークと通信

通信ネットワークを，グラフ $G = (V_S \cup V_U \cup V_T, E)$ 及び，辺容量 $c : E \to \mathbb{Z}_+$ で表す．ただし，$\mathbb{Z}_+$ は非負整数を表す．V_S は**サーバの集合**，V_U は**ユーザの集合**，V_T は**経由点の集合**であり，これらの集合は互いに素である．任意のサーバ $s \in V_S$ とユーザ $u \in V_U$ に対して s から u への**通信経路**とは，s から u への G 上のパスであり，辺部分集合 $\tau(s,u) \subseteq E$ で表す．また，すべてのサーバとユーザの組に対する通信経路 $\tau(s,u)$ からなる族を**通信経路表** τ と呼ぶ．特に，各 $u \in V_U$ について，u への全ての通信経路から誘導される部分グラフ $G[\bigcup_{s \in V_S} \tau(s,u)]$ が木である場合，その通信経路表は**木状**であるという．

あるユーザ $u \in V_U$ がサーバと通信を行うことを考える．ユーザ u への**供給**は各サーバに対する整数値の割当 $f_u : V_S \to \mathbb{Z}_+$ で表される．これは各サーバ $s \in V_S$ が u へ，通信経路 $\tau(s,u)$ に沿ってデータ量 $f_u(s)$ のデータを送ることを意味する．各辺 $e \in E$ について，供給 f_u によって e 上を流れるデータ量の合計が e の辺容量 $c(e)$ を超えない場合，f_u を**実行可能**な供給と言う．また，$\sum_{s \in V_S} f_u(s)$ を u への**供給量**と呼ぶ．

ユーザ u への実行可能な供給のうち供給量が最大のものを考える．この時の供給量を辺容量 c における **ユーザ u の余力**と呼び，$\mathrm{mar}(c,u)$ と表す．また，すべてのユーザ $u \in V_U$ の余力 $\mathrm{mar}(c,u)$ のうち最小のものを辺容量 c における**グラフの余力** $\mathrm{mar}(c)$ とする．

2.2 経路固定サーバ割当問題

辺容量 c のグラフ G において，あるユーザ $r \in V_U$ がデータ量 $d \in \mathbb{Z}_+$ の継続的サービスを利用することを考える．このとき，組 (r,d) を**要求**と呼ぶ．要求 (r,d) に

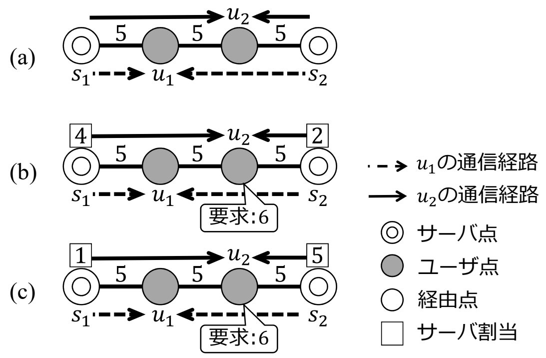

図 1: (a) 経路固定サーバ割当問題の入力，(b) u_2 へのサーバ割当の一例，(c) 最適なサーバ割当

対して，辺容量 c における r への実行可能な供給のうち，供給量が d となるような供給 $\alpha : V_S \to \mathbb{Z}_+$ を (r, d) への**サーバ割当**と呼ぶ．また，各辺 e に対し辺容量 $c(e)$ からサーバ割当 α によって e 上を流れているデータ量を引いた容量を α の**割当後辺容量**と呼び，c_α で表す．

経路固定サーバ割当問題とは，グラフ G と辺容量 c，通信経路表 τ ，および要求 (r, d) が与えられたとき，(r, d) へのサーバ割当 α のうち，割当後辺容量 c_α におけるグラフの余力 $\mathrm{mar}(c_\alpha)$ が最大となるサーバ割当を求める問題である．ただし要求 (r, d) に対し，サーバ割当が存在しない場合には “存在しない” と出力する．グラフの余力 $\mathrm{mar}(c_\alpha)$ の計算には，要求を行っているユーザ r 自身の余力も含まれることに注意されたい．また，入力で与えられる通信経路表を木状に制限した問題を**木状の経路固定サーバ割当問題**と呼ぶ．

図 1(a) はグラフと通信経路表の例であり，図 1(b) と (c) はどちらも要求 $(u_2, 6)$ へのサーバ割当である．ここで，図 1(b) の割当後辺容量におけるグラフの余力は 2 であるが，図 1(c) では 4 となり，これが最適解である．

3　パラメータ容易性の結果

本稿では整数計画問題を用いて FPT アルゴリズムを構築する．整数計画問題に対しては，変数の数をパラメータとした FPT アルゴリズムが知られている [1]．そこで，変数の数が各パラメータのみに依存する関数で抑えられるような整数計画問題を構成し，以下の定理を与えた．

定理 1. 経路固定サーバ割当問題に対し，サーバ数とユーザ数をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在する．また，サーバ数と要求量をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在する．

定理 2. 木状の経路固定サーバ割当問題に対し，サーバ数をパラメータとした FPT アルゴリズムが存在する．

また，木状の通信経路であれば，可能なサーバ割当を全列挙し，それぞれの割当後辺容量におけるグラフの余力を計算することで，以下の定理が得られる．

定理 3. 木状の経路固定サーバ割当問題に対し，要求量をパラメータとした XP アルゴリズムが存在する．

4　パラメータ非容易性の結果

本節ではパラメータ非容易性の結果を与える．

定理 4. 経路固定サーバ割当問題は，ユーザ数と要求量が定数でも，チューリング帰着の下で NP 困難である．

定理 4 の証明として，SetPacking 問題からのチューリング帰着を与えた．この結果から，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ の仮定の下では，ユーザ数と要求量をパラメータとした XP アルゴリズムが存在しないといえる．

また，木状の経路固定サーバ割当問題に対して，以下の定理を与えた．

定理 5. 木状の経路固定サーバ割当問題は，ユーザ数と要求量をパラメータとしたとき W[1] 困難である．

定理 5 の証明として，独立点集合問題からのパラメータ帰着を与えた．なお，独立点集合問題は解サイズをパラメータとした際に W[1] 困難である．このことから，$\mathrm{FPT} \neq \mathrm{W[1]}$ の仮定の下では，ユーザ数と要求量をパラメータとした FPT アルゴリズムは存在しないといえる．

参考文献

[1] R. Kannan, Minkowski’s convex body theorem and integer programming, Mathematics of Operations Research 12, pp. 415–440, 1987.

[2] E. Rosen, A. Viswanathan and R. Callon, Multiprotocol label switching architecture, The Internet Engineering Task Force, Request for Comments 3031, 2001.

[3] 大日野 肇，伊藤 健洋，鈴木 顕，内澤 啓，周 暁，グラフの経路固定サーバ割当問題に関する研究, 数理解析研究所講究録, no. 1894, 計算理論とアルゴリズムの新潮流 RIMS 研究集会報告集, pp. 41–44, 2014.