2M-06

大規模ボケ画像鮮明化問題に対する線形反復解法の適用について

木下 誠也 † 細田 陽介 ‡ 小澤 伸也 ††
福井大学 †,‡,††

1 はじめに

電子顕微鏡や CT より得られる観測像は，撮影装置に依存するボケを生ずることがある．観測像にボケが含まれる場合，そのまま信用することは危険であるため，像のボケの除去を試みる必要がある．本研究では，線形反復解法によるボケ画像の鮮明化を試みる．

また，ボケ画像を復元するには，装置依存のボケ方を示す点分布関数 (Point Spread Function, 以下 PSF) が必要である．ここでは，ボケ方が一様ではなく，画像における座標の位置に依存して変化するような問題を想定し，このような問題に対して線形反復解法の適用を試みる．なお，以下では PSF は既知であると仮定する．

2 デコンボリューション

PSF は，画像の中心の 1 画素のみが非ゼロである画像が，どのように拡がりを持つかを示す関数である．ボケ画像は，この PSF が求めるべき真の像に畳み込まれたものとして定式化できる．これより，この畳み込みの逆演算，すなわちデコンボリューションを行うことができれば真の画像を求めることができる．PSF が画像における座標の位置に無関係に一様である場合は，この畳み込み演算はブロック循環行列を用いて行列・ベクトル積として定式化でき，この場合，FFT を用いることにより逆演算も効率的に行うことができる．しかし，本研究において想定するような問題では，畳み込み演算はブロック循環行列を用いた行列・ベクトル積としては定式化できず，そのため FFT を用いた逆演算も構成することはできない．そのため，線形反復解法を用いたデコンボリューションについて検討を行う．

3 定式化

まず，本研究において想定するデコンボリューション問題を，線形方程式として定式化する．

いま，観測像ならびに求めるべき真の像のサイズを $S_X \times S_Y$ とし，これらの画像を 1 次元の縦ベクトルとして表現するものとする．すなわち，$n = S_X \times S_Y$ とおき，真の像を $\boldsymbol{x}$ として表現すると，$\boldsymbol{x}$ は n 次元の縦ベクトルである．さらに，PSF による畳み込みの表現行列を $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$，得られた観測像を $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とすると，解くべき線形方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

を得る．

このとき，方程式 (1) の係数行列 A は疎行列であると仮定し，取り扱う画像のサイズが大きくなるほど，A のサイズも大規模となる．そのため，本研究では A は非常に大規模かつ疎であると想定し，A はデータとしてメモリ上では保持することは困難であると仮定する．すなわち，行列 A は，行列・ベクトル積 $A\boldsymbol{x}$ の演算のみで表現可能であるとする．さらに，$A^T\boldsymbol{x}$ の演算は不可であると想定する．

4 線形反復解法

線形方程式 (1) を解くための解法には種々のものがあるが，大規模疎行列を係数行列に持つような問題には反復法を使用するのが一般的である．本研究では $A^T\boldsymbol{x}$ の演算が不必要な，いわゆるトランスポーズフリーな解法として，以下の 4 つの解法 [1, 2, 3]，

- GMRES
  (Generalized Minimal RESidual)
- GMRES(m)
- CGS (Conjugate Gradient Squared)
- BI-CGSTAB
  (BI-Conjugate Gradient STABilized)

についての適用を試みる．各解法について，以下に紹介する．

4.1 GMRES

GMRES は，初期ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ に対して，初期残差ベクトルを $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_0$ として得られる Krylov 部分空間

$$\mathcal{K}_k = \mathrm{span}\{\boldsymbol{r}_0, A\boldsymbol{r}_0, A^2\boldsymbol{r}_0, \cdots, A^{k-1}\boldsymbol{r}_0\}$$

で制約された最小二乗問題 $\min \|A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$ の解を k 反復における近似解とする方法である．この方法

An application of linear iteration methods for large-scale debluring problems
† Seiya Kinoshita, University of Fukui
‡ Yohsuke Hosoda, University of Fukui
†† Shinya Ozawa, University of Fukui

は，悪条件な問題に対しても比較的ロバストであるが，Krylov 部分空間の正規直交基底と，制約付最小二乗問題を解くために用いた Hessenberg 行列を記憶しておく必要があるため，反復が進むにつれて必要なメモリが増大していくという欠点がある．

4.2 GMRES(m)

GMRES(m) は, 上で述べた GMRES の欠点を克服するために，m 反復ごとに GMRES のプロセスをリスタートする方法である．そのため，必要となる Krylov 部分空間の正規直交基底と Hessenberg 行列のサイズは高々 m 次であり，GMRES よりも少なくて済むが，一般的に GMRES に比べて収束が遅くなる．また，リスタートを行う m を小さくするほど収束特性が悪化する傾向にある．

ちなみに，GMRES ならびに GMRES(m) は 1 反復について, 行列・ベクトル積が 1 回必要である．

4.3 CGS

CGS は, BI-CG アルゴリズム [3] において，$A^T\boldsymbol{x}$ の計算を用いないように再構築した反復解法である．それゆえ，$A^T\boldsymbol{x}$ の計算を用いない代わりに，1 反復において, 行列・ベクトル積が 2 回必要となる．

CGS は解の初期ベクトル以外に，もう一つベクトルを任意に選ぶ必要がある．通常，このもう一つのベクトルは，乱数を用いて生成するが，反復の収束特性が，このもう一つのベクトルに大きく依存してしまうという特性がある．

4.4 BI-CGSTAB

BI-CGSTAB は，CGS の収束性の安定化のために改良された手法であり，加速多項式が二次式となる BI-CG の残差多項式でなく，一次式となる最小残差多項式を用いる．BI-CGSTAB も，1 反復あたりに行列・ベクトル積は 2 回必要であるとともに，解の初期ベクトル以外に，もう一つのベクトルを任意に選ぶ必要があり，その決め方によって収束特性が変化する．

5 数値実験と評価方法

数値実験では比較的小規模なグレイスケール二次元画像を真の画像と想定し，それに対して，画像の中心から離れるほどボケる範囲が広がるような PSF を設定し，その PSF と畳み込みを行うことによりボケ画像を生成した．そして，前節で述べた線形反復解法を適用し，得られた復元像に対して，相対誤差ならびに PSNR を用いて評価を行なった．また，各反復解法において復元像を得るために必要となった反復回数も評価対象とした．

数値実験の詳細については発表時に述べる．

6 まとめ

本研究において，ボケ方が一様ではないボケ画像の鮮明化問題に対して，計算過程においてトランスポーズフリーな各種線形反復解法を適用し，数値実験を用いてその数値的特性ならびに復元画像の評価を行なった．今後の課題として，より大規模な問題への適用と，データにノイズが含まれるような問題に対しての評価が挙げられる．

参考文献

[1] G. H. Golub and C. F. Van Loan, Matrix Computation 4th Edition, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2013.
[2] C. T. Kelley，Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations，SIAM, Philadelphia, PA，1995.
[3] Y. Saad，Iterative Methods for Sparse Linear Systems 2nd Edition, SIAM, Philadelphia, PA, 2003.