

C₅ フリー正則グラフの最大誘導マッチング 問題に対する近似アルゴリズム

朝廣 雄一¹ Lin Guohui 柳 植竜³ 宮野 英次³

概要：本研究報告では、C₅ フリー d 次正則グラフ上の最大誘導マッチング問題 (MaxIM) について考える。C₅ フリー d 次正則グラフ上の MaxIM に対する従来の最良の近似率は $(\frac{3d}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16d-8})$ である。本研究報告では、 $(\frac{2d}{3} + \frac{1}{3})$ 近似アルゴリズムを設計する。この近似率は $d \geq 6$ のときに従来のものよりも真に小さい。

1. はじめに

$G = (V, E)$ を単純重みなしグラフとする。ここで、 V および E はそれぞれ頂点集合および辺集合とする。2 辺は共通の頂点を含むとき隣接するという。グラフ G のマッチングとは隣接しない辺部分集合である。マッチング M の異なる 2 辺の 2 頂点が隣接しないとき、 M は誘導マッチングと呼ばれる。すなわち、誘導マッチング M は、 G の 1 正則誘導部分グラフを成す。誘導マッチングは、強マッチングと呼ばれることもある [5], [7]。

最大誘導マッチング問題 (MaxIM) は入力グラフの辺数が最大となる誘導マッチングを求める問題である。MaxIM は Stockmeyer と Vazirani により提案され、リスクフリー結婚問題を応用とした最大マッチング問題の亜種である [14]。誘導マッチングは様々な領域で多くの応用が知られており [1], [6], [14]、多くの研究がある。

MaxIM は一般に困難問題であり、Stockmeyer と Vazirani [14]、Cameron [2] は独立に MaxIM が NP 困難であることを示した。また、最大次数 4 の平面グラフ [9]、最大次数 3 以下の二部グラフ [11], [13]、線グラフ、チェアフリーグラフ、ハミルトングラフ [10]、 $d \geq 3$ の d 次正則グラフ [3] に入力を限定しても NP 困難である。

本稿では、 d 次正則グラフ上での MaxIM の近似について考える。Zito [15] は、 d 次正則グラフ上の MaxIM 問題に対して、単純な貪欲アルゴリズムの近似率が $(d - \frac{1}{2} + \frac{1}{4d-2})$ であることを示し、Duckworth, Manlove, Zito [3] は、 $\frac{n(d-1)}{n-2}$ 、すなわち、漸近的に $d - 1$ であることを示した。その後、Gotthilf と Lewenstein [8] は、貪欲法と局所探索法を合わ

せることで、 $(\frac{3d}{4} + 0.15)$ 近似アルゴリズムを設計した。

d 次正則グラフの部分クラスに対しては、より良い近似アルゴリズムが知られている。Rautenbach [12] は、 $\{C_3, C_5\}$ フリーの d 次正則グラフ上の MaxIM に対して、 $(0.7084d + 0.425)$ 近似アルゴリズムを設計した。Fürst, Leichter, Rautenbach [4] は以下の d 次正則グラフの部分クラスに対して近似アルゴリズムを設計した： C_4 フリー d 次正則グラフに対する $(\frac{9d}{16} + \frac{33}{80})$ 近似、 $\{C_3, C_4\}$ フリー d 次正則グラフに対する $(\frac{d}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8d-4})$ 近似、 C_5 フリー d 次正則グラフに対する $(\frac{3d}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16d-8})$ 近似。

本稿では、 C_5 フリー d 次正則グラフに対する最良の $(\frac{3d}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16d-8})$ 近似アルゴリズム [4] を改善するような $(\frac{2d}{3} + \frac{1}{3})$ 近似アルゴリズムを提案する。提案アルゴリズムは、 $d \geq 6$ のときに従来のものよりも真に良くなる。また、入力を $\{C_3, C_5\}$ フリー d 次正則グラフにした場合にも動作するため、[12] で提案されたアルゴリズムよりも、 $d \geq 3$ のときに、近似率が良くなる。本研究報告では、提案アルゴリズムの概要、近似率証明のアイディアのみを示し、詳細な証明等は別稿に譲る。

関連研究. MaxIM の近似下界に対する結果としては以下が知られている。Duckworth, Manlove, Zito [3] は任意の $\varepsilon > 0$ について、最大次数 3 のグラフ上の MaxIM を $\frac{475}{474} - \varepsilon$ 以下で近似すること、3 次正則グラフ上の MaxIM を $\frac{2375}{2374} - \varepsilon$ 以下で近似すること、最大次数 3 以下の二部グラフ上の MaxIM を $\frac{6600}{6659} - \varepsilon$ 以下で近似することが NP 困難であることを示した。

一方、弦グラフや区間グラフ [2]、木グラフ [5]、円弧グラフ [7]、台形グラフ、 k 区間次元グラフ、補比較可能グラフ [6] を入力とした場合には、MaxIM は多項式時間で求めることができることが知られている。

¹ 九州産業大学
² アルバータ大学
³ 九州工業大学

2. 準備

グラフ $G = (V, E)$ について, $V(G)$ および $E(G)$ によりそれぞれ G の頂点集合および辺集合を表す. 本稿では, $n = |V|$ および $m = |E|$ とする. $G[V']$ は, $G = (V, E)$ の頂点部分集合 $V' \subseteq V$ によって誘導される部分グラフを表し, $G[E']$ は, 辺部分集合 $E' \subseteq E$ によって誘導される部分集合を表す. H をあるグラフ集合とする. グラフが H を頂点誘導部分集合として含まないとき, そのグラフは H フリーであると言う.

グラフ G の頂点 v について, v の開近傍とは $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$ であり, 閉近傍とは $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ のことである. グラフ G の頂点 v の次数を $deg_G(v) = |N_G(v)|$ とする. グラフ G のすべての頂点の次数が d のとき, G を d 次正則グラフと言う. 本稿では, $d \geq 3$ と仮定する.

v_1, v_2, \dots, v_k の k 頂点からなる単純パス P_k を列 $\langle v_1, v_1, \dots, v_k \rangle$ で表し, それぞれの $i = 1, 2, \dots, k-1$ について, $\{v_i, v_{i+1}\}$ がある. パス P の長さは辺の数であり, P_k の長さは $k-1$ である. k 頂点からなる閉路 C_k も同様に列で表し, $C_k = \langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_1 \rangle$ である.

G の 2 頂点 v と v' について, 両頂点間の距離は, v から v' への最短パスの長さであり, $dist_G(v, v')$ で表す. 長さ $k-1$ のパス $P = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_k \rangle$ について, 例えば, $dist_P(v_1, v_1) = 0$, $dist_P(v_1, v_2) = 1$, $dist_P(v_1, v_3) = 2$ である. $V(G)$ の 2 頂点 v と v' について, $dist_G(v, v') = \ell$ のとき, v' は v の距離 ℓ 頂点と言う. 頂点 v の距離 ℓ 頂点の集合を $DV_\ell(v)$ とする. 同様に, $E(G)$ の 2 辺 e と e' について, 両辺間の距離 $dist_G(e, e')$ を次のように定義する: G の線グラフ $L(G)$ の頂点は G の辺に対応しており, G の 2 辺が共通の頂点を持つとき, $L(G)$ の対応する 2 辺は隣接する. e と e' の距離 $dist_G(e, e')$ は, $L(G)$ の 2 頂点 e と e' の距離 $dist_{L(G)}(e, e')$ で定義される. 例えば, $P = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \dots, v_k \rangle$ について, $dist_P(\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_2\}) = 0$, $dist_P(\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}) = 1$, $dist_P(\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}) = 2$ などとなる. 2 辺 e と e' について $dist_G(e, e') = \ell$ となるとき, e' は e の距離 ℓ 辺と言う. e の距離 ℓ 辺の集合を $DE_\ell(e)$ とする. さらに, 辺 e と頂点 v の距離を e の端点と v の最短距離で定義する. つなわち, 辺 $e = \{v_e, v'_e\}$ について, $dist_G(e, v) = \min\{dist_G(v_e, v), dist_G(v'_e, v)\}$ とする. 例えば, $dist_P(\{v_2, v_3\}, v_1) = 1$, $dist_P(\{v_2, v_3\}, v_4) = 1$, $dist_P(\{v_2, v_3\}, v_5) = 2$ などとなる.

2 辺 $e, e' \in E(G)$ について $dist_G(e, e') \leq 2$ となるとき, e を e' に衝突していると言い, $e \in E(G)$ を $e' \in E(G)$ の衝突辺と言う. また, グラフ G の辺 e について,

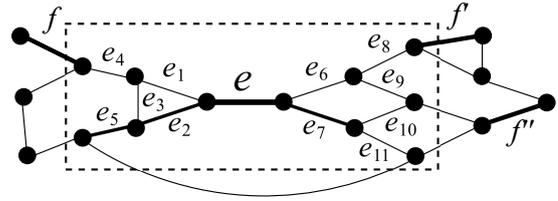


図 1 点線の長方形内の辺 e_1, e_2, \dots, e_{11} および e が e の衝突辺である. $M = \{e, f, f', f''\}$ とするとき, M に関する e のプライベート衝突辺は, e_2, e_5, e_7 と e である.

$$C_G(e) = \{e' \in E(G) \mid dist_G(e, e') \leq 2\} \\ = \{e\} \cup DE_1(e) \cup DE_2(e).$$

を e の衝突辺の集合とする. また, 辺部分集合 $E' \subseteq E(G)$ の衝突辺の集合を以下のように定義する.

$$C_G(E') = \bigcup_{e \in E'} C_G(e).$$

G の辺部分集合 $E' \subseteq E(G)$ と辺 e について,

$$PC_G(E', e) = C_G(e) \setminus \bigcup_{e' \in E' \setminus \{e\}} C_G(e')$$

は, 辺 e には衝突しているが, その他の辺 $e' \in E' \setminus \{e\}$ については衝突していない辺の集合を表す. $PC_G(E', e)$ の辺を E' に関する e のプライベート衝突辺と呼ぶ. 例えば, 図 1 に示されたグラフ G について, 辺 e の衝突辺は, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}$ と e 自身である. また, 辺集合 $M = \{e, f, f', f''\}$ に関する e のプライベート衝突辺は, e_2, e_5, e_7 と e 自身である.

入力グラフ G の最適誘導マッチングを $OPT(G)$ とする. また, あるアルゴリズム ALG の出力した誘導マッチングを $ALG(G)$ とする. このとき, すべての入力 G について, $|OPT(G)| \leq \sigma \cdot |ALG(G)|$ が成り立つとき, アルゴリズム ALG は $MaxIM$ に対する σ -近似アルゴリズムと呼ばれ, ALG の近似率は σ 以下であると言う.

3. 近似アルゴリズム

本稿では, C_5 フリー d 次正則グラフ上の $MaxIM$ について, $(\frac{2d}{3} + \frac{1}{3})$ 近似アルゴリズムを設計する.

3.1 アルゴリズム

まず, 入力 C_5 フリー d 次正則グラフ G に対する我々の近似アルゴリズムの概要を示す. 本アルゴリズムは 2 つのステップからなる: (i) 最初のステップでは, アルゴリズムは, ある辺 e を誘導マッチング M の辺として選び, e の衝突辺集合 $C_G(e)$ のすべての辺を解の候補から削除することを繰り返し行うことにより, 極大な誘導マッチング M を選ぶ. (ii) 次のステップでは, 次のような小さな変更を行うことで, ある時点で選ばれている誘導マッチング M よりもより大きな誘導マッチングを選ぶ: 現時点で得ている誘

導マッチング辺の集合を M とする. アルゴリズムは M からある辺 e を選ぶ. もし, $dist_G(e', e'') > 2$ であるような (少なくとも) 2つの辺 e' と e'' が $PC_G(M, e) \setminus \{e\}$ に含まれているときには, アルゴリズムは「古い」誘導マッチング M を「新しい」誘導マッチング $M = (M \setminus \{e\}) \cup \{e', e''\}$ に置き換える. もしそのような辺 e が M に無い場合には, アルゴリズムは, それぞれの $e' \in PC_G(M, e)$ の値 $|C_G(e')|$ の中で $|C_G(e_{min})|$ が最も小さい値であるような辺 e_{min} を M に関する e のプライベート衝突辺 $PC_G(M, e)$ の中から選び, e と e_{min} を交換する. すなわち, 誘導マッチングを $M = (M \setminus \{e\}) \cup \{e_{min}\}$ に更新する.

以下は提案アルゴリズム ALG の詳細である. ここで, M は ALG により得られた誘導マッチングを表す.

アルゴリズム ALG

入力: C_5 フリー d 次正則グラフ $G = (V, E)$.

出力: G の誘導マッチング M .

初期化: $M = \emptyset$ とおき, すべての辺 $e \in E$ について $C_G(e)$ と $|C_G(e)|$ を求める.

ステップ 1. /* 初期解として, 極大誘導マッチング M を見つける. */

$C_G(M) = E$ となるとき, ステップ 2 に進む. そうでなければ, 任意の辺 e を $E \setminus C_G(M)$ より選び, $M = M \cup \{e\}$ として, ステップ 1 を繰り返す.

ステップ 2. /* より大きな誘導マッチング M を見つける. */

すべての辺 $e \in M$ の $PC_G(M, e)$ を求める.

(i) $PC_G(M, e) \setminus \{e\}$ の極大誘導マッチング $MAX(e)$ のサイズが 2 以上であるような辺 e が存在するとき, $M = (M \setminus \{e\}) \cup MAX(e)$ と更新して, ステップ 2 を繰り返す.

(ii) $|C_G(e)| > |C_G(e')|$ が成り立ち, かつ, すべての辺 $e'' \in PC_G(M, e)$ についての $|C_G(e'')|$ の中で最も小さな値 $|C_G(e')|$ を持つような 2 辺 $e \in M$ と $e' \in PC_G(M, e)$ の組が存在するとき, $M = (M \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ と更新して, ステップ 2 を繰り返す.

(iii) (i) と (ii) 以外するとき, 終了ステップに進む.

終了ステップ 解 M を出力し, 停止する.

[アルゴリズム ALG はここまで]

ステップ 2(i) の詳細は以下である: $PC_G(M, e)$ は k 本の辺を持ち, $PC_G(M, e) = \{e, e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ とする. また, それぞれの $1 \leq i \leq k-1$ について, $MAX(e, e_i)$ は, 最初に e_i を $PC_G(M, e) \setminus \{e\}$ より選び, もし存在するならば $(PC_G(M, e) \setminus \{e\}) \setminus C_G(e_i)$ より誘導マッチングを選ぶことにより得られた極大誘導マッチングであるとする. ステップ 2(i) では, ALG は, まず, $k-1$ 個の極大誘導マッチング $MAX(e, e_1)$ から $MAX(e, e_{k-1})$ を求め, 次に, そ

れら $k-1$ 個から最大サイズのもの $MAX(e)$ として見つける. ここで, もし少なくとも 2 本の辺を持つ極大誘導マッチングが少なくとも 1 個存在するならば, ALG は確実に多項式時間でそれを見つめることができることに注意してほしい.

ここで, ALG が出力する誘導マッチング M が実行可能解になっていることを示す. まず, ALG は, 辺 e が M に挿入されたとき, $C_G(e)$ のすべての辺は解の候補から削除されていることがわかる. さらに, $PC_G(M, e)$ のそれぞれの辺が e を除く M の辺と衝突しないかを確かめることができる. よって, M の任意の 2 辺の距離は少なくとも 3 であり, 出力 M のすべての辺は誘導マッチング辺になっている. すなわち, ALG は, 常に, 実行可能な誘導マッチング M を出力することができる.

次に, ALG の計算時間の見積もりを行う: 明らかに, 初期化とステップ 1 は $O(m^2)$ 時間で実行できる. ステップ 2(i) のそれぞれの実行において, M の誘導マッチング辺の数は少なくとも 1 本は増える. よって, ステップ 2(i) 全体の実行回数は高々 $O(m)$ である. ステップ 2(i) のそれぞれの繰り返しの実行は $O(m^2)$ でできる. 以上より, ステップ 2(i) 全体の計算時間は $O(m^3)$ である. ステップ 2(ii) については, もしある時刻に $|M| = i$ であるとする, アルゴリズム ALG は, $PC_G(M, e_1)$ から $PC_G(M, e_i)$ までの i 個のプライベート衝突辺集合について, ステップ 2(ii) の中で確かめることになる. すなわち, ステップ 2(ii) の実行回数は高々 $O(m^2)$ である. ステップ 2(ii) は $O(m)$ 時間で実行可能である. よって, ステップ 2(ii) の全体の計算時間は, $O(m^3)$ となる. ステップ 2 のそれぞれの繰り返しの最初にすべての辺 $e \in M$ に対する $PC_G(M, e)$ を求めるために $O(m^2)$ 時間を必要とする. ステップ 2 の繰り返しの $O(m^2)$ で抑えられるため, ステップ 2 の計算時間は $O(m^4)$ である. 以上より, ALG は $O(m^4)$ 時間で実行可能である.

ステップ 2 についてより詳細にみる: M の極大性より, ステップ 1 の終了後には, $\bigcup_{e \in M} C_G(e) = E(G)$ が成り立つ. ここで, ステップ 2(i) のある繰り返しにおいて, ALG が, $PC_G(M, e_1)$ 内の極大誘導マッチング $MAX(e_1)$ が少なくとも 2 本の誘導マッチング辺を持っているような辺 e_1 を見つけたとする. この時点で, $PC_G(M, e_1)$ 内のすべての辺は e_1 とのみ衝突している. $\bigcup_{e \in M \setminus \{e_1\}} C_G(e) = E(G) \setminus PC_G(M, e_1)$ が成り立っている. さらに, $MAX(e_1)$ の極大性より, $PC_G(M, e_1) \subseteq \bigcup_{e' \in MAX(e_1)} C_G(e')$ が成り立たなければならない. ALG はステップ 2(i) で $M' = (M \setminus \{e_1\}) \cup MAX(e_1)$ とすることにより, 新しく暫定解 M' を得るので, M' について, $\bigcup_{e \in M'} C_G(e) = E(G)$ が満たされている. ステップ 2(ii) は, M が ALG によって最終的に出力された解であるとき, すべての辺 $e' \in PC_G(M, e)$ について $|C_G(e)| \leq |C_G(e')|$ が成り立っていることを保証する. 以上のことと ALG の終

了条件より、以下のことが言える：

注意 1. 入力グラフ G に対して、 ALG が誘導マッチング M を出力して停止したとき、以下の 3 つのことが成り立つ：

- (1) M に関する e のプライベート衝突辺集合 $PC_G(M, e)$ について、 $PC_G(M, e)$ の任意の 2 本の辺は必ずお互いに衝突している。
- (2) すべての辺 $e' \in PC_G(M, e)$ について、 $|C_G(e)| \leq |C_G(e')|$ が成り立つ。
- (3) $\bigcup_{e \in M} C_G(e) = E(G)$ が成り立つ。すなわち、 M は極大誘導マッチングである。

3.2 近似率

本節では、アルゴリズム ALG の近似率について考える。ここで、グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき、 ALG は最後に誘導マッチング M を出力して、そのサイズを $|ALG(G)| = |M|$ とする。出力解 M に辺 e が含まれているとき、 ALG は、 $PC_G(M, e)$ から他の 2 つ以上の辺を解として選ぶことにより M のサイズを大きくすることができないことに注意する。 $|C_G(e)|$ と $|PC_G(M, e)|$ の間には以下の関係が成り立つことを示すことができる。

補題 1. グラフ $G = (V, E)$ の極大誘導マッチングについて、以下の不等式が成り立つ：

$$\sum_{e \in M} (|C_G(e)| - |PC_G(M, e)|) \geq 2(|E| - \sum_{e \in M} |PC_G(M, e)|).$$

文献 [3] において、 d 次正則グラフの辺 e の衝突辺の最大数 Γ_d について以下が成り立つことが示されている：

事実 1 ([3] の定理 3.1). d 次正則グラフ G の任意の辺 e について、 e の衝突辺の数 $|C_G(e)|$ は高々 $2d^2 - 2d + 1$ 本である。

すべての辺 $e \in E(G)$ の中で衝突辺の数 $|C_G(e)|$ の上界を Γ_d とする。例えば、 C_3 や C_4 などの短い閉路の中に $C_G(e)$ 内のある辺 e' が含まれている場合には、辺 e の衝突辺の数 $|C_G(e)|$ は $2d^2 - 2d + 1$ よりも小さくなる。実際に、文献 [8] において、以下のことが示されている：

事実 2 ([8] の補題 4 および 6). d 次正則グラフ G の長さ 3 の閉路 C_3 が $C_G(e)$ の辺 e を含んでいる場合、閉路 C_3 により、 $|C_G(e)|$ の上界 Γ_d は少なくとも 1 は小さくなる。さらに、長さ 4 の閉路 C_4 が $C_G(e)$ の辺 e を含んでいる場合、閉路 C_4 により、 $|C_G(e)|$ の上界 Γ_d は少なくとも 1 は小さくなる。

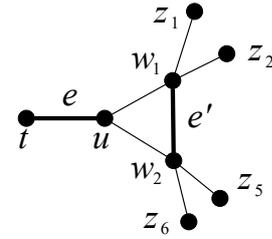


図 2 辺 $e = \{t, u\}$ は三角辺 $e' = \{w_1, w_2\}$ を持つ。

図 2 の辺 $e = \{t, u\}$ を考える。 e の 2 つの隣接頂点 w_1 と w_2 が辺 $e' = \{w_1, w_2\}$ により結ばれているとき、 e' を e の三角辺と呼び、 e は三角辺 e' を持つと言う。以下の補題 2 を得ることができる。

補題 2. グラフ G の辺 e が三角辺 e' を持つとき、辺 e' によって、 $|C_G(e)|$ の上界 Γ_d は少なくとも 1 は小さくなる。

ここで、出力解 M の辺 $e = \{t, u\}$ と M に関する e のプライベート衝突辺集合 $PC_G(M, e)$ を考える。このとき、 $U_G(e) = (\{e' \mid dist_G(e', u) \leq 1\} \cap PC_G(M, e)) \setminus \{e\}$ および $T_G(e) = (\{e' \mid dist_G(e', t) \leq 1\} \cap PC_G(M, e)) \setminus \{e\}$ とする。大雑把に言うと、 $U_G(e)$ および $T_G(e)$ はそれぞれ $PC_G(M, e)$ の“ u 側の”部分集合と“ t 側の”部分集合である。 $PC_G(M, e) = U_G(e) \cup T_G(e) \cup \{e\}$ および $U_G(e) \cap T_G(e)$ は空集合の可能性もある。さらに、 $U_G^0(e) = \{e' \in U_G(e) \mid dist_G(e', u) = 0\}$ 、 $U_G^1(e) = U_G(e) \setminus U_G^0(e)$ 、 $T_G^0(e) = \{e' \in T_G(e) \mid dist_G(e', t) = 0\}$ 、および $T_G^1(e) = T_G(e) \setminus T_G^0(e)$ とする。

以降では、 $|PC_G(M, e)| = \beta$ とする。一般性を失うことなく、以下では、 $|U_G(e)| \geq |T_G(e)|$ が成り立つと仮定する。このとき、自明ではあるが、 ALG の近似率を見積もるときに重要になる以下の補題が成り立つ：

補題 3. それぞれの辺 $e \in M$ について、 $|U_G^1(e)| \geq \frac{\beta-1}{2} - (d-1)$ が成り立つ。

図 3 を参照。 $W_G(e) = V(G[U_G(e)]) \cap DV_1(u) = \{w_1, w_2, \dots, w_\delta\}$ を u の δ 個の隣接頂点の集合とする。ここで、 $\delta \leq |DV_1(u)| - 1$ が成り立つ (“ -1 ” は辺 $\{t, u\}$ を意味する)。また、それぞれの $w_i \in W_G(e)$ について、 $U_G^1(e, w_i) = \{(w_i, v) \mid v \in DV_1(w_i)\} \cap U_G^1(e)$ と定義する。一般性を失うことなく、それぞれの $i = 2, \dots, \delta$ について、 $|U_G^1(e, w_1)| \geq |U_G^1(e, w_i)|$ であると仮定する。ここで、 $|U_G^1(e, w_1)| \leq 1$ が成り立つ場合を考える。このとき、以下の補題が成り立つ：

補題 4. $|U_G^1(e, w_1)| \leq 1$ とし、アルゴリズム ALG は M を出力すると仮定する。このとき、すべての誘導マッチング辺 $e \in M$ について、 $|PC_G(M, e)| \leq 4d - 3$ および $|C_G(e)| + |PC_G(M, e)| \leq 2d^2 + 2d - 2$ が成り立つ。

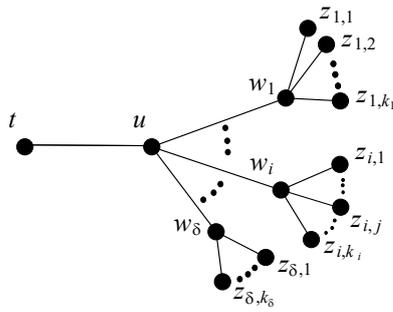


図 3 $W_G(e) = V[G[U_G(e)]] \cap DV_1(u) = \{w_1, w_2, \dots, w_\delta\}$ である。ここで、 w_i は $z_{i,1}$ から z_{i,k_i} の k_i 個の隣接を持つ。

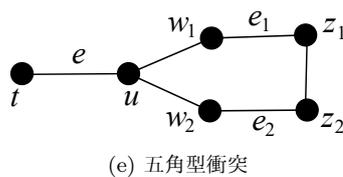
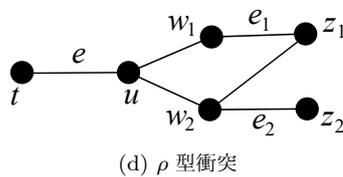
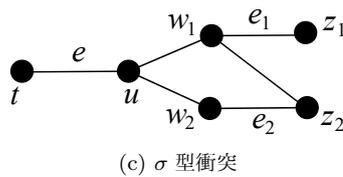
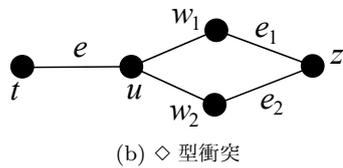
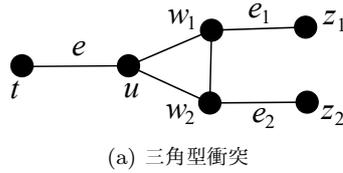


図 4 $U_G^1(e)$ の 2 辺 e_1 の e_2 の 5 種類の衝突

ここで、 $|U_G^1(e, w_1)| \geq 2$ が成り立つと仮定する。まず、 $i \neq 1$ について、 $U_G^1(e, w_1)$ のある辺と $U_G^1(e, w_i)$ の別の辺の様々な衝突の仕方について考えてみる。

$PC_G(M, e)$ の任意の 2 辺、つまりは $U_G^1(e)$ の任意の 2 辺は、ALG の出力 M についてお互いに衝突している。 $U_G^1(e)$ の 2 辺 e_1 と e_2 の衝突の方法には以下のような 5 つのタイプがある：(a) 三角型衝突、(b) ◇型衝突、(c) σ 型衝突、(d) ρ 型衝突、および (e) 五角型衝突。図 4 を参照。 $U_G^1(e)$ の 2 辺 $e_1 = \{w_1, z_1\}$ と $e_2 = \{w_2, z_2\}$ を考える。(a) 図 4(a) に示すように辺 $\{w_1, w_2\}$ が存在することにより e_1 が e_2 と衝突するとき、 e_1 は e_2 に辺 $\{w_1, w_2\}$ により三角型衝

突すると言う。(b) 図 4(b) を参照。もし e_1 と e_2 が共通の頂点 z に接続しており、かつ、 $U_G^1(e)$ が辺 $\{w_1, w_2\}$ を含んでいないならば、 e_1 と e_2 はお互いに ◇ 型衝突していると言う。図 4(b) に示されたグラフが辺 $\{w_1, w_2\}$ を持つなら、 e_1 と e_2 は辺 $\{w_1, w_2\}$ によりお互いに三角型衝突していることとみなすことができることに注意する。(c) 図 4(c) に示すように、辺 $\{w_1, z_2\}$ が存在し、辺 $\{w_1, w_2\}$ が存在しない場合には、 e_1 と e_2 は辺 $\{w_1, z_2\}$ によりお互いに σ 型衝突していると言う。(d) 図 4(d) に示すように、辺 $\{w_2, z_1\}$ が存在し、辺 $\{w_1, w_2\}$ が存在しない場合には、 e_1 と e_2 は辺 $\{w_2, z_1\}$ によりお互いに ρ 型衝突していると言う。(e) 図 4(e) を参照。もし辺 $\{z_1, z_2\}$ が存在し、辺 $\{w_1, w_2\}$ が存在しない場合には、 e_1 と e_2 は辺 $\{z_1, z_2\}$ によりお互いに五角型衝突していると言う。ここで、すべての入力グラフは C_5 フリー d 次正則グラフであることを思い出してほしい。これにより、長さ 5 の誘導サイクル $\langle u, w_1, z_1, z_2, w_2, u \rangle$ は内側に少なくとも 1 本の辺を持たなければならない。例えば、グラフが辺 $\{w_1, z_2\}$ を持つ場合、 e_1 と e_2 は、辺 $\{w_1, z_2\}$ によりお互いに σ 型衝突することになる。よって、五角型衝突を考える必要はない。

以下では、先に示した三角辺の定義を少しだけ変更する。先に定義したものを以下では元の三角辺と呼ぶ。 $w_i \neq w_1$ 、 $w_j \neq w_1$ かつ $w_i \neq w_j$ について、一方の端点が w_i 、もう一方が $W_G(e) \setminus \{w_i\}$ に含まれる w_j であるとき、 $U_G^1(e)$ の辺を、 e の三角辺と呼ぶ。すなわち、例えば、辺 $\{w_1, w_3\}$ は、端点が w_1 であるので、三角辺ではない。三角辺の集合を $TE_G(e)$ とし、元の三角辺の集合を $OTE_G(e)$ とする。以下のように定義する：

$$A_G(e) = U_G^1(e) \setminus (U_G^1(e, w_1) \cup TE_G(e)).$$

定義より、 $A_G(e)$ のすべての辺 e_2 は、 $U_G^1(e, w_1)$ のすべての辺 e_1 と衝突しており、 $|U_G^1(e, w_1) \setminus OTE_G(e)| \geq |U_G^1(e, w_i) \setminus OTE_G(e)|$ を満たす。以下では、 $A_G(e)$ の辺は、三角型衝突辺と四角型衝突辺に分類する：

三角型衝突辺： $A_G(e)$ の辺 e' が、 $U_G^1(e, w_1)$ の辺に三角型衝突しているとき、辺 e' を三角型衝突辺と呼ぶ。三角型衝突辺の集合を $TC_G(e)$ とする。

四角型衝突辺： $A_G(e)$ の辺 e' が、 $U_G^1(e, w_1)$ の辺に ◇ 型衝突、 σ 型衝突、または ρ 型衝突をしているとき、辺 e' を単に四角型衝突辺と呼ぶ。四角型衝突辺の集合を $QC_G(e)$ とする。

定義より、 $U_G^1(e) = TC_G(e) \cup QC_G(e) \cup U_G^1(e, w_1) \cup TE_G(e)$ および $TC_G(e) \cap QC_G(e) = \emptyset$ が成り立つ。

ここでは、 $|U_G^1(e, w_1)| \geq 2$ を仮定していることを思い出してほしい。辺 $e' = \{u, w_1\}$ の衝突辺集合 $C_G(e')$ の数を見積もる。 $TC_G(e)$ のそれぞれの辺は一つの長さ 3 の閉路 C_3 を作り、その閉路は辺 e' を含んでいる。また、 $QC_G(e)$ のそれぞれの辺は長さ 4 の閉路 C_4 を作り、その閉路は

e' を含んでいる. さらに, $TE_G(e)$ のそれぞれの辺は辺 e' の元の三角辺になっている. これらと事実 2 および補題 2 により, $TC_G(e) \cup QC_G(e) \cup TE_G(e)$ のそれぞれの辺は $|C_G(e')|$ の上界 Γ_d を少なくとも 1 は小さくする.

補題 5. $|U_G^1(e, w_1)| \geq 2$ と仮定する. また, アルゴリズム ALG は解 M を出力すると仮定する. このとき, 辺 $e' = \{u, w_1\}$ について, $|C_G(e')| \leq 2d^2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}$ が成り立つ.

補題 5 より, 以下の系が得られる:

系 1. $|U_G^1(e, w_1)| \geq 2$, かつアルゴリズム ALG は解 M を出力すると仮定する. このとき, それぞれの誘導マッチング辺 $e \in M$ について, $|C_G(e)| \leq 2d^2 - \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}$ が成り立つ.

上の系より, 以下の補題が成り立つ:

補題 6. $|U_G^1(e, w_1)| \geq 2$, かつアルゴリズム ALG は解 M を出力すると仮定する. このとき, それぞれの誘導マッチング辺 $e \in M$ について, $|PC_G(M, e)| \leq \frac{4d^2-1}{3}$, かつ $|C_G(e)| + |PC_G(M, e)| \leq \frac{8d^2-2}{3}$ が成り立つ.

補題 4 および補題 6 より, 以下の系が得られる:

系 2. アルゴリズム ALG は解 M を出力したと仮定する. このとき, それぞれの誘導マッチング辺 $e \in M$ について, $|C_G(e)| + |PC_G(M, e)| \leq \frac{8d^2-2}{3}$ が成り立つ.

以下が本稿の主定理である:

定理 1. アルゴリズムは ALG は, C_5 フリー d 次正則グラフ上の $MaxIM$ について, $(\frac{2d}{3} + \frac{1}{3})$ 近似アルゴリズムであり, $O(m^4)$ 時間で動作する.

4. 最後に

本稿では, C_5 フリー d 次正則グラフ上の $MaxIM$ の近似可能性について考えた. 従来の最良の近似率は, $(\frac{3d}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16d-8})$ であった. 本稿では $(\frac{2d}{3} + \frac{1}{3})$ 近似アルゴリズム ALG を示した. ALG の近似率は, $d \geq 6$ のときに, 従来の近似率よりも真に良くなる. ALG はステップ 1 で, 極大誘導マッチング M を初期暫定解として求めている. しかし, ステップ 1 は $(\frac{3d}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16d-8})$ 近似アルゴリズムで置き換えることができる. ステップ 2 は必ず暫定解と同じまたはより大きなサイズの更新解を見つけることができる. よって, すべての $d \geq 3$ の C_5 フリー d 次正則グラフ上の $MaxIM$ について, $\min\{\frac{3d}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{16d-8}, \frac{2d}{3} + \frac{1}{3}\}$ 近似を実現することができる.

謝辞

本研究の一部は, Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada, 科研費 JP17K00016, JP17K00024, および JST CREST JPMJR1402 の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] H. Balakrishnan, C.L. Barrett, V.S.A. Kumar, M.V. Marathe, and S. Thite. The distance-2 matching problem and its relationship to the MAC-layer capacity of ad hoc wireless networks. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, **22**, pp.1069-1079 (2004)
- [2] K. Cameron. Induced matching. *Discrete Applied Mathematics*, pp.97-102 (1989)
- [3] W. Duckworth, D. F. Manlove and M. Zito. On the approximability of the maximum induced matching problem. *Journal of Discrete Algorithmica*, **3**, pp.79-91 (2005)
- [4] M. Fürst, M. Leichter and D. Rautenbach. Locally searching for large induced matchings. *Theoretical Computer Science*, **720**, pp.64-72 (2018)
- [5] G. Fricke and R. Laskar. Strong matching on trees. *Congressus Numerantium*, **89**, pp.239-243 (1992)
- [6] M.C. Golumbic and M. Lewenstein. New results on induced matchings. *Discrete Applied Mathematics*, **101**, pp.157-167 (2000)
- [7] M.C. Golumbic and R.C.Laskar. Irredundancy in circular arc graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **44**, pp.79-89 (1993)
- [8] Z. Gotthilf and M. Lewenstein. Tighter approximations for maximum induced matchings in regular graphs. *Proc. 3rd Workshop on Approximation and Online Algorithms (WAOA'05)*, LNCS3879, pp.270-281 (2005)
- [9] C.W. Ko and F.B. Shepherd. Bipartite domination and simultaneous matroid covers. *SIAM J. Discrete Math.*, **16**, pp.517-523 (2003)
- [10] D. Kobler and U. Rotics. Finding maximum induced matchings in subclasses of claw-free and P_5 -free graphs, and in graphs with matching and induced matching of equal maximum size. *Algorithmica*, **37**, pp.327-346 (2003)
- [11] V.V. Lozin. On maximum induced matchings in bipartite graphs. *Information Processing Letters*, **81**, pp.7-11 (2002)
- [12] D. Rautenbach. Two greedy consequences for maximum induced matchings. *Theoretical Computer Science*, **602**, pp.32-38 (2015)
- [13] I. Rusu. Maximum weight edge-constrained matchings. *Discrete Applied Mathematics*, **156** pp.662-672 (2008)
- [14] L.J. Stockmeyer and V.V. Vazirani. NP-completeness of some generalizations of the maximum matching problem. *Information Processing Letters*, **15**, pp.14-19 (1982)
- [15] M. Zito. Maximum induced matchings in regular graphs and trees. *Proc. the 25th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'95)*, LNCS1665, pp.89-100 (1999)