2B-05

ハイブリッドシステム解析器 HyLaGI における非線形常微分方程式の精度保証計算

増田　健太†　　松本 翔太†　　上田 和紀‡

早稲田大学大学院基幹理工学研究科†　　早稲田大学基幹理工学部‡

1　はじめに

ハイブリッドシステムとは，複数の状態変数と，常微分方程式によるそれらの連続変化，そして離散変化により構成される動的システムのことである．HyLaGI[1]は，ハイブリッドシステムモデリング言語 HydLa[2]の C++ による処理系で，Mathematica を用いた記号的解析によりハイブリッドシステムの厳密な解軌道を求めることができるという特徴を持っている．

ハイブリッドシステムには，常微分方程式が線形であっても離散変化時刻を記号的に求められないようなものがあり，これは記号的解析を行う上で問題となる．HyLaGI はこの問題に対し，記号計算と精度保証付き数値計算を組み合わせることでハイブリッドシステムの精度保証された解軌道を求めることができる区間モード[3]という機能を備えている．しかし，区間モードであっても微分方程式は記号的に解いているので非線形な微分方程式は扱えないという課題がある．

本研究は，非線形な常微分方程式を HyLaGI で解ける形のハイブリッドシステムに変換し，精度保証解を求められるようにすることを目的とする．

2　HyLaGI の区間モード

HyLaGI の区間モードは，常微分方程式が線形なハイブリッドシステムについて，区間ニュートン法[4]とアフィン演算を用いたシミュレーションを行うことで，パラメータ間の一次の依存関係を保存した精度保証解を計算するものである．これにより，離散変化時刻が記号的に求められないモデルであってもパラメータを含むシミュレーションが可能となる．

3　提案手法

提案手法は三つのステップからなる．まず非線形関数について，その取り得る定義域を用いて定数項に区間を持つ線形常微分方程式を複数個繋ぎ合わせた形で包含を行う．次にこれを方程式の切り替えを離散変化で表したハイブリッドシステムに変換する．そして，このハイブリッドシステムについて HyLaGI を用いて精度保証計算をすることによって解析を行う．本手法では，非線形関数が一変数関数で構成されるような常微分方程式を対象とするので，関数を囲う形は平行四辺形の組となる．

非線形関数の包含を行うためのアルゴリズムを説明する．これは非線形関数 $f(x)$ と平行四辺形の縦幅 $width$，そして x の定義域 $[x_{min}, x_{max}]$ を入力とし，$f(x)$ を包含する縦幅 $width$ の線形関数の組を出力する．現在のアルゴリズムでは最初に x_{min} から上下に $width$ だけ広げた幅を取り，その下端と上端からそれぞれ x_{min} における $f(x)$ の接線方向に伸ばした線と $f(x)$ との最初の交点を結ぶようにして平行四辺形を作成している．この方法は最適な平行四辺形を計算するものではなく，具体的には平行四辺形の傾きを端点における関数の傾きではなく区間中の傾きの平均値にしたり，平行四辺形が関数に接するまで幅を削ったりするなどの改善の余地が考えられる．ただし，今回は平行四辺形が縦幅と精度の関係を調べるうえで必ずしも最小の縦幅を求める必要がないため，上述のような手法を用いた．

また，包含する線形関数を単一のパラメータで表現するため，本手法では包含範囲の計算に精度保証は用いていない．したがって，線形関数の計算を行った後に，これが実際に非線形関数を包含できていることを保証する必要がある．これは，それぞれの平行四辺形において，次の二点を確かめることで保証が可能である．一つ目は，平行四辺形中の適当な x において，対応する $f(x)$ が平行四辺形の中に含まれていることを区間演算によって確認する．二つ目は，平行四辺形中の全ての x において，$f(x)$ が平行四辺形との交点を持たないことを区間ニュートン法によって確認する．以上により，非線形関数が正しく線形関数で包含されることが確認できる．

これをハイブリッドシステムに変換するには，まず変数がどの平行四辺形に属しているかを表す離散変数を導入する．次にこの変数の値をガード条件としてそれぞれのケースにおける連続変化を線形関数を用いて記述する．そして，その離散変数をガード条件に取り，変数が平行四辺形の端に到達した瞬間に，隣の平行四辺形に離散変数を移すような離散変化を記述することでハイブリッドシステムに変換できる．

Validated simulation of nonlinear ODE on HyLaGI: a symbolic analyer for hybrid systems

†Kenta MASUDA　†Shota MATSUMOTO　‡Kazunori UEDA
†Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University
‡Faculty Science and Engineering, Waseda University

4 評価と考察

本研究では評価実験として，単振り子の運動の解析を行った．実験は振り子の初期角度θ_0が 20 度の場合と 60 度の場合について，包含する線形関数の個数を3個から73個まで変えながら行った．また，重力加速度は$9.8[m/s^2]$，紐の長さは$5[m]$とした．この結果について，それぞれの場合で単振り子の周期の計算を行った結果を次の表 1 と表 2 に示す．なお分割数は，非線形関数の包含に使用した平行四辺形の個数を表す．また，0.5 周期～2.0 周期までの 4 つの時点でそれぞれ，包含に用いた線形関数の幅と精度を比較した結果を図 2 と図 3 に示す．

分割数	振り子の周期	周期の区間幅
3	[4.5056027, 4.5221576]	1.66e-2
13	[4.5209327, 4.5225773]	1.64e-3
23	[4.5220499, 4.5223538]	3.04e-4
43	[4.5223088, 4.5223896]	8.07e-5
73	[4.5223499, 4.5224094]	5.95e-5

表 1. 分割数と周期の関係($\theta_0 = 20$[deg])

分割数	振り子の周期	周期の区間幅
3	—	—
13	—	—
23	[4.8001313, 4.8283447]	2.82e-2
43	[4.8092295, 4.8223700]	1.31e-2
73	[4.8140777, 4.8183500]	4.27e-3

表 2. 分割数と周期の関係($\theta_0 = 60$[deg])

表 1 と表 2 より，振り子の初期角度が 20 度の時は周期を最大 5 桁の精度で，60 度の時は 3 桁の精度で求めることができた．

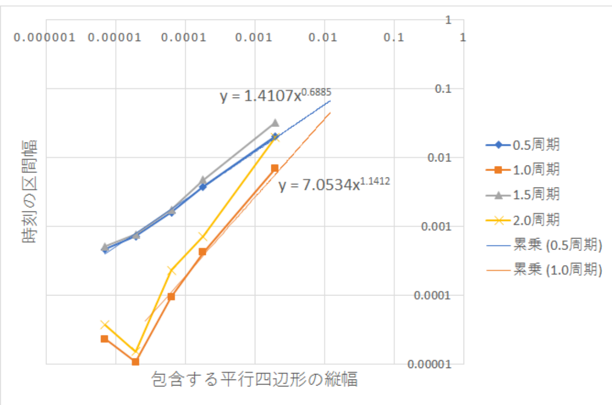

図 2. 包含幅と精度の関係($\theta_0 = 20$[deg])

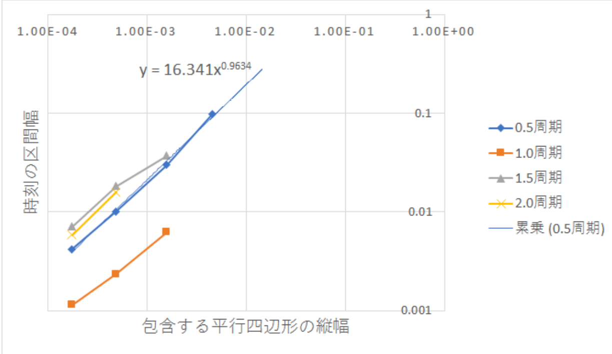

図 3. 包含幅と精度の関係($\theta_0 = 60$[deg])

図 2 と図 3 より，各時点における時刻の区間幅はおおむね包含幅の累乗に比例することが読み取れる．しかし，図 2 については包含幅を狭くしたことでむしろ精度が下がってしまったケースがあった．この原因としては，分割数を増やすほど離散変化の回数が増えるので，これによる精度の低下分が幅を狭くすることによる精度の向上分を上回ると全体として精度が下がるといったことが考えられる．また，区間幅がおよそ包含幅の何乗に比例するかについては，同じ初期角度でかつ同じ包含幅であっても，時刻によって変わり得るということがわかった．この原因については，区間幅は解のアフィン式を区間評価した結果なので時刻によって解の形が変わるということが考えられる．

5 まとめと今後の課題

今回の実験で，非線形な常微分方程式を線形常微分方程式で囲って精度保証計算を行うことができ，その包含幅を狭めるほど解の精度を高めることができるということを確認できた．

今後の課題としては，まずより狭い範囲で囲む手法の検討，次に分割数を増やして精度を高めるための高速化，また今回は一変数関数のみであったが複数変数への対応を行うこと，そして初期値にパラメータを含む場合の対応を行うことが挙げられる．

参考文献

[1] 松本翔太: Validated Simulation of Parametric Hybrid Systems Based on Constraints, 博士学位論文, 早稲田大学, 2017.

[2] 上田和紀, 石井大輔, 細部博史: ハイブリッド制約言語 HydLa の宣言的意味論, コンピュータソフトウェア, Vol.28 No.1, 2011, pp.306-311.

[3] 松本翔太, 上田和紀: Symbolic Simulation of Parametrized Hybrid Systems with Affine Arithmetic, 23rd International Symposium on Temporal Representation and Reasoning, 2016.

[4] Ramon E.Moore, R.Baker Kearfott, Michael J.Cloud: Introduction to Interval Analysis, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.