7A-02

ホールケーキ分割問題に対するカット数最小の無羨望メカニズム

梅田　博之† 　浅野　孝夫‡

中央大学理工学研究科情報工学専攻† 　中央大学理工学部情報工学科‡

1. はじめに

ケーキ分割問題とは，ケーキCおよびプレイヤー集合$N = \{1, 2, \ldots, n\}$, Cへの評価区間$V_i, \forall i \in N$が与えられたときCをどのように分割して割り当てるかを考える問題である．

この問題に対し Alijani ら[1]は EFISM メカニズムを提案した．しかし，これはCが直線形の場合のみ適用可能である．ゆえに，Cが図 1 のようなホールケーキ形の場合は適用不可能である．

そこで本研究では，Cがホールケーキ形（以降Cはホールケーキ形とする）でも適用できるよう，EFISM を一般化する．

2. 定義とメカニズムが満たすべき性質

本節ではまず必要な定義を行い，メカニズムが満たすべき性質を定義する．

図1 を見て頂きたい．まず，Cに対するケーキ分割問題をホールケーキ分割問題とよぶ．また，C上の座標は12 時の位置が0 であり，右回りに大きくなり1 週すると$1 = 0$に戻る．**ホールケーキ区間**（以下w区間と呼ぶ）とはC内の区間であり，始点の座標a, 終点の座標bのとき，$[a, b]$で表す．また，長さを$|W|$で表す．図1 より例示すると以下のようになる．

$W_1 = [0.25, 0.5] \qquad |W_1| = 0.25$
$W_2 = [0.75, 0.125] \qquad |W_2| = 0.375$

評価区間とは，$V_i = [\alpha_i, \beta_i], \forall i \in N$である．Alijani ら[1]の研究および本研究では，$\forall i \in N$に対し，$V_i \not\subset V_o, \forall o \in N \setminus \{i\}$を仮定している．また，$\boldsymbol{V} = (V_i)_{i \in N}$, $V_{-i} = (V_o)_{o \in N \setminus \{i\}}$と定義する．

メカニズムMは$\boldsymbol{V}$を入力として，**割当** $\boldsymbol{A}^M(\boldsymbol{V}) = \left(A_1^M(\boldsymbol{V}), A_2^M(\boldsymbol{V}), \ldots, A_n^M(\boldsymbol{V})\right)$を決定する．また$\#A_i^M(\boldsymbol{V})$は$A_i^M(\boldsymbol{V})$に含まれるw区間の数であり，$\boldsymbol{A}^M(\boldsymbol{V})$は$C$の分割である．$C$を$k$個に分割するには$k$回カットする必要がある．ゆえに$\boldsymbol{A}^M(\boldsymbol{V})$のカット数とは$\sum_{i \in N} \#A_i^M(\boldsymbol{V})$である．

効用を$U_i^M(\boldsymbol{V}) = |V_i \cap A_i^M(\boldsymbol{V})|$と定義する．

次にメカニズムが満たすべき3 つの性質を定義する．

定義1（カット数の最小性）メカニズムMがカット数の最小性を満たすとは，$\sum_{i \in N} \#A_i^M(\boldsymbol{V}) = n, \forall \boldsymbol{V}$が成立することである．

定義2（無羨望性）メカニズムMが無羨望性を満たすとは，$\forall i \in N$に対し

$$|V_i \cap A_o^M(\boldsymbol{V})| \leq U_i^M(\boldsymbol{V}), \qquad \forall o \in N \setminus \{i\}, \forall \boldsymbol{V}$$

が成立することである．

定義3（戦略的操作不可能性）メカニズムMが戦略的操作不可能性を満たすとは，任意の入力$\boldsymbol{V}$に対して，どの$i \in N$でも，V_iをどのようなV_i'に変えても

$$|V_i \cap A_i^M(V_i', V_{-i})| \leq U_i^M(V_i, V_{-i})$$

が成立することである．

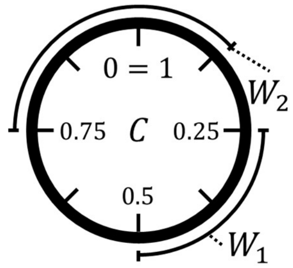

図1: ホールケーキ区間

3. 提案メカニズムと性質の証明概略

本節ではまず必要な定義を行い，提案メカニズム WEFISM (Whole cake EFISM) とその実行例を示す．最後にこれが2 節で述べた性質を満たすことを論じる．

3.1 WEFISM のための定義

チェーンは隙間ないw区間の列である．$K_j = \left(W_{j(1)}, W_{j(2)}, \ldots, W_{j(n_j)}\right)$がチェーンであるとは，$b_{j(l)} = a_{j(l+1)}$, $1 \leq \forall l \leq n_j - 1$が成立することである（$n_j = 1$のときは無条件でチェーンである）．また，$N_j = \left\{j(1), j(2), \ldots, j(n_j)\right\}$とする．

次に**シュリンク**について述べる．これは$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{V}$から$K_j$に関する w 区間$[a_{j(1)}, b_{j(n_j)}]$を除くための操作である．以下に概要を示す．

```
Shrink (C, V, K_j)
  C ← [0, |C| − |[a_{j(1)}, b_{j(n_j)}]| ];
  V_i ← S(V_i, K_j); ∀i ∈ N /* 更新したC 上にV_iを再配置;*/
```

ここからは，図2 を使ってシュリンクの例示をする．(1) はシュリンク前の様子である．ここからK_jをシュリンクすると，$C' = [0, 0.625]$となり，$S(V_1, K_j) = [0.125, 0.25]$, $S(V_2, K_j) = [0.375, 0.5]$,

An envy-free mechanism with minimum number of cuts for the whole cake cutting problem

†Hiroyuki Umeda, Information and System Engineering Course, Graduate School of Science and Engineering, CHUO University
‡Takao Asano, Department of Information and System Engineering, Faculty of Science and Engineering, CHUO University

$S(V_3, K_j) = [0,\ 0.125]$ となる．

w区間Wのシュリンクされていない$C = [0,1]$上への座標変換を$f(W)$, その終点を$f_b(\mathrm{W})$とする．例を示すと，以下のようになる．

$f\left(S(V_3,K_j)\right) = [0.625, 0.75], f_b\left(S(V_3,K_j)\right) = 0.75.$

また，チェーンK_jがロックされているとは$f_b\left(W_{j(n_j)}\right) = f_b\left(V_{j(n_j)}\right)$が成立することである．

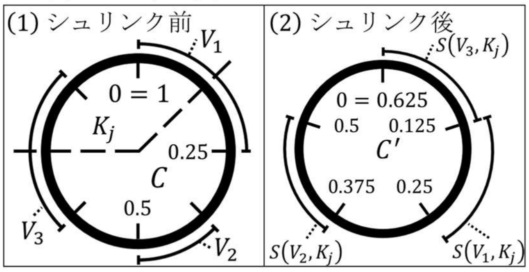

図2: K_jをシュリンクした例 $(n = 3)$

3.2　WEFISMの概略と例示

ここではWEFISMの概略と例示をする．ただし$\delta > 0$であり，% は剰余演算子である．

```
WEFISM (C = [0,1], V, N)
  For each i ∈ N
    K_i ← [α_i, α_i]; (1)
  K ← {K_1, K_2, ..., K_n}; (1)
  While K ≠ φ do
    For each K_j ∈ K do
      /* 全てのW_{j(l)} を同時に δ だけ大きくする */
      W_{j(l)} ← [a_{j(l)} + (l − 1) * δ, (b_{j(i)} + l * δ) % |C| ]; ∀j(l) ∈ N_j (*)
    For each K_j ∈ K do
      If K_j がロックされている then (3)
        A^M_{j(i)}(V) ← f(W_{j(i)}); ∀j(i) ∈ N_j (4)
        Shrink (C, V, K_j); K ← K \ K_j; (5)
      Elseif b_{j(n_j)} = a_{j'(1)}, ∃K_{j'} ∈ K then (2)
        K_j ← K_j ∪ K_{j'}; K ← K \ K_{j'}; (2)
```

以下では図3を用いて実行例 $(n = 3)$ を示す．

(1) K_1, K_2, K_3 および$\boldsymbol{K}$の初期化を行う．

$K_1 = \{[0,0]\}$　　$K_2 = \{[0.125, 0.125]\}$

$K_3 = \{[0.5, 0.5]\}$　　$\boldsymbol{K} = \{K_1, K_2, K_3\}$

(2) $(*)$ により$\left|W_{i=\{1,2,3\}}\right|$が 0.125 に拡大した時，$b_{1(1)}$と$a_{2(1)}$が一致するため$K_1$と$K_2$を結合する．

$K_1 = \{[0, 0.125], [0.125, 0.25]\}$

$K_3 = \{[0.5, 0.625]\}$　　$\boldsymbol{K} = \{K_1, K_3\}$

(3) $\left|W_{i=\{1,2,3\}}\right| = 0.25$ の時，K_1 はロックされる．

$K_1 = \{[0, 0.25], [0.25, 0.5]\}$ $K_3 = \{[0.5, 0.75]\}$

(4)プレイヤー$i = \{1(1) = 1, 1(2) = 2\} \in N_1$への割当を決定する．

$A_1^M(\boldsymbol{V}) = [0, 0.25]$　　$A_2^M(\boldsymbol{V}) = [0.25, 0.5]$

(5) Shrink $(C, \boldsymbol{V}, K_1)$ を行い，$\boldsymbol{K}$からK_1を除く．

$V_3 = [0, 0.5]$　$K_3 = \{[0.25, 0.5]\}$　$\boldsymbol{K} = \{K_3\}$

$(3,4,5)$ $|W_3| = 0.5$ の時，K_3がロックされプレイヤー$i = \{3(1) = 3\} \in N_3$への割当が決定する．$\boldsymbol{K}$からK_3が除かれ，$\boldsymbol{K} = \phi$となるため終了する．

$A_3^M(\boldsymbol{V}) = f(W_3) = [0.5, 0]$　　$\boldsymbol{K} = \phi$

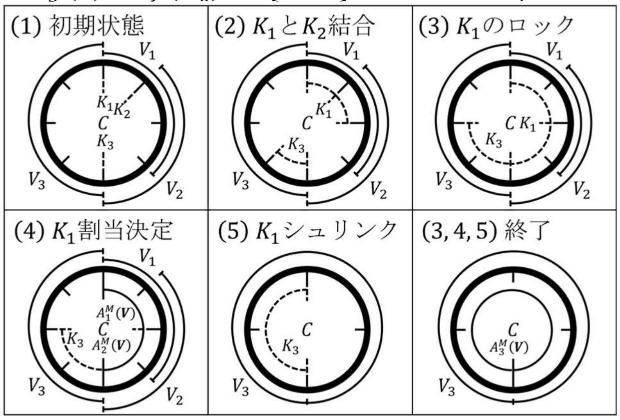

図3: WEFISMの実行例 $(n = 3)$

3.3　定理とその証明概略

ここでは本研究の定理とその証明概略を示す．

定理1. WEFISMは**ホールケーキ分割問題**に対し，カット数の最小性・無羨望性・戦略的操作不可能性を満たすメカニズムである．

証明概略

ここでは紙面の都合上，カット数の最小性と無羨望性のみを示す．

（カット数の最小性）

1つのw区間を$\forall i \in N$に対して割当てるため，$\sum_{i\in N} \# A_i^M(\boldsymbol{V}) = n, \forall \boldsymbol{V}$が成立する．

（無羨望性）

ここでは，チェーンK_jに注目し，以下 (i) 式が$\forall j(l) \in N_j$に対して成立することを示す．

$\left|V_{j(l)} \cap A_o^M(\boldsymbol{V})\right| \le U_{j(l)}^M(\boldsymbol{V}), \forall o \in N \setminus \{j(l)\}$ (i)

oを$\left|\boldsymbol{A_o^M}(\boldsymbol{V})\right|$に関して場合分けする．

$\left|\boldsymbol{A_{o^-}^M}(\boldsymbol{V})\right| \le \left|A_{j(l)}^M(\boldsymbol{V})\right|$となる$o^- \in N \setminus \{j(l)\}$

割当$A_{j(l)}^M(\boldsymbol{V})$は$V_{j(l)}$に必ず含まれる．ゆえに，$\left|V_{j(l)} \cap A_{j(l)}^M(\boldsymbol{V})\right| = \left|A_{j(l)}^M(\boldsymbol{V})\right|$ が成立．従って仮定から$\forall j(l) \in N_j$に対して以下が成立する．

$\left|V_{j(l)} \cap A_{o^-}^M(\boldsymbol{V})\right| \le |A_{o^-}^M(\boldsymbol{V})| \le U_{j(l)}^M(\boldsymbol{V}), \forall o^-$ (ii)

$\left|A_{o^+}^M(\boldsymbol{V})\right| > \left|A_{j(l)}^M(\boldsymbol{V})\right|$となる$o^+ \in N \setminus \{j(l)\}$

$A_{o^+}^M(\boldsymbol{V})$は$K_j$に含まれないため，$A_{o^+}^M(\boldsymbol{V}) \cap [a_{j(1)}, b_{j(n_j)}] = \phi$である．またロックの定義から，$V_{j(l)} \subseteq [a_{j(1)}, b_{j(n_j)}]$が成立．従って$\forall j(l) \in N_j$に対して以下が成立する．

$0 = \left|V_{j(l)} \cap A_{o^+}^M(\boldsymbol{V})\right| \le U_{j(l)}^M(\boldsymbol{V}), \forall o^+$ (iii)

(ii), (iii) より (i) が成立する．またこの議論は全てのチェーンについて言えるため，

$|V_i \cap A_o^M(\boldsymbol{V})| \le U_i^M(\boldsymbol{V}), \quad \forall o \in N \setminus \{i\}, \forall \boldsymbol{V}$

が成立する．

参考文献

[1]R. Alijani, M. Farhadi, M. Ghodsi, M. Seddighin, A. S. Tajik: Envy- free mechanisms with minimum number of cuts. *AAAI*- 17, 2017, pp. 312- 318.