Vol.2017-AL-164 No.5
2017/9/19

単調な3乗法標準形論理式に対する真理値割当て全体の整列可能性と2次元の間接的2分探索アルゴリズム

松原 俊一[1,a)]

概要：本稿ではまず，与えられた正の 3CNF 式について，真理値割当ての符号語全体が 2 次元で整列するような正の 3CNF 式を構成できることを示す．次にこの符号語全体から 2 次元の 2 分探索法を示す．真理値割当ての符号語全体は，入力の指数サイズとなるが，提案法では一部の符号語を必要に応じて構成する．

Sortability of the Set of All Truth Assignments for a Monotone 3-Conjunctive Normal Form Formula and a 2-Dimensional Indirect Binary Search Algorithm

Shunichi Matsubara[1,a)]

Abstract: In this paper, we first show that given a positive 3CNF formula ψ, we can find an equivalent positive 3CNF formula φ such that the binary representations of all truth assignments of φ can be sorted. Then, we propose a kind of 2-dimensional binary search algorithm for deciding whether there is a satisfying assignment in the sequence. Representing the whole sequence requires an exponential space for the size of the given formula ψ. The proposed algorithm searches a target value without constructing all the binary representations of the sequence.

1. はじめに

三つのリテラルからなる論理和の論理積からなる論理式を 3 乗法標準形と呼ぶ．3 乗法標準形の論理式を 3CNF 式と表す．このうち出現する全リテラルが正であるようなものを，正の 3 乗法標準形と呼ぶ．リテラルの論理和を節と呼ぶ．正の 3CNF 式が与えられたとき，各節についてちょうど一つのリテラルが真となるような真理値割当ての存在を判定する問題を Pos1In3Sat と表す．この問題は，NP 完全であることが知られている [3]．

本稿ではまず，与えられた正の 3CNF 式について，真理値割当ての符号語全体が 2 次元で整列するような正の 3CNF 式を構成できることを示す．次にこの符号語全体から 2 次元の 2 分探索法を示す．真理値割当ての符号語全体は，入力に対して指数サイズとなるため，この探索法では，一部の符号語のみを必要に応じて構成する．

以下では必要な記号や用語を定義する．計算複雑さの研究における充足可能性に関する標準的な記法に従う [1] [2] [4]．$\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}_+$ により，正整数全体と非負整数全体をそれぞれ表す．与えられた $l, u \in \mathbb{N}$ について，$\{i \in \mathbb{N} \colon l \leq i \leq u\}$ を $[l, u]$ と表す．任意の空列を ε により表す．与えられた述語 p について，$[\![p]\!]$ により，その特性関数を表す．すなわち，p が偽ならば $[\![p]\!] = 0$ であり，そうでないならば $[\![p]\!] = 1$ である．

Φ を有限集合とする．小太文字は Φ 上の有限長 (Φ の有限個の要素) の列を表す場合にのみ用いる．Φ 上の長さ n の列全体を Φ^n と表す．$\mathbf{b}$ が長さ n のとき，その要素を対応

1 青山学院大学理工学部情報テクノロジー学科，
〒 252-5258 神奈川県相模原市中央区淵野辺 5-10-1,
Department of Integrated Information Technology, College of Science and Engineering,
Aoyama Gakuin University, 5-10-1 Fuchinobe, Chuo-ku, Sagamihara, Kanagawa 252-5258, Japan
a) matsubara@it.aoyama.ac.jp

する小文字により順に表す．すなわち $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ とする．与えられた $\mathbf{a} \in \Phi^n$ と $\mathbf{b} \in \Phi^n$ について，$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ により表す．便利のため，混乱の恐れのない場合，Φ^n に属す列 $(b_1, \cdots, b_n)$ を，$b_1 \cdots b_n$ と表したり，$[1, n]$ から Φ への写像や，Φ 上の多重集合と同一視したりする．

b を正整数とし n, k を $\lfloor \log_b n \rfloor + 1 \leq k$ を充たすような非負整数とする．任意の $i \in [1, k]$ について d_i を $\left(\lfloor n/b^{i-1} \rfloor \bmod b\right)$ としたとき，$d_k \cdots d_1$ を n の b 進表現と呼ぶ．$m \in \mathbb{N}$ の b 進表現 α が与えられたとき，$(\alpha)_b$ により m を表す．

b を正整数とし，n を $[0, b^k - 1]$ に属す整数とする．このとき，各 $i \in [1, \lfloor \log_b n \rfloor + 1]$ について $d_i = (\lfloor n/b^{i-1} \rfloor \bmod b)$ となるような列 $(d_1, \cdots, d_{\lfloor \log_b n \rfloor + 1})$ を，$[n]_b$ により表す．

さらに本稿では特に断らない限り，以下を仮定する．

Z はブール変数の可算無限集合とし，$Z = \{z_1, z_2, \cdots, \}$ とする．すべての論理式は Z 上で定義されているとする．ψ を正の 3CNF 式に固定する．節はリテラルの列であり，CNF 式は節の列であると見なす．任意の 3CNF 式は，二つ以上の節からなるとする．任意の CNF 式に出現する変数の添字は，1 から順に連続的に使用されるとする．

φ を $C_m \wedge \cdots \wedge C_1$ と表す．$\boldsymbol{\sigma} \in \{0, 1\}^k$ を φ の割当てとする．ただし $k \in \mathbb{N}_+$ とする．$b \in \mathbf{N}_+$ とする．このとき与えられた $i \in [1, k]$ について，$(\varphi, z_i)_b$ により整数 $\sum_{j=1}^{m} b^{i-1} [\![z_i \in C_j]\!]$ を表す．

2. アルゴリズム

Algorithm 1: IsSat

Input: 正の 3CNF 式 ψ

Output: ブール値

IsSat(ψ)
  $k_1 \leftarrow$ (ψ の変数の個数)
  $m_1 \leftarrow$ (ψ の節の個数)
  $\varphi \leftarrow$ ExtFormula(ψ, k_1, m_1)
  $m \leftarrow$ (φ の節の個数)
  $k_2 \leftarrow$ (φ の変数の個数) - (ψ の変数の個数)
  $\mathbf{c} \leftarrow$ (各 $i \in [1, k_1 + k_2]$ について $c_i = (\varphi, z_i)_4$ となるような列).
  $t \leftarrow \sum_{i=1}^{m} 4^{i-1}$.
  $\widehat{\mathbf{x}} \leftarrow (0, 2^{k_1} - 1)$
  $\widehat{\mathbf{y}} \leftarrow (0, 2^{k_2} - 1)$
  return IBS($\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}, k_1, t$)

本研究ではアルゴリズムの計算時間を，入力のビット長の関数で見積る．3CNF 式のサイズは現れる変数の個数 (種類数) とする．以下では $\psi = C_{m_1} \wedge \cdots \wedge C_1$ と固定する．さらに k_1 は ψ 上に現れる変数の種類数とする．各 $(i, j) \in [1, m_1] \times [1, 3]$ について，$\langle i, j \rangle$ により，$C_i = z_{\langle i,1 \rangle} \vee z_{\langle i,2 \rangle} \vee z_{\langle i,3 \rangle}$ となるような整数を表す．

Algorithm 2: ExtFormula

Input: (ψ, k_1, m_1)

Output: 3CNF 式 φ

1 ExtFormula(ψ, k_1, m_1)
2   ψ の変数名を $(\psi, z_{k_1})_4 \geq \cdots \geq (\psi, z_1)_4$ となるように付替え
3   **foreach** $i \in [1, m_1]$
4     $\langle i, 3 \rangle > \langle i, 2 \rangle > \langle i, 1 \rangle$ となるように節 C_i の変数を整列
5   **foreach** $i \in [1, m_1]$
6     $C_{4i} \leftarrow (z_{k_1+4i} \vee z_{k_1+4i-1} \vee z_{\langle i,3 \rangle})$
7     $C_{4i-1} \leftarrow (z_{k_1+4i} \vee z_{k_1+4i-2} \vee z_{\langle i,2 \rangle})$
8     $C_{4i-2} \leftarrow (z_{k_1+4i} \vee z_{\langle i,2 \rangle} \vee z_{\langle i,3 \rangle})$
9     $C_{4i-3} \leftarrow C_i$
10   $\varphi \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{4m_1} C_i$
11   **return** φ

2.1 アルゴリズムの妥当性

本節では提案アルゴリズムの妥当性を示す．Algorithm 1 で与えられた記号は，すべて同様にして与えられるものとする．

補題 1. $2^{k_2} \times 2^{k_1}$ 行列 Λ を任意の $(i, j) \in [1, 2^{k_2}] \times [1, 2^{k_1}]$ について，$\lambda_{i,j} = [2^{k_1}(i-1) + (j-1)]_2 \cdot \mathbf{c}$ となるようなものとして定義する．このとき次が成り立つ．

(1) 任意の $(i, j) \in [1, 2^{k_2}] \times [1, 2^{k_1} - 1]$ について，$\lambda_{i,j} \leq \lambda_{i,j+1}$.

(2) 任意の $(i, j) \in [1, 2^{k_2} - 1] \times [1, 2^{k_1}]$ について，$\lambda_{i,j} \leq \lambda_{i+1,j}$.

[補題 1 の証明] x と y はそれぞれ $[1, 2^{k_2}]$ と $[1, 2^{k_1}]$ に属すとする．$\boldsymbol{\xi} \in \{0, 1\}^{k_1+k_2}$ を $(\boldsymbol{\xi})_2 = 2^{k_1}(x-1) + (y-1)$ となるような列とする．言明 (1) を示す．y に関する帰納法により $\lambda_{x,1} \leq \cdots \leq \lambda_{x,y}$ を示す．帰納法の仮定より，$\lambda_{x,1} \leq \cdots \leq \lambda_{x,y-1}$ である．このとき，$\lambda_{x,y-1} = [2^{k_1}(x-1) + (y-2)]_2 \cdot \mathbf{c}$ かつ $\lambda_{x,y} = [2^{k_1}(x-1) + (y-1)]_2 \cdot \mathbf{c}$ である．$\boldsymbol{\zeta} \in \{0, 1\}^{k_1+k_2}$ を $(\boldsymbol{\zeta})_2 = 2^{k_1}(x-1) + (y-2)$ となるような列とする．s を $\max\{i \colon \xi_i = 1, i \leq k_1\}$ とする．Algorithm 2 の 2-9 行目より，任意の $i \in [s+1, k_1 + k_2]$ について，$\zeta_i = \xi_i$ が成り立ち，かつ，$\zeta_s = 0$ と $\xi_s = 1$ が成り立つ．さらに注意 1 が成り立つ．

注意 1. $p \in [1, m_1]$ と $q \in [1, 3]$ を $\langle p, q \rangle = s$ となるような整数とする．このとき $(\varphi, z_{\langle p,q \rangle})_4 > \sum_{j=1}^{q-1} (\varphi, z_{\langle p,j \rangle})_4 + \sum_{(i,j) \in I} (\varphi, z_{\langle i,j \rangle})_4$ である．ただし $I = [1, p-1] \times [1, 3]$.

Algorithm 3: IBS

Input: $(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}, k_1, t)$．ただし $\mathbf{c} \in \mathbb{N}_+^*$，$\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{N}_+^2$，$\widehat{\mathbf{y}} \in \mathbb{N}_+^2$，$t \in \mathbb{N}_+$．

Output: ブール値

$\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{y}}, k_1, t)$
  if $\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1 \le 1$ *and* $\widehat{y}_2 - \widehat{y}_1 \le 1$
    return 0
  $k \leftarrow$ ($\mathbf{c}$ の要素数)
  $x_+ \leftarrow \widehat{x}_1 + \widehat{x}_2$
  $y_+ \leftarrow \widehat{y}_1 + \widehat{y}_2$
  $l \leftarrow 2^{k_1} \left\lfloor \frac{x_+}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y_+}{2} \right\rfloor$
  $s \leftarrow \sum_{i=1}^{k} c_i(\lfloor l/2^{i-1} \rfloor \bmod 2)$
  if $s = t$
    return 1
  elseif $t < s$
    if $\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1 \ge 2$ *and* $\widehat{y}_2 - \widehat{y}_1 \ge 2$
      if $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\widehat{x}_1, \lfloor \frac{x_+}{2} \rfloor), (\widehat{y}_1, \lfloor \frac{y_+}{2} \rfloor), k_1, t) = 1$
        return 1
      if $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\widehat{x}_1, \lfloor \frac{x_+}{2} \rfloor), (\lceil \frac{y_+}{2} \rceil, \widehat{y}_2), k_1, t) = 1$
        return 1
      return
      $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\lceil \frac{x_+}{2} \rceil, \widehat{x}_2), (\widehat{y}_1, \lfloor \frac{y_+}{2} \rfloor), k_1, t)$
    elseif $\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1 \le 1$
      return $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2), (\widehat{y}_1, \lfloor \frac{y_+}{2} \rfloor), k_1, t)$
    else
      return $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\widehat{x}_1, \lfloor \frac{y_+}{2} \rfloor), (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2), k_1, t)$
  elseif $t > s$
    if $\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1 \ge 2$ *and* $\widehat{y}_2 - \widehat{y}_1 \ge 2$
      if $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\widehat{x}_1, \lfloor \frac{x_+}{2} \rfloor), (\lceil \frac{y_+}{2} \rceil, \widehat{y}_2), k_1, t) = 1$
        return 1
      if $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\lceil \frac{x_+}{2} \rceil, \widehat{x}_2), (\widehat{y}_1, \lfloor \frac{y_+}{2} \rfloor), k_1, t) = 1$
        return 1
      return
      $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\lceil \frac{x_+}{2} \rceil, \widehat{x}_2), (\lceil \frac{y_+}{2} \rceil, \widehat{y}_2), k_1, t)$
    elseif $\widehat{x}_2 - \widehat{x}_1 \le 1$
      return $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\widehat{x}_1, \widehat{x}_2), (\lceil \frac{y_+}{2} \rceil, \widehat{y}_2), k_1, t)$
    else
      return $\mathrm{IBS}(\mathbf{c}, (\lceil \frac{x_+}{2} \rceil, \widehat{x}_2), (\widehat{y}_1, \widehat{y}_2), k_1, t)$

注意 1 より，$(\varphi, z_s)_4 > \sum_{i=1}^{s-1}(\varphi, z_i)_4$．さらに $c_s = (\varphi, z_s)_4$ である．よって $c_s > \sum_{i=1}^{s-1} c_i$ が得られる．ゆえに $\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{c} > \boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{c}$，すなわち $\lambda_{x,y} > \lambda_{x,y-1}$ となる．以上より，言明 (1) が成り立つ．

次に言明 (1.2) を示す．x に関する帰納法により $\lambda_{1,y} \le \cdots \le \lambda_{x,y}$ を示す．帰納法の仮定より，$\lambda_{1,y} \le \cdots \le \lambda_{x-1,y}$ である．$\boldsymbol{\eta} \in \{0,1\}^{k_1+k_2}$ を $(\boldsymbol{\eta})_2 = 2^{k_1}(x-2)+(y-1)$ となるような列とする．t を $\max\{i \colon \xi_i = 1, i \ge k_1+1\}$ とする．Algorithm 2 の 2-9 行目より，任意の $i \in [t+1, k_1+k_2]$ について $\eta_i = \xi_i$ が成り立ち，かつ $\eta_t = 0$ と $\xi_t = 1$ が成り立つ．さらに注意 2 が成り立つ．

注意 2. $p \in [1, m_1]$ と $q \in [0, 2]$ を $k_1 + 3p - q = t$ となるような整数とする．このとき，$(\varphi, z_{k_1+3p-q})_4 \ge \sum_{j=1}^{q-1}(\varphi, z_{k_1+3p-j})_4 + \sum_{(i,j)\in I}(\varphi, z_{k_1+3i-j})_4$ が成り立つ．ただし $I = [1, p-1] \times [0, 2]$．

注意 2 より，$(\varphi, z_t)_4 \ge \sum_{i=k_1+1}^{t-1}(\varphi, z_i)_4$．さらに $c_t \ge \sum_{i=1}^{t-1} c_i$ が得られる．よって，$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{c} \ge \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{c}$ すなわち $\lambda_{x,y} \ge \lambda_{x-1,y}$ となる．以上より，言明 (2) が成り立つ．

□

Algorithm 2 において 3CNF 式 ψ から構成される φ は，ψ の節をすべて含んでいる．また構成される φ の節は，ψ の唯一つの節から構成される．この点に注目することにより次の補題を証明できる．

補題 2. ψ が充足可能なとき，かつそのときに限り，φ は充足可能である．

3. むすび

本稿では, 与えられた単調な 3 乗法標準形論理式に対して, 真理値割当て全体が整列可能なことを示し，Pos1In3Sat についての 2 次元の間接的 2 分探索アルゴリズムを提案した．

参考文献

[1] Arora, S. and Barak, B.: *Computational Complexity: a Modern Approach*, Cambridge University Press, New York, NY (2009).

[2] Papadimitriou, C. H.: *Computational Complexity*, Addison-Wesley Publishing (1994).

[3] Schaefer, T. J.: The Complexity of Satisfiability Problems, *Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '78, New York, NY, USA, ACM, pp. 216–226 (online), DOI: 10.1145/800133.804350 (1978).

[4] Wegener, I.: *The Complexity of Boolean Functions*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA (1987).