駒の動きを制限したWythoff Nimの変種に関する研究

末續 鴻輝[1,a)] 福井 昌則[2,b)]

概要：Wythoff Nim とは，石の山を 2 つ作り，2 人のプレイヤが交互にいずれか一方の山から任意の数の石を取るか，2 つの山から同数の石を取り，最後の石を取った方が勝ちとなるゲームである．このゲームは，チェス盤上に Queen の駒を置き，2 人のプレイヤが交互に Queen を動かし，左上隅まで持って行ったプレイヤが勝ちとなるゲームと数学的に同値である．我々は駒の動きを変えた Wythoff Nim の変種について研究しており，すでに縦横以外の移動可能な場所について，駒ごとにその移動可能距離を増やしていった場合，それぞれの駒についてその Grundy 数を示す公式を明らかにしている．今回，上記の変更に加え，縦横についても移動可能距離を制限した場合について研究を行なったので，その結果について報告する．

キーワード：NIM Corner the Queen Wythoff チャヌシッチ 非不偏ゲーム 組合せゲーム理論

1. 序論

本稿は，Wythoff Nim を発展させたタイプの問題における Grundy 数を導出する公式について報告することを目的としている．Wythoff Nim とは，石の山を 2 つ作り，2 人のプレイヤが交互にいずれか一方の山から任意の数の石を取るか，2 つの山から同数の石を取り，最後の石を取った方が勝ちとなるゲームであり，古くからよく知られている有名な問題である．このゲームは，チェス盤上に Queen の駒を置き，2 人のプレイヤが交互に Queen を動かし，左上隅まで持って行ったプレイヤが勝ちとなる Corner the Queen 問題と数学的に同値である．本稿では，Wythoff Nim を Corner the Queen 問題として扱う．以下，本問題を扱うために必要な理論を導入する．

本研究で扱う問題は，引き分けのない不偏ゲームであるため，その局面は以下の 2 つのポジションのいずれかに属する．

定義 1.1. (*i*) *N-Positions(先手必勝形)* は，その状態から始めるとき，先手のプレイヤが最適な戦略を使うことによって，後手のプレイヤがどのような戦略を使っても，先手が必ず勝利できる状態のことである．
(*ii*) *P-Positions(後手必勝形)* は，その状態から始めるとき，後手のプレイヤが最適な戦略を使うことによって，先手のプレイヤがどのような戦略を使っても，後手が必ず勝利できる状態のことである．

不偏ゲームの必勝ポジションを解析するために，Grundy 数を用いる．Grundy 数とは，Sprague および Grundy によって導入された，不偏ゲームにおける必勝ポジションを求めるための理論である．ここで，Grundy 数を計算するために必要な move 関数と mex 関数は以下のように定義される．

定義 1.2. ゲームの局面 $\mathbf{p}$ に対して，一手で移動できる局面の集合を *move*($\mathbf{p}$) と表す．

定義 1.3. *(i) mex* 関数とは，非負整数からなる集合 S に対して， S に属していない整数の中で，最も小さい非負整数を出力する関数である．
(ii) Grundy 数とは与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態における *Grundy* 数からなる集合に属していない最小の非負整数である．そしてゲーム終了時の局面における *Grundy* 数を 0 と定義する．局面 $\mathbf{p}$ の *Grundy* 数を $\mathcal{G}(\mathbf{p})$ とすると，以下のように再帰的に定義される．

$$\mathcal{G}(\mathbf{p}) = mex\{\mathcal{G}(\mathbf{h}) : \mathbf{h} \in move(\mathbf{p})\}$$

ここで，以下の定理が成り立つ．

定理 1.1. $\mathcal{G}$ を *Grundy* 数を与える関数とする． そのとき次のことが成り立つ．$\mathbf{h}$ が *P-positions(後手必勝形)* であるとき，またそのときに限り $\mathcal{G}(\mathbf{h}) = 0$.

定理 1.1 の証明は，例えば文献 [2] などに掲載されている．

定義 1.4 (Corner the Queen 問題)**.** *Corner the Queen* 問題とは，チェス盤上に *Queen* の駒を配置し，*2* 人のプレイヤが交互に *Queen* を動かし，左上の端に持って行ったプレイヤが勝ちとなるゲームである． 以下の図 *1* のように座

[1] 京都大学
[2] 兵庫教育大学
[a)] suetsugu.koki.72r@st．kyoto-u.ac.jp
[b)] m16195c@hyogo-u.ac.jp

Vol.2017-GI-38 No.3
2017/7/15

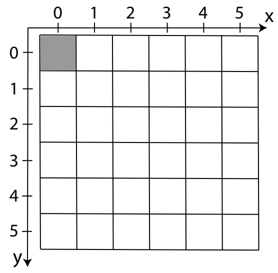

図 1 座標の定義

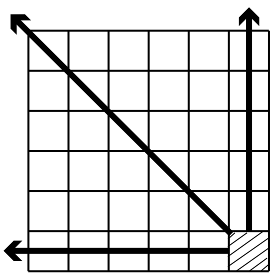

図 2 *Queen* の動き

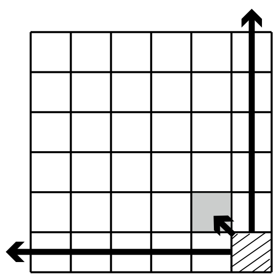

図 3 龍王の移動可能箇所

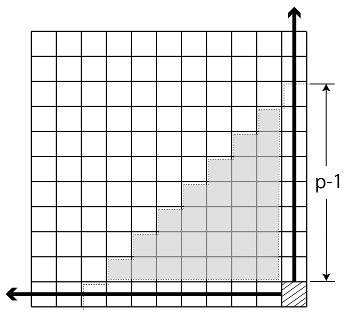

図 4 一般化した駒の移動可能箇所

標を定義し，*Queen* は図 *2* のように，座標が減る方向にのみ動くことができるとする．

座標 (x, y) に駒があるとき，一手で移動可能な局面の集合を $move(x, y)$ とすると，Queen を用いたときの $move(x, y)$ は以下の式 (1) で表される．

$$
\begin{aligned}
move(x, y) &= \{(u, y) : u < x\} \cup \{(x, v) : v < y\} \\
&\cup \{(x - t, y - t) : 1 \leq t \leq min(x, y)\} \quad (1)
\end{aligned}
$$

このゲームは Wythoff Nim と数学的に同値であるが，その必勝ポジション (P-Positions) はすでに解明されており，証明については [1–3] などに記載されている．しかし，Grundy 数を完全に決定するような公式の発見にはまだ至っていない．

筆者らは，Queen を将棋の龍王 (成り飛車) に置き換え，その駒をベースとして進める箇所を増やしていったゲームについて研究を行なっており，すでに Grundy 数を決定する公式を証明している [4]．図 4 のように，西と北方向には任意の数，斜め方向には灰色で示した階段状の図形の部分に動くことができる駒の Grundy 数 $\mathcal{G}(x, y)$ は，駒が (x, y) にいるとき，以下の式 (2) で表される．

$$
\mathcal{G}(x, y) = ((x + y)\ mod\ p) + p(\lfloor \frac{x}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{p} \rfloor) \qquad (2)
$$

ここで，$(x + y)\ mod\ p$ は $x + y$ を p で割った余りを表す．

例えば図 3，つまり龍王は式 (2) の $p = 3$ の場合に相当する．この証明は [4] に記載されている．

2. 駒の動きを制限した Wythoff Nim の変種

前章で扱った Wythoff Nim の変種は，北方向と西方向，

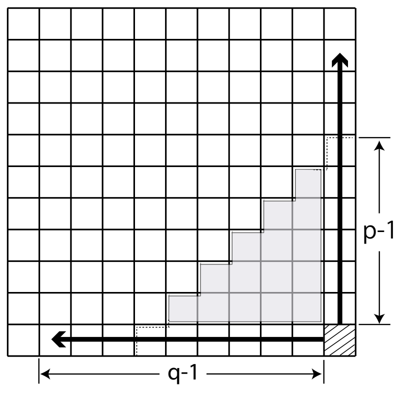

図 5 パラメータの設定

つまり一方の座標を固定して，もう一方の座標を変化させる動きに制限がなかった．本稿ではその動きに制限を加え，その公式がどのようになるかについて検討を行なった．ここで，以下の図 5 のように p および q を設定する．p は，図 5 における斜め方向に進める箇所 (灰色部分) を表すとする．そして q は，北および西方向に進める数であり，北および西方向はそれぞれ同じ数だけ進めるとする．ここで，図 5 の p, q はそれぞれ $7, 10$ である．

この駒の move は，以下の式 (3) で示される．

$$
\begin{aligned}
move(x, y) &= \{(x - t, y) : 1 \leq t \leq q - 1, x \geq t\} \\
&\cup \{(x, y - t) : 1 \leq t \leq q - 1, y \geq t\} \\
&\cup \{(x - t, y - s) : t + s \leq p - 1, 1 \leq t \leq p - 2, \\
&\quad 1 \leq s \leq p - 2, x \geq t, y \geq s\} \qquad (3)
\end{aligned}
$$

例えば，$p = 3, q = 7$ のときの Grundy 数は以下の表 1 のようになる．

このゲームに対し，定理 2.1 が成り立つ．

定理 2.1. $q\ mod\ p = 0$ ならば，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(x, y) &= (((x\ mod\ q) + (y\ mod\ q))\ mod\ p) \\
&+ p([\frac{x\ mod\ q}{p}] \oplus [\frac{y\ mod\ q}{p}])
\end{aligned}
$$

証明. 左上の $q \times q$ の正方形に駒がある場合，式 (2) のときと動ける位置は変わらないので，Grundy 数は式 (2) で与えられる値と等しくなる．すなわち，

$$
\mathcal{G}(x, y) = ((x + y)\ mod\ p) + p([\frac{x}{p}] \oplus [\frac{y}{p}])
$$

一方，$x\ mod\ q = x, y\ mod\ q = y$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&(((x\ mod\ q) + (y\ mod\ q))\ mod\ p) + \\
&p([\frac{x\ mod\ q}{p}] \oplus [\frac{y\ mod\ q}{p}]) \\
&= ((x + y)\ mod\ p) + p([\frac{x}{p}] \oplus [\frac{y}{p}])
\end{aligned}
$$

であるから，この範囲に駒がある場合，定理 2.1 は成立する．

表 1 $p = 3, q = 9$ のときの Grundy 数

y\x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6	1	2	0	4	5	3	7	8	6	1
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7	2	0	1	5	3	4	8	6	7	2
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11	3	4	5	0	1	2	9	10	11	3
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9	4	5	3	1	2	0	10	11	9	4
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10	5	3	4	2	0	1	11	9	10	5
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	6	7	8	9	10	11	0	1	2	6
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0	7	8	6	10	11	9	1	2	0	7
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1	8	6	7	11	9	10	2	0	1	8
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
10	1	2	0	4	5	3	7	8	6	1	2	0	4	5	3	7	8	6	1
11	2	0	1	5	3	4	8	6	7	2	0	1	5	3	4	8	6	7	2
12	3	4	5	0	1	2	9	10	11	3	4	5	0	1	2	9	10	11	3
13	4	5	3	1	2	0	10	11	9	4	5	3	1	2	0	10	11	9	4
14	5	3	4	2	0	1	11	9	10	5	3	4	2	0	1	11	9	10	5
15	6	7	8	9	10	11	0	1	2	6	7	8	9	10	11	0	1	2	6
16	7	8	6	10	11	9	1	2	0	7	8	6	10	11	9	1	2	0	7
17	8	6	7	11	9	10	2	0	1	8	6	7	11	9	10	2	0	1	8
18	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0

それ以外の場所に駒がある場合について，帰納法によって示す．$x \geq q$ のとき，条件を満たすことを示す．$\mathcal{G}(x, y)$ と $\mathcal{G}(x-q, y)$ について考えると，帰納法の仮定より，$x - q - t \geq 0, y - u \geq 0$ となる t,$u \geq 0 (t \neq 0$ または $u \neq 0)$ について $G(x-t, y-u) = G(x-q-t, y-u)$ が成り立つので，$G(x, y) \geq G(x-q, y)$ である．次に，(x, y) から移動可能な点 $r(x', y')$ で，$\mathcal{G}(x', y') = \mathcal{G}(x-q, y)$ を満たすものが存在しないことを示す．なお，帰納法の仮定より，

$$\mathcal{G}(x-q, y) = (((x \ mod \ q) + (y \ mod \ q)) \ mod \ p) + p([\frac{x \ mod \ q}{p}] \oplus [\frac{y \ mod \ q}{p}])$$

である．

$1 \leq i \leq q-1$ とする．点 $r(x-i, y)$ とすると，r から $(x-q, y)$ に移動可能なので $\mathcal{G}(x-i, y) \neq \mathcal{G}(x-q, y)$，点 $r(x, y-i)$ のときも同様である．

次に $i + j \leq p - 1$ とする．点 $r(x-i, y-j)$ とすると，$(x + y - (i + j)) \ mod \ p \neq (x + y) \ mod \ p$. よって，

$$\mathcal{G}(x-i, y-j) \ mod \ p \neq \mathcal{G}(x-q, y) \ mod \ p$$
$$\therefore \mathcal{G}(x-i, y-j) \neq \mathcal{G}(x-q, y)$$

以上より，$\mathcal{G}(x, y) \geq \mathcal{G}(x-q, y)$ かつ p から移動可能な点 r の Grundy 数は $\mathcal{G}(x-q, y)$ とならないので，$\mathcal{G}(x, y) = \mathcal{G}(x-q, y)$ となる．

以上より，

$$\mathcal{G}(x, y) = (((x \ mod \ q) + (y \ mod \ q)) \ mod \ p) + p([\frac{x \ mod \ q}{p}] \oplus [\frac{y \ mod \ q}{p}])$$

他の場合も，同様に示すことができる．$\square$

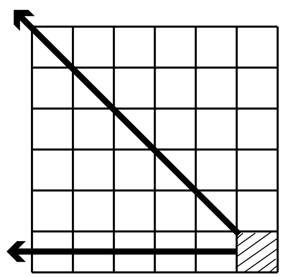

図 6 ”左”の動き

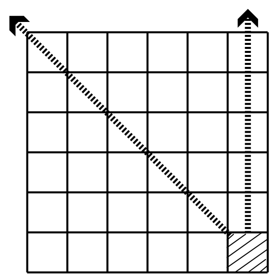

図 7 ”右”の動き

3. 非不偏ゲームとして扱った Wythoff Nim の変種

本研究において，筆者らは Wythoff Nim を非不偏ゲームへと拡張することも行った．上述してきたゲームは，2 人が交互にプレイし，その打つ手には偶然的要素がなく隠された情報がない完全情報ゲームであり，同一局面における 2 人のプレイヤの打てる手に差がない (打てる手は同じ) 不偏ゲームと呼ばれているゲームであった．非不偏ゲームとは，2 人が交互にプレイし，その打つ手には偶然的要素がなく隠された情報がない完全情報ゲームであることは不偏ゲームと同様であるが，同一局面における 2 人のプレイヤの打てる手が異なり，不偏ゲームとはこの点において異なる．また，非不偏ゲームにおいては，慣例的に片方のプレイヤは”左”，もう片方のプレイヤは”右”と呼ばれる．ここで，左は Queen を”横と斜め”，右は Queen を”縦と斜め”に動かせるとゲームの条件を変えた場合，それぞれの場所 (x, y) において Queen があるならばゲームの値 $G(x, y)$ がどのようになるかについて研究を行なった．左と右の動きを図 6 と図 7 に示す．

なお，この場合のゲームの値とは，非不偏ゲームを含

表 2　ゲームの値の表

y\x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	*	1*	2*	3*	4*	5*	*6	*7
2	-2	-1*	*2	1*2	2*2	3*2	4*2	5*2	6*2
3	-3	-2*	-1*2	*3	1*3	2*3	3*3	4*3	5*3
4	-4	-3*	-2*2	-1*3	*4	1*4	2*4	3*4	4*4
5	-5	-4*	-3*2	-2*3	-1*4	*5	1*5	2*5	3*5
6	-6	-5*	-4*2	-3*3	-2*4	-1*5	*6	1*6	2*6
7	-7	-6*	-5*2	-4*3	-3*4	-2*5	-1*6	*7	1*7
8	-8	-7*	-6*2	-5*3	-4*4	-3*5	-2*6	-1*7	*8

めた場合に定義されるものであり，Grundy 数とは異なるものである．詳細については文献 [5,6] 等に詳しい．このゲームにおけるゲームの値は以下の表 2 のようになる．

定理 3.1. 左は *Queen* を横と斜め，右は *Queen* を縦と斜めに動かせる非不偏ゲームの座標 (x, y) におけるゲームの値 $G(x, y)$ は，$G(x, y) = x - y + *(min(x, y))$ で表される．

証明. $G(0, 0) = 0$ であり，$G(x, 0) = \{G(x-1, 0), G(x-2, 0), ..., G(0, 0)|\}$ であるから，$G(x, 0) = x$ となる．同様に考えて，$G(0, y) = -y$ となる．

次に，各プレイヤにおいて，縦横の移動は劣位な選択肢となることを示す．

$G(x, y)$ と $G(x+1, y)$ について考えると，ゲーム $G(x+1, y) - G(x, y)$ において，左は $G(x, y) - G(x, y) = 0$ とすることで勝てる．一方右が，$G(x+1, y-t) - G(x, y)$ とすると，左は $G(x+1, y-t) - G(x, y-t)$ と応手でき，$G(x+1, y) - G(x-t, y)$ とすれば $G(x+1-t, y) - G(x-t, y)$ と応手できる．さらに，$G(x+1-t, y-t) - G(x, y)$ または $G(x+1, y) - G(x-t, y-t)$ とすれば $G(x+1-t, y-t) - G(x-t, y-t)$ と応手できるので，帰納法により $G(x+1, y) - G(x, y) > 0$，すなわち，$G(x+1, y) > G(x, y)$ が言える．同様に，$G(x, y+1) < G(x, y)$ であるから，それぞれのプレイヤにとって縦横の移動は斜めの移動に比べて劣位な選択肢であることが分かる．

よって，ゲームの右選択肢と左選択肢は斜め移動のみを考えればよいことになる．従って，帰納法を用いると，(x, y) に駒のあるゲームの値は，$G(x, y) = \{G(x-1, y-1), G(x-2, y-2), ..., G(x+1-min(x, y), y+1-min(x, y)), G(x-min(x, y), y-min(x, y))|G(x-1, y-1), G(x-2, y-2), ..., G(x+1-min(x, y), y+1-min(x, y)), G(x-min(x, y), y-min(x, y))\} = \{x-y+*(min(x, y)-1), x-y+*(min(x, y)-2), ..., x-y+*, x-y|x-y+*(min(x, y)-1), x-y+*(min(x, y)-2), ..., x-y+*, x-y\} = x-y+*(min(x, y))$ となる．　□

なおこの場合，縦横方向に制限を加えても結果は変わらない．次に，斜め方向に $p-1$ しか動けないという制限を加えた場合について考える．左と右の駒の動きを，それぞれ以下の図 8 および図 9 に示す．また，$p = 3$ のときのゲー

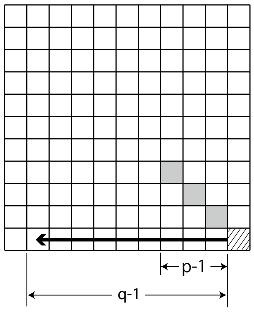

図 8　”左”の動き (制限あり)

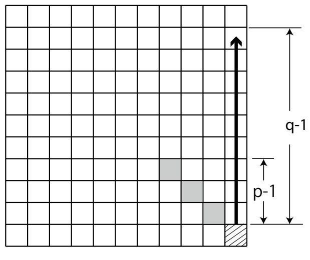

図 9　”右”の動き (制限あり)

表 3　ゲームの値の表 $(p = 3)$

y\x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	*	1*	2*	3*	4*	5*	6*	7*
2	-2	-1*	*2	1*2	2*2	3*2	4*2	5*2	6*2
3	-3	-2*	-1*2	0	1	2	3	4	5
4	-4	-3*	-2*2	-1	*	1*	2*	3*	4*
5	-5	-4*	-3*2	-2	-1*	*2	1*2	2*2	3*2
6	-6	-5*	-4*2	-3	-2*	-1*2	0	1	2
7	-7	-6*	-5*2	-4	-3*	-2*2	-1	*	1*
8	-8	-7*	-6*2	-5	-4*	-3*2	-2	-1*	*2

ムの値を，表 3 に示す．この場合も上と同様の議論により，斜め移動の選択肢以外は劣位な選択肢だと示せる．従って斜めの移動のみを考えればよいことに代わりはなく，その結果は以下の式 (4) のようになる．

$$G(x, y) = x - y + *(min(x, y)\ mod\ p) \tag{4}$$

この場合も，斜め方向だけでなく縦横方向に制限を加えても結果は変わらない．

参考文献

[1] Wythoff,W.A., ”A Modification of the Game of Nim.”, *Nieuw Arch*,Wisk.8,pp.199-202,1907/1909.

[2] 佐藤 文広, 石取りゲームの数学: ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房,pp.132-145,2014.

[3] 一松 信, 石とりゲームの数理 POD 版 (数学ライブラリー 教養篇), 森北出版,pp.93-104,2003.

[4] 宮寺 良平, 福井 昌則, 中屋 悠資, 戸國 友貴, A Generalized Ryuoh-Nim:A Variant of the classical game of Wythoff Nim, 第 36 回 GI・第 41 回 EC 合同研究発表会,2016.

[5] M.H.Albert,R.J.Nowakowski,D.Wolfe(川辺 治之 訳), 組み合せゲーム理論入門-勝利の方程式-, 共立出版, 2011. (M.H.Albert,R.J.Nowakowski,D.Wolfe, Lessons In Play, A K Peters.)

[6] A.N.Siegel, *Combinatorial Game Theory (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society, 2013.