4H-03

恒久的連結頂点被覆問題について

中村　友哉 †　　　　藤戸　敏弘 ‡
豊橋技術科学大学工学部情報・知能工学科 †　　豊橋技術科学大学工学研究科情報・知能工学専攻 ‡

1　はじめに

グラフ $G=(V,E)$ のすべての辺が頂点集合 $C \subseteq V$ の頂点に接続するとき，C を G の頂点被覆といい，頂点被覆問題は G の最小頂点被覆を求める問題である．頂点被覆問題から派生したゲーム問題に恒久的頂点被覆問題 [4] がある．これは，任意回数の辺への攻撃からグラフを防衛し続けるために必要な守衛数の最小値（恒久的頂点被覆数という）を求める問題である．連結グラフを誘導する頂点被覆を連結頂点被覆といい，最小連結頂点被覆を計算する問題が連結頂点被覆問題である．

本稿では，連結頂点被覆から派生するグラフ防衛問題として，恒久的連結頂点被覆問題を導入する．ここで守衛は，任意回数の辺への攻撃からグラフを防衛しつつ，連結グラフを誘導するような頂点集合に配置され続けることが求められ，その際に必要な最小守衛数を計算する問題を指す．これは，美術館問題において "cooperative" な動的守衛 [3] を考えるのと同様，守衛たちが連携して動作できるようにするためである．

2　問題定義および関連研究結果

恒久的頂点被覆問題は，頂点被覆問題から派生した次のようなゲームに関する問題である [4]．ゲームは入力グラフ $G=(V,E)$ 上で，攻撃と防衛を交互に行う．防衛側はゲーム開始前に何名かの守衛を G の頂点上に配置する．攻撃側は G の任意の辺 $e \in E$ を攻撃する．攻撃に対して守衛はそれぞれ現在の頂点に留まるか，隣接する頂点へ移動することができる．このとき，攻撃を受けた辺 e を一人でも守衛が通過できればこのラウンドでの防衛は成功しゲームは継続するが，一人も通過できなければ攻撃成功となり，ゲームは終了となる．任意の辺への攻撃を任意回繰り返しても，常に防御し続けられる守衛の集合を恒久的頂点被覆，G の恒久的頂点被覆を構成するために必要な最小の守衛数を恒久的頂点被覆数と呼び，$\tau^{\infty}(G)$ と表記する．恒久的頂点被覆数を求める問題が恒久的頂点被覆問題（以下，EVC）である．EVC は，一般のグラフにおいて NP 困難であるが，2 倍近似多項式時間アルゴリズムが知られており [2]，グラフが木である場合，$\tau^{\infty}(G)$ は木の内点数 +1 で与えられる [4]．

本稿では，恒久的頂点被覆問題を拡張し，恒久的連結頂点被覆問題（以下，ECVC）を導入する．EVC における守衛は，任意の辺攻撃を防衛しつつ頂点被覆を構成する必要があったのに対し，ECVC では**連結**頂点被覆（すなわち，連結グラフを誘導する頂点被覆）を構成することが求められる．次節以降では，グラフが木の場合，文献 [4] で得られた EVC に関する結果が ECVC でも成立することを観察した上で，一般グラフにおける ECVC の近似解法について検討する．文献 [2] の方法は，マッチングを用いて EVC を 2 倍近似するアルゴリズムであり，解の連結性を保証するものではなく，ECVC の近似アルゴリズムとしては使用できない．別の方法として，連結頂点被覆を利用することが考えられる．連結頂点被覆問題は簡単なアルゴリズムで 2 倍近似可能である [5] が，本稿では連結辺支配集合を用いるアルゴリズムを検討する．グラフ G の辺集合 $D \subseteq E$ は，G の任意の辺 $e \in E$ について，e もしくは e と隣接する辺を含むとき，G の辺支配集合といい，さらに D が連結であるとき，連結辺支配集合という．連結辺支配集合問題（以下，CEDS）とは，最小連結辺支配集合を求める問題である．CEDS は 2 倍近似可能であることが知られており [1]，そのアルゴリズムを運用することで，ECVC も 2 倍近似可能であることを示す．なお，必要最小な守衛数である恒久的連結頂点被覆数を $\tau_c^{\infty}(G)$ と表記する．

3　木における ECVC

グラフが木 T であるとき，$\tau_c^{\infty}(T)$ は次式で与えられる．ここで $\mathrm{in}(T)$ は，T の内点（つまり，葉でない頂点）の数を表す：

定理 1.

$$\tau_c^{\infty}(T) = \begin{cases} 0 & T \text{ の頂点数} = 1 \text{ の場合} \\ \mathrm{in}(T)+1 & T \text{ の頂点数} \geq 2 \text{ の場合.} \end{cases}$$

証明. 文献 [4] で，$\tau^{\infty}(T) = \mathrm{in}(T)+1$ であることが示されており，よって，$\tau_c^{\infty}(T) \geq \mathrm{in}(T)+1$ である．

On the eternal connected vertex cover problem
†Tomoya NAKAMURA, Comp. Sci. & Eng., Toyohashi Univ. of Tech.
‡Toshihiro FUJITO, Comp. Sci. & Eng., Toyohashi Univ. of Tech.

さらに，文献 [4] で用いられている戦略では，常に T の各内点に守衛を配置しながら，$\mathrm{in}(T)+1$ 人の守衛で任意の辺への攻撃を防いでいるが，そのように守衛が配置された頂点集合は明らかに連結グラフを誘導する．つまり，グラフが木の場合，恒久的頂点被覆で必要な最小守衛数と同数の守衛で恒久的連結頂点被覆を構成できるということになり，よって $\tau_c^\infty(T) \le \mathrm{in}(T)+1$ である． □

4 一般グラフにおける ECVC

グラフ $G=(V,E)$ における任意の連結頂点被覆 $C \subseteq V$ について，$\tau^\infty(G) \le |C|+1$ となることが [4] で示されている．

定理 2. グラフ G において $C \subseteq V$ が連結頂点被覆であるとき，$|C|+1$ 人で G の恒久的連結頂点被覆を構成できる．

証明. 恒久的頂点被覆の場合 [4] と同様に証明を行う．頂点集合 $U \subseteq V$ から誘導される G の部分グラフを $G[U]$ と表記する。$C=V$ のときは自明であるため，$V-C \neq \emptyset$ と仮定し，$d \in V-C$ とする．C の各頂点および d に守衛を配置する．いま，辺 $\{x,y\}$ が攻撃されたとする．x と y の両方に守衛がいる場合は双方が位置を交換して防御する．一方の端点 x に守衛が不在の場合，つまり $x \in V-(C \cup \{d\})$ のとき，x から y を通って d に至る単純パス $v_1v_2\ldots v_k$ を考える．つまり，$v_1=x, v_2=y, v_k=d$ とする．このとき，$V-C$ は独立集合であるから，$\{v_2,\cdots,v_{k-1}\} \subseteq C$ となり，$v_2,\cdots,v_k$ の各頂点に守衛が配置されている．よって，各 $i \in \{1,2,\ldots,k-1\}$ について，v_{i+1} にいる守衛を v_i に移動することで，辺 $\{x,y\}$ を防御できる．また，x を新たな d とすれば，守衛は攻撃前と同様の配置にあるため，攻撃が何回繰り返されても防護し続けられることがわかる． □

定理 2 より，最小連結頂点被覆と最小恒久的連結頂点被覆の関係は次のようになる．

系 1. グラフ G において，$\tau_c(G) \le \tau_c^\infty(G) \le \tau_c(G)+1$

提案アルゴリズムは次のとおりである．

1. グラフ G の各頂点を r にとり，以下を繰り返す：
   (a) r を根とする深さ優先 (dfs) 全域木 T_{dfs} を計算する．
   (b) T_{dfs} からすべての葉を取り除いた木を T_{in} とする．
2. ステップ 1 で得られた T_{in} の中で最小なものを T_{algo} とする．
3. T_{algo} の頂点集合を C_{algo} とし，C_{algo} の各頂点と任意の頂点 $v \in V-C_{\mathrm{algo}}$ に守衛を配置する．

ステップ 1 で得られる木 T_{in}（の辺集合）は連結辺支配集合であり，頂点集合 C_{algo} は連結頂点被覆となる．よって，定理 2 より，ステップ 3 の $C_{\mathrm{algo}} \cup \{v\}$ に守衛を配置すれば，恒久的連結頂点被覆を構成することがわかる．

定理 3. 上記アルゴリズムは，ECVC の 2 倍近似アルゴリズムである．

証明. G における最小連結頂点被覆の大きさを $\gamma_c'(G)$ と表記する．ステップ 2 までに計算される T_{algo} は最小連結辺支配集合を 2 倍近似する，つまり $|T_{algo}| \le 2\gamma_c'(G)$ であることが示されている [1]．一方，任意の連結頂点被覆 C には大きさ $|C|-1$ の連結辺支配集合が存在し，逆に任意の連結辺支配集合 D には大きさ $|D|+1$ の連結頂点被覆が存在することより，$\tau_c(G)=\gamma_c'(G)+1$ が成り立つ．アルゴリズムで求まる恒久的連結頂点集合は $C_{\mathrm{algo}} \cup \{v\}$ であるから，その大きさは，

$$\begin{aligned}|C_{\mathrm{algo}}|+1 &= |T_{\mathrm{algo}}|+2\\ &\le 2\gamma_c'(G)+2\\ &= 2(\tau_c(G)-1)+2\\ &= 2\tau_c(G)\end{aligned}$$

となり，$\tau_c(G) \le \tau_c^\infty(G)$ より，$|C_{\mathrm{algo}}|+1 \le 2\tau_c^\infty(G)$ を得る． □

謝辞 本研究の一部は JSPS 科研費（研究課題/領域番号 26330010）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] T. Doi, T. Fujito, ”A primal-dual method for approximating tree cover with two weights”, Discrete Optimization, 3, pp. 230–237, 2006.

[2] F. V. Fomin, S. Gaspers, P. A. Golovach, D. Kratsch, S. Saurabh, ”Parameterized algorithm for eternal vertex cover”, Inf. Process Lett.,110(16), pp. 702–706, 2010.

[3] A. Kosowski, M. Małafiejski, P. Żyliński, ”Cooperative mobile guards in grids ”, Computational Geometry, 37(2), pp. 59–71, 2007.

[4] W. F. Klostermeyer, C. M. Mynhardt, ”Edge protection in graphs”, Australasian Journal of Combinatorics, 45, pp. 235–250, 2009.

[5] C. Savage, ”Depth-first search and the vertex cover problem”, Inf. Process Lett., 14(5), pp. 233–235, 1982.