逆探索による pmg タイリング可能なポリアモンドの列挙

宮坂 正大[1,a)]　堀山 貴史[1,b)]

概要：ポリアモンドは単位正三角形を辺同士が接続するように組み合わせてできる図形である．pmg タイリングは，鏡映とすべり鏡映の繰り返しで，基本図形を平面に隙間なく，重なりなく敷き詰めるタイリングである．本稿では，逆探索による pmg タイリング可能なポリオミノ (単位正方形からなる) の列挙アルゴリズム を拡張し，pmg タイリング可能なポリアモンドの列挙アルゴリズムを提案する．提案手法は，列挙対象の間に親子関係を定義し，その木構造により列挙を行う逆探索に基づいている．過去の生成図形との同一性判定を必要とする試行錯誤による従来法に対して，逆探索ではルールに従って次の図形を生成することにより，計算時間の効率化と計算容量の削減が図れる．また，逆探索の開始点にあたる家系木の根の図形に「関節」が存在する場合には，逆探索による pmg タイリング可能なポリオミノの列挙アルゴリズムを単純には適用できないが，新たなアルゴリズムを与え，漏れなく重複なく列挙できることを示す．

キーワード：列挙アルゴリズム，逆探索，タイリング

Enumeration of Polyiamonds for pmg Tiling by the Reverse Search

Masahiro MIYASAKA[1,a)]　Takashi HORIYAMA[1,b)]

Abstract: Polyiamonds are the two dimensional shapes made by connecting n equal-sized equilateral triangles, joined along their edges. Polyiamonds for pmg tiling are defined as the polyiamonds those can cover the plane by reflection and glide reflection. In this paper, we propose algorithms to enumerate all polyiamonds for pmg tiling, based on the one enumerating polyominoes for pmg tilig. Our approach is based on the reverse search, in which we design rules to generate the next. By this approach, apart from the conventional method with trial and error, we can reduce the computational time and also the space complexity. If the root node that is the starting point of the reverse search has a joint, we cannot directly apply the algorithm for polyominoes to our problem. Thus, we propose new algorithms and proove that can enumerate all polyiamonds.

Keywords: Enumeration algorithm, reverse search, tiling

1. はじめに

タイリングは，基本図形を繰り返すことで隙間なく重なりなく平面に敷き詰めることをいう．本稿では，pmg タイリングに着目し，pmg タイリング可能な polyiamond の列挙を行う．ここで，polyiamond とは単位正三角形を辺同士が接続するように組合せてできる図形である．pmg タイリングでは，鏡映とすべり鏡映を繰り返すことで基本図形を平面に敷き詰める．

これまでに 2 次元平面上のタイリング 17 種類のうち，福田らによって，p4, p6 タイリングなどの回転によるタイリングや，鏡映やすべり鏡映を組み合せてできる pgg, pmg タイリングなどの列挙法が提案されている [2], [3], [4]．しかし，これらは試行錯誤による列挙であるため計算時間が長くなる．また，過去に生成した図形との同一性の判定が必要となり，計算時間と計算領域が大きくなる．これに対し，p4 タイリングについて，逆探索 [1] による生成法が提案されている [5]．逆探索は木構造を利用した列挙手法で

1　埼玉大学 理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering, Saitama University
a)　s16mm333@mail.saitama-u.ac.jp
b)　horiyama@al.ics.saitama-u.ac.jp

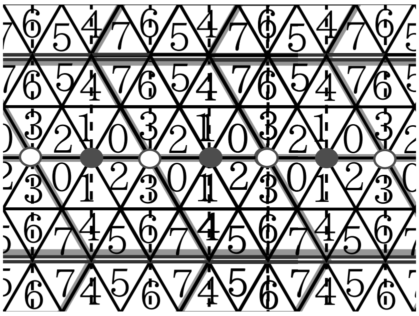


図 1 pmg タイリングのすべり鏡映軸と回転中心の位置関係
Fig. 1 Axes of glide reflection and rotation centers for pmg tiling

あり，ルールに従って次に生成する図形を決定できるため，計算時間の効率化が図れる．また，過去に生成した図形との同一性判定が不要であるため，計算時間と計算領域の削減が可能となる．しかし，[5] の手法では，生成できない図形が存在し，p4 タイリング可能なすべての図形を列挙することはできない [6]．そこで図形を生成するルールの変更が提案され，このルールのもとで逆探索により p4 タイリング可能な図形を漏れなく重複なく列挙ができることが証明されている [7]．また，[7] の手法を用いた既存研究として pmg タイリング可能な polyomino (単位正方形からなる) の列挙 [8] や，p6 タイリング可能な polyiamond の列挙 [9] がある．

本稿では，p4 タイリング [7] や p6 タイリング [9]，pmg タイリング可能な polyomino の列挙 [8] の手法を利用し，pmg タイリング可能な polyiamond を列挙する．提案手法では，図形間に親子関係を定義することで，家系木と呼ばれる木構造を導入する．具体的には，任意の図形の親を一意に求めるルールを定め，その親を繰り返し求めることで根の図形と呼ばれる唯一の図形に到達できるように設計する．この子から親へのルールを逆向きにした，親から子へのルールを与えることで，根の図形から家系木を辿ることが可能になり，すべての図形へと到達できることになる．pmg タイリング可能な polyiamond では根の図形に必ず自明な関節が存在するため，根の図形に関節が存在しないことを条件とする既存の証明をそのまま適用することができない．そのため，アルゴリズムを拡張し，その上で漏れなく列挙できることを証明する．さらに，提案手法を実装した計算機実験の結果を示す．従来法が単位正三角形の数 $n = 10$ までの図形を列挙したのに対して，提案手法では $n = 20$ までのすべての図形を列挙することに成功した．

2. 準備

2.1 タイリング

タイリングとは，与えられた基本図形に対し，回転，鏡映，平行移動などの操作を加えることにより，隙間なく，また重なりもなく，平面に敷き詰めることをいう．それらの操作の組み合わせにより 17 種類のタイリング方法があり，本稿ではその中でも pmg タイリングについて取り扱う．

pmg タイリングの基本図形は，**図 1** に示すように，水平方向に上下 2 本の鏡映軸 (二重線) と，垂直方向に左右 2 本のすべり鏡映軸 (破線) を持つ．ここで，すべり鏡映とは，すべり鏡映軸に沿って一定距離 (図 1 では 4 マス分) だけ平行移動した後で，同じ軸に関して鏡映を行う操作である．また，pmg タイリングでは，図 1 に示すように，すべり鏡映軸の代わりに 2 つの 180 度回転中心を用いて水平方向の敷き詰めを実現できる．これらの回転中心は，それぞれ origin (黒丸)，terminus (白丸) とする．origin は上下 2 本の鏡映軸までの距離が等しくなるように設定する．

本稿では，すべり鏡映軸の代わりに回転中心を用い，以下の条件を満たす pmg タイリング可能な図形を列挙する．(1) origin, terminus を中心に 180 度回転を，鏡映軸で鏡映を繰り返すことで隙間なく，重なりなく，平面に敷き詰められる．(2) origin, terminus を含む単位正三角形を持つ．(3) 3 近傍で連結な図形である．

2.2 polyiamond

polyiamond とは単位正三角形を辺同士が接続するように組み合せてできる図形であり，単位正三角形の個数 n により n-iamond とも呼ばれる．単位正三角形により polyiamond が構成されるため，n-iamond の origin と terminus は単位正三角形の頂点，もしくは辺の中点上に与えられる．pmg タイリングでは，origin と terminus が水平方向の同一直線上に存在し，鏡映軸も水平方向の直線とする．つまり，格子上の横方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}$，右上方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とすると，正整数 t_x, t_y が与えられた時，terminus の位置を $(t_x/2)\boldsymbol{u}$ とし，origin から $\pm(t_y/2)\boldsymbol{v}$ の位置を鏡映軸が通る．

本稿で扱う pmg タイリング可能な polyiamond の列挙問題では，与えられた t_x, t_y に対して，origin $(0, 0)$, terminus $(t_x/2, 0)$，鏡映軸 $y = \pm t_y/2$ が定まり，これらのもとで pmg タイリング可能な polyiamond をすべて列挙する．pmg タイリング可能な polyiamond は $n = t_x t_y$ 個の単位正三角形で構成される [2].

pmg タイリングでは origin, terminus が水平方向の同一直線上に存在し，2 点とも必ず格子点上か格子の中点上に存在する．このことより，次の 5 つの場合に分類できる．パターン 1: origin, terminus ともに格子点上，パターン 2: origin が格子点上で terminus が水平方向の格子の中点上，パターン 3: origin, terminus ともに水平方向の格子の中点上，パターン 4: origin, terminus ともに $\boldsymbol{v}$ 方向の格子の中点上，パターン 5: origin が $\boldsymbol{v}$ 方向の格子の中点上で terminus が $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ 方向の格子の中点上.

pmg タイリングでは，三角格子上の単位正三角形の位置に同値関係が定義でき，これにより規定される同値類に

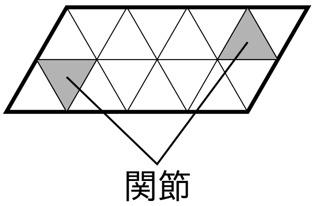


図 2　自明な関節
Fig. 2　Obvious joint

番号を付けて互いを区別できる．pmg タイリング可能な polyiamond は，同じ同値類に属する単位正三角形を同時に複数は持たず，n 種類の同値類からそれぞれ 1 つずつの単位正三角形を持つ．

3. 逆探索のルール

本章では，逆探索により pmg タイリング可能となる polyiamond の生成法について述べる．まず，生成対象の図形間の親子関係，すなわち子から親の図形を一意に求めるルールを定めることで，家系木を設計する．次に，子から親へのルールを逆向きにして親から子の図形を求めるルールを定める．根の図形から出発し，このルールを適用することで家系木上の各図形を順に生成することができる．

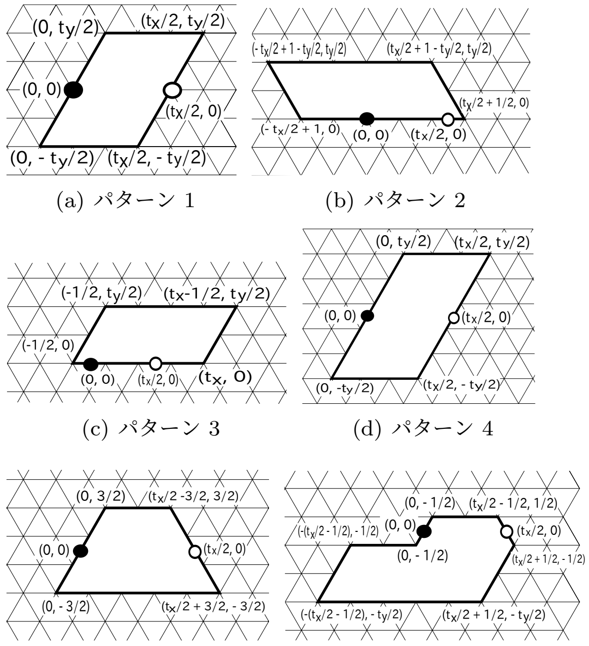
また以下では，列挙する図形を構成する各単位図形を，セルと呼ぶ．polyiamond のセルは単位正三角形である．

入力 t_x, t_y が与えられた時，対応するそれぞれの n-iamond に対し家系木を設計する．まずは，家系木の根となる図形を決定する．既存研究 [7], [8], [9] の手法を利用するために，根の図形は関節を持たないものを選ぶ．ここで，それを取り除くと図形が連結でなくなるセルを関節と定義する．しかし，以下の補題が成り立つため，関節の存在しない根の図形を選ぶことはできない．

補題 3.1. $n \geq 3$ において，pmg タイリング可能な n-iamond は必ず関節を持つ．

根の図形の関節のうち，**図 2** のように polyiamond の内角が 60 度の角を構成し，鏡映軸と 2 頂点で接するセルに隣接するセルと，内角が 60 度の角を構成し，回転軸に辺で接するセルに隣接するセルを自明な関節と定義する．

2. 2 章で示したように pmg タイリングでは origin, terminus の位置関係によって 5 通りに場合分けができるので，各場合で自明な関節以外に関節を持たないように**図 3** のようにそれぞれ根の図形を設計する．パターン 1 またはパターン 4 の場合は，$(0, t_y/2), (0, -t_y/2), (t_x/2, t_y/2), (t_x/2, -ty/2)$ の 4 頂点を持つ平行四辺形．パターン 2 の場合は，$(-t_x/2+1, 0), (-t_x/2+1-t_y/2, t_y/2), (t_x/2+1-t_y/2, t_y/2), (t_x/2+1, 0)$ の 4 頂点を持つ平行四辺形，パターン 3 の場合は，$(-1/2, 0), (-1/2, t_y/2), (t_x-1/2, t_y/2), (t_x-1/2, 0)$ の 4 頂点を持つ平行四辺形とする．パターン 5 の場合は，$t_y = 3$ かつ $t_x \neq 1$ の場合をパターン 5.a とし，それ以外の場合をパターン 5.b としてそれぞれ根の図形を設計する．パターン 5.a の場合は，$(0, -3/2), (0, 3/2), (t_x/2-3/2, 3/2), (t_x+3/2, -3/2)$ の 4 頂点を持つ台形，パターン 5.b の場合は，$(0, -1/2), (0, 1/2), (t_x/2-1/2, 1/2), (t_x/2+1/2, -1/2)$ の 4 頂点を持つ高さ 1 の台形と $(t_x/2+1/2, -1/2), (t_x/2+1/2, -t_y/2), (-(t_x-1/2), -t_y/2), (-(t_x/2-1/2), -1/2)$ の 4 頂点を持つ平行四辺形を組み合わせた図形とする．これらの領域はまず，origin, terminus を中心に 180 度回転を繰り返すことで水平方向に隙間なく重なりもなく敷き詰めることができる．つぎに，鏡映軸での鏡映を繰り返すことで垂直方向にも敷き詰めることができる．また，根の図形の面積はいずれも 2.2 章での n の条件を満たしている．



(a) パターン 1　(b) パターン 2
(c) パターン 3　(d) パターン 4
(e) パターン 5.a　(f) パターン 5.b

図 3　各パターンおける根の図形
Fig. 3　Six kinds of the root polyiamonds

次に，子から親へのルールを定める．以下の基本ルールと追加ルール 1 から 5 は，既存研究 [7], [8], [9] と同じものである．

(基本ルール) 根の図形に近づけるようにセルを 1 つ移動させる．

ここで「移動」は，移動の前後で同じ同値類に属する位置に移動をさせることとする．次に，セルの根の図形からの「近さ」を depth として以下のように定義する．根の図形に対して origin, terminus による 180 度回転と，鏡映軸による鏡映を繰り返すことで，2 次元平面は根の図形と同じ形の領域に分割される．ここで，根の図形を構成するセルの中で origin $(0,0)$ を周上に持つものを cell_0 とし，cell_0 の depthlevel を 0 と定義する．pmg タイリング可能な任意の polyiamond P が与えられた時，cell_0 以外の位置に存在するセルの depthlevel は，図形の連結成分を辿って cell_0 に辿りつくまでに越える領域の境界線の最小回数とする．例えば，**図 4** は 24-iamond の depthlevel を示して

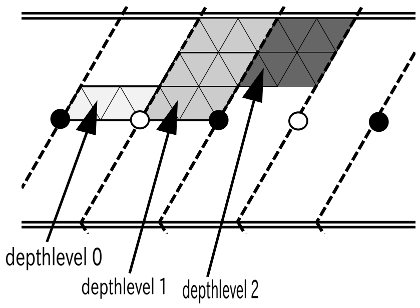


図 4　セルの depthleve
Fig. 4　Depthlevels of cells

いる．それぞれ，色の濃さが同じセルは，同じ depthlevel である．また，各領域について一意に番号を割り当てる．P の各セルはそれぞれ属する領域に割り当てられた番号を subdepth として持つ．この depthlevel, subdepth により，P の各セルの depth $= (\text{depthlevel}, \text{subdepth})$ を定める．異なる 2 つの領域に対して subdepth が等しくなることはないので，近さの全順序関係が定まる．

以上より根の図形に「近づける」ようにセルを「移動」させるためには，同値となる位置の間で，depth の低い位置へと移動させればよい．

origin, terminus を含む pmg タイリング可能な polyiamond について，次の追加ルールを設ける．

(追加ルール 1) セル cell_0 は移動させない．

また，セルを移動した時に，図形が非連結なものや穴が空いたものとならないように，次の追加ルールを定める．

(追加ルール 2) 関節となるセル，または 3 つセルが隣接して存在するセルは移動させない．

セルの移動には，移動後も図形が連結である必要があるため，関節となるセルは移動させない．

次に, 移動させるセルが存在する領域 $\text{region}_{\text{max}}$, 移動元の候補となるセルの集合 $\text{Cells}_{\text{movable}}$ を定義する．$\text{region}_{\text{max}}$ は，図形を構成するセルの中から depth の一番高いセルが存在する領域とする．また，子から親の図形を求める際の移動元となるセルの候補として，集合 $\text{Cells}_{\text{movable}}$ を次の 3 つの条件を満たすセルの集合と定義する．ただし，空の位置とは三角格子上でセルの存在しない位置とする．(1) 図形を構成するセルの中で depth が最大となる．(2) $\text{region}_{\text{max}}$ の内部に存在し，関節でないセルである．(3) $\text{region}_{\text{max}}$ の内部の空の位置と隣接する．例えば，**図 5** に示す 24-iamond の着色部のセルは，いずれも上記の (1), (2), (3) の条件を満たすため，$\text{Cells}_{\text{movable}}$ に属する．すなわち，これらのセルは移動候補となる．

(追加ルール 3) $\text{Cells}_{\text{movable}}$ に属するセルを移動させる．

2 つ以上の移動候補がある場合には以下のルールでタイブレークを行う．

(追加ルール 4) 複数個のセルを根に近づけられる場合には，属する同値類の番号の一番小さいものを移動させる．

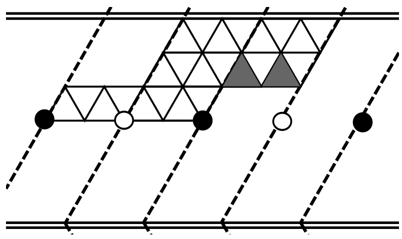


図 5　$\text{Cells}_{\text{movable}}$ に属するセル
Fig. 5　Cells in $\text{Cells}_{\text{movable}}$

(追加ルール 5) セルの移動先の候補位置が複数存在する場合には，depth の一番小さくなる候補位置へと移動させる．

この追加ルールによって移動候補を一意に定めることができる．

以上が既存研究 [7], [8], [9] でのルールであるが，pmg タイリング可能な polyiamond の列挙では，これらに加え自明な関節を扱うルールを追加する．

(追加ルール 6) 根の図形において，自明な関節のセルと，その隣の，同値番号が自身と等しい空の位置と隣接するセルを結合し，1 つの菱形のセルとして家系木を設計する．この 2 つのセルが隣接していない polyiamond は，関節でない方のセルを関節の隣へ移動させた図形を親とする．

根の図形において自明な関節となる箇所を結合し，1 つのセルとすることで，その部分が隣接している polyiamond を，菱形のセルを持つ関節の無い図形として列挙する．その部分が隣接していない polyiamond は，その部分が隣接していて，他のセルは全て同じである図形を親と定めることで家系木に加える．関節でない方のセルを自明な関節の隣へ移動させるという操作で，親の図形は一意に定まる．

次に，子から親へのルールを利用して以下のように正当な子を求めることで家系木を辿る．このとき，追加ルール 6 と同様に自明な関節とその隣のセルを結合させて 1 つの菱形のセルとして扱う．(1) 根の図形から遠ざかるように移動可能なセルをすべて移動候補とする．(2) 移動後の図形の親を確認し，移動前の図形と一致すれば，その移動は正当な子への移動であり，その図形を生成する．(3) 結合箇所が隣接している図形を生成したときに，その図形の子として，結合箇所が隣接しておらず，他のセルの位置が同じである図形を生成する．

この手順を根の図形に適用し，生成した図形すべてに対しても同様に繰り返す．根の図形は pmg タイリング可能であるため，n 種類の同値類からそれぞれ 1 つずつのセルを持つ．また，セルの移動では移動の前後で同じ同値類に属する位置へ移動させているため，生成する polyiamond はすべて pmg タイリング可能な図形である．以上のルールを適用すると **図 6** のように家系木ができる．家系木の頂点にあたる各図形は pmg タイリング可能な polyiamond であり，辺は親子関係を表す．

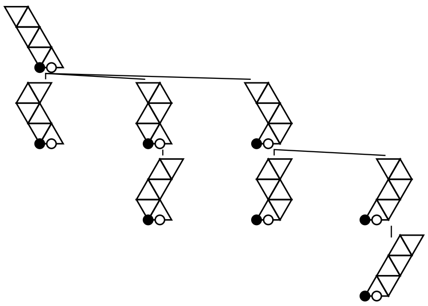


図 6 6-iamond の家系木
Fig. 6 Family tree of 6-iamonds

4. 証明

本章では，3 章で説明した pmg タイリングのアルゴリズムにより，pmg タイリング可能なすべての polyiamond を漏れなく重複なく列挙できることを証明する．逆探索において，子から親のルールにより親を求められない図形は，根の図形が祖先とならず，生成することはできない．そこで，pmg タイリング可能なすべての polyiamond が列挙できることを証明するため，3 章で定めた子から親へのルールにより，以下の 2 点が必ず成り立つことを示す．(1) 提案した子から親へのルールで，親の図形が一意に求まる．(2) 親の図形を繰り返し求めると，根の図形に到達できる．

また，根の図形について以下の補題が成り立つ．

補題 4.1. 入力 (t_x, t_y) のいずれも最小値でない場合には，根の図形を構成する単位正三角形に，自明な関節以外の関節は存在しない．

以下では，pmg タイリング可能な polyomino の列挙 [8] の場合と同様に，根の図形に自明な関節以外の関節が存在する場合としない場合でそれぞれ証明を与える．

4.1 根の図形に自明な関節以外の関節が存在しない場合

方針としては，まず追加ルール 6 の結合箇所が隣接している図形については，菱形のセルを含んだ関節の無い図形として，すべてを列挙できることを証明する．その後に，結合箇所が隣接している図形から，結合箇所が隣接していない図形をすべて生成できることを示す．

まず，根の図形でない任意の polyiamond について，移動候補となるセルの集合 $\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ が少なくとも 1 つはセルを持つことが成り立つこと，親の図形は一意に定まること，また，親の図形を繰り返し求める操作により根の図形まで到達できることがいえる．これらは，単位正三角形のセルのみをもつ場合に成り立つことは既存研究 [9] によって示されており，菱形のセルをもつ場合にも，同様な証明を与えることができる．

補題 4.2. 根の図形が自明な関節以外に関節を持たない場合には，追加ルール 6 による菱形のセルをもつ根の図形でない pmg タイリング可能な polyiamond は，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルを少なくとも 1 つは持つ．

補題 4.3. 追加ルール 6 による菱形のセルをもつ根の図形でない pmg タイリング可能な polyiamond について，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルが存在する場合には，親の図形は一意に定まる．

補題 4.4. 追加ルール 6 による菱形のセルをもつ根の図形でない pmg タイリング可能な polyiamond について，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルが必ず存在するときには，以下が成り立つ．根の図形でないタイリング可能な polyiamond P が与えられ，P の $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ 領域の内部には depth が最大となるセルがちょうど k 個だけ存在するとする．この状況において，親の図形を求める操作を高々 k 回繰り返すことで，繰り返し適用後の $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ の depth が小さくなる．この途中では，親の図形で選ばれる $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ の領域は P で選ばれるものと同じであり，最大の depth を与えるセルは P のものの真部分集合となる．

補題 4.2, 4.3, 4.4 により，追加ルール 6 による菱形のセルをもつ図形において，子から親へのルールにより親の図形が一意に定まること，そして，親の図形を求める操作を繰り返し適用することで $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ の depth が小さくなることを示した．逆探索では，子から親へのルールの逆となる親から子へのルールを根の図形に適用し次々に子を求めることで家系木上の子をすべて列挙する．したがって，親から子へのルールでは次の定理が成り立つ．

補題 4.5. 根の図形が自明な関節以外に関節を持たない場合には，pmg タイリング可能な任意の polyiamond のうち，追加ルール 6 による菱形のセルをもつ図形に関しては，n-iamond の根の図形に対して，親から子を求める操作を繰り返し適用することで，必ず列挙できる．

次に，追加ルール 6 での結合箇所が隣接している図形から，結合箇所が隣接していない図形をすべて生成できることを示す．

補題 4.6. 追加ルール 6 での結合箇所が隣接している pmg タイリング可能な polyiamond を列挙できるならば，追加ルール 6 での結合箇所が隣接していない pmg タイリング可能な polyiamond を列挙することができる．

(証明の概要) 追加ルール 6 での結合箇所が隣接していない pmg タイリング可能な polyiamond について，親の図形は，自明な関節でない方のセルを自明な関節の隣へ移動させた図形である．結合箇所は 2 箇所存在することもあるが，その全てを自明な関節の隣に移動させた図形を親とすることで，親の図形は一意に定まる．

逆探索での列挙を行うためには，親の図形もタイリング可能でなければならない．この移動が追加ルール 2 を満たすならば，親の図形もまたタイリング可能であると言える．

ここで，移動させるセルの隣接関係を考える．根の図形で自明な関節となるセルと結合するセルは，自身と同値番号が同じ空の位置と，自明な関節のセルと同値類が等しい

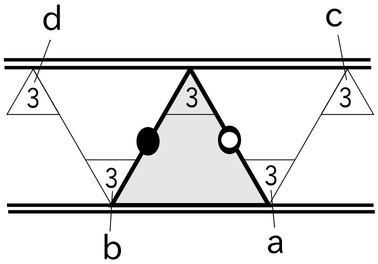


図 7　パターン 5.a の $t_x = 3$ での同値番号 3 のセルの位置
Fig. 7　Positions of $cell_3$ for pattern 5.a, $t_x = 3$

空の位置に隣接する．よって 1 つのセルとのみ隣接するため，関節にはならず追加ルール 2 を満たす．

よって，親である，結合箇所が隣接している図形に対して，親から子を求めるルールを適用することで，結合箇所が隣接していない図形を生成でき，追加ルール 6 での結合箇所が隣接していない pmg タイリング可能な polyiamond を列挙することができる．□

補題 4.5, 4.6 より，根の図形が自明な関節以外の関節を持たないときには，以下の定理が成り立つ．

定理 4.1. 根の図形が自明な関節以外に関節を持たない場合には，pmg タイリング可能な任意の polyiamond は，対応する n-iamond の根の図形に対して，親から子を求める操作を繰り返し適用することで，必ず列挙できる．

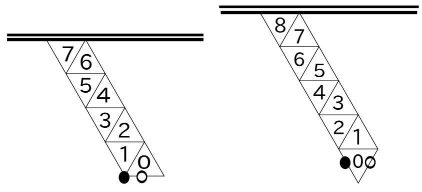
4.2　根の図形に自明な関節以外の関節が存在する場合

補題 4.1 より，入力の (t_x, t_y) のいずれかが最小値である場合には，根の図形を構成するセルにに，自明な関節以外の関節が存在しうる．関節が存在する時には，次のように場合分けをしてそれぞれ証明を行う．(1) パターン 5.a で $t_x = 3$ の時，(2) パターン 2, 3 で $t_y = 2$ の時，(3) パターン 4, 5.b で $t_y = 1$ の時，(4) パターン 2, 5.b で $t_x = 1$ または，パターン 1, 4 で $t_x = 2$ の時の 4 通りである．

まず，(1) パターン 5a で $t_x = 3$ の時には以下の補題が成り立つ．

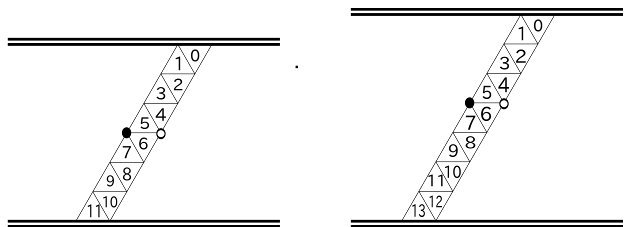
補題 4.7. パターン 5.a において， $t_x = 3$ となるとき，根の図形でない pmg タイリング可能な polyiamond P は $\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルを少なくとも 1 つ持つ．

(証明の概要) パターン 5.a において， $t_x = 3$ となるとき，根の図形は **図 7** の正三角形となる．このとき，同値番号 3 のセルが内角 60 度を構成するセルとなるため，その隣のセルが，関節となる．そこで，同値番号 3 のセルの取りうる位置を考える．polyiamond が根の図形の領域をまたぐとき，その境界の内か外に同値番号 3 のセルが接している．このため，同値番号 3 のセルの取りうる位置は，根の図形での位置か，図 7 での a, b の位置である．このセルが，根の図形での位置にあるならば，関節のないときと同じように親の図形を決めることができる．a, b のどちらかにある場合で，同値番号 3 のセルに隣接するセルが 1 つである場合には，同値番号 3 のセルを根の図形での位置に動かした図形が根の図形になる．同値番号 3 のセルが a, b のどちらかにある場合には，同値番号 3 のセルの境界の内側で隣接するセルが 1 つであることから，それ以降の子で，同値番号 3 のセルが移動することは無いため，この部分を固定することで，自明な関節以外の関節をもたない図形と考えることができる．よって補題 4.7 の議論により，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルを少なくとも 1 つ持つ．□



(a) パターン 2　(b) パターン 5b

図 8　パターン 2, 5.b で $t_x = 1$ のときの根の図形
Fig. 8　Pattern 2, 5.b: the root polyiamond of $t_x = 1$



(a) パターン 1　(b) パターン 4

図 9　パターン 1, 4 で $t_x = 2$ のときの根の図形
Fig. 9　Pattern 1, 4: the root polyiamond of $t_x = 2$

次に，(2) パターン 2, 3 で $t_y = 2$ の場合と (3) パターン 4, 5.b で $t_y = 1$ の場合を考える．これらのパターンは，polyomino の列挙 [8] にも存在し，同様の証明を与えることができる．よって以下が成り立つ．

補題 4.8. パターン 2, 3 において， $t_y = 2$ となるとき，根の図形でない pmg タイリング可能な polyiamond P は $\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルを少なくとも 1 つ持つ．

補題 4.9. パターン 4, 5b において $t_y = 1$ のとき，根の図形以外に pmg タイリング可能な polyiamond は存在しない．

次に，(4) パターン 2, 5.b で $t_x = 1$ または，パターン 1, 4 で $t_x = 2$ の時には，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルが 1 つも存在しない場合があり，3 章のルールでは列挙を行えないため，新たなアルゴリズムを与え，列挙を行う．

パターン 2, 5.b で $t_x = 1$ となるときは，根の図形は **図 8** のように origin をもつセルを cell_0 として，その隣に $\mathrm{cell}_1, \mathrm{cell}_2, \ldots \mathrm{cell}_{\mathrm{n}-1}$ と並ぶ幅 1 の図形である．

また，パターン 1, 4 で $t_x = 2$ となるときは，根の図形は **図 9** のように鏡映軸に接するセルを cell_0 として，その隣に $\mathrm{cell}_1, \mathrm{cell}_2, \ldots \mathrm{cell}_{\mathrm{n}-1}$ と並ぶ幅 1 の図形である．

ここで，パターン 2, 5.b で $t_x = 1$ となるときと，パターン 1, 4 で $t_x = 2$ となるときの子から親へのルールを定義

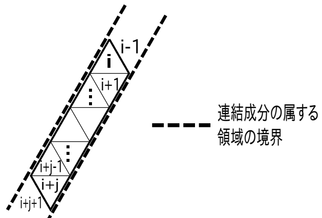


図 10 depth 最大の連結成分
Fig. 10 Connected cells of largest depth

する．これは，3 章で示したルールに沿って示す．まず，基本ルールとして，

(基本ルール) 根の図形に近づけるように複数個のセルからなる連結成分を一度に移動する．

このルールに合うように，3 章での追加ルールに対応するルールを与える．

(追加ルール 1) cell_0 と定義されたセルを含む連結成分は移動させない．

(追加ルール 2) 関節となる連結成分，または，空の位置と隣接しない連結成分は移動させない．

ここで，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ を次の 3 つの条件を満たす連結成分の集合と定義する．. (1) 図形を構成するセルの中で depth が最大のセルのみからなる連結成分で，境界内で連続するセルを全て含む．(2) $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ の内部に存在し，関節ではない．(3) $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ の内部の空の位置と隣接する．

(追加ルール 3) $\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属する連結成分を移動させる．

(追加ルール 4) 複数個の連結成分を根に近づけられる場合には，属する同値類の番号の一番小さいセルを持つ連結成分を移動させる．

(追加ルール 5) 連結成分を，連結成分内の同値番号最小のセルより同値番号が 1 小さいセルの隣へ移動させる．

連結成分内のセルの同値番号は，同値番号が順にならんでいる．例えば，**図 10** は $\mathrm{cell}_{\mathrm{i}}$ から $\mathrm{cell}_{\mathrm{i+j}}$ の $j+1$ 個のセルからなる連結成分である．ここで，cell_0 は 移動させないため $\mathrm{region}_{\mathrm{max}}$ の連結成分には含まれない．なので，$i>0$ であり，i は必ず領域内の空の位置と隣接する．これにより，移動先が一意に定まる．

子から親のルールは以上であり，これの逆のルールにより，根の図形から順に図形を生成できる．

ここで，パターン 2, 5b で $t_x=1$ となるときと，パターン 1, 4 で $t_x=2$ となるときにも列挙が行えることを証明する．

補題 4.10. パターン 2, 5b において $t_x=1$ のときと，パターン 1, 4 において $t_x=2$ のとき，pmg タイリング可能な全ての図形を列挙することができる．

(証明の概要) まず，根でない図形は，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルの連結成分が少なくとも 1 つ存在することを示す．これは，depth 最大のセルの中で最小の同値番号を持つセルを含む，領域内での連結成分が相当する．この連結成分は，すべてのセルが depth 最大であるため関節にならず，連結成分内の同値番号最小のセルの隣に必ず領域内の空の位置が存在するため，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ の定義を満たす．

次に，$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属する連結成分が存在するとき，親が一意に定まることを示す．移動させるセルは上で示した連結成分であり，移動先は，連結成分内の最小のセルに領域内で隣接する，領域内の空の位置により一意に定まる．よって，根でない図形において $\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属する連結成分が常に存在するため，親の図形は一意に定まる．

ここで，子から親を求める操作を 1 回行うと，移動した連結成分と，移動先の連結成分が新たに 1 つの連結成分となるため，図形全体での連結成分の個数が 1 つ減る．また，n-iamond の領域内での連結成分は，多くとも n 個であるため，子から親を求める操作を多くとも n 回行うことで根の図形に到達する．

これにより，条件を満たす全ての図形から根の図形に到達できるため，子から親のルールの逆である親から子のルールにより，根の図形から条件を満たす全ての図形を列挙することができる． □

以上の 補題 4.7,4.8 では $\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルが少なくとも 1 つ存在することを示した．$\mathrm{Cells}_{\mathrm{movable}}$ に属するセルを少なくとも 1 つ持つならば，補題 4.3, 4.4 を適用でき，列挙が可能である．補題 4.9 では根の図形以外にタイリング可能な図形が存在しないことを示し，補題 4.10 では，新たなルールにより，すべての図形を列挙できることを示した．

これらにより，以下の定理が成り立つ．

定理 4.2. 根の図形が自明な関節以外に関節を持つ場合には，根の図形でない pmg タイリング可能な polyiamond は，対応するパターンの n-iamond の根の図形に対して，親から子を求める操作を繰り返し適用することで，必ず列挙できる．

5. 実験結果

提案したアルゴリズムを実装し，列挙を行った結果を**表 1** に示す．本稿では，回転や鏡映を行うことで同型となる図形を同一視している．実行環境は，CPU: Intel(R) Core(TM) i5-2540M 2.60GHz 2.60GHz，メモリ: 4GB，ubuntu 14.04 である．

提案したアルゴリズムにより，pmg タイリング可能な polyiamond を構成する単位正三角形の個数 $n=20$ までの図形をすべて列挙した．入力 t_x, t_y は 2.2 章で示した $n=t_xt_y$ を満たす自然数の組であるので各 n に対して複数の組合せが存在する．例えば，$n=10$ の時には 4 種類の組合せがあり，合計 94 個の polyiamond を列挙した．

提案アルゴリズムでは既存研究である試行錯誤による手法 [2] より n の大きい図形が列挙できた．具体的には，既

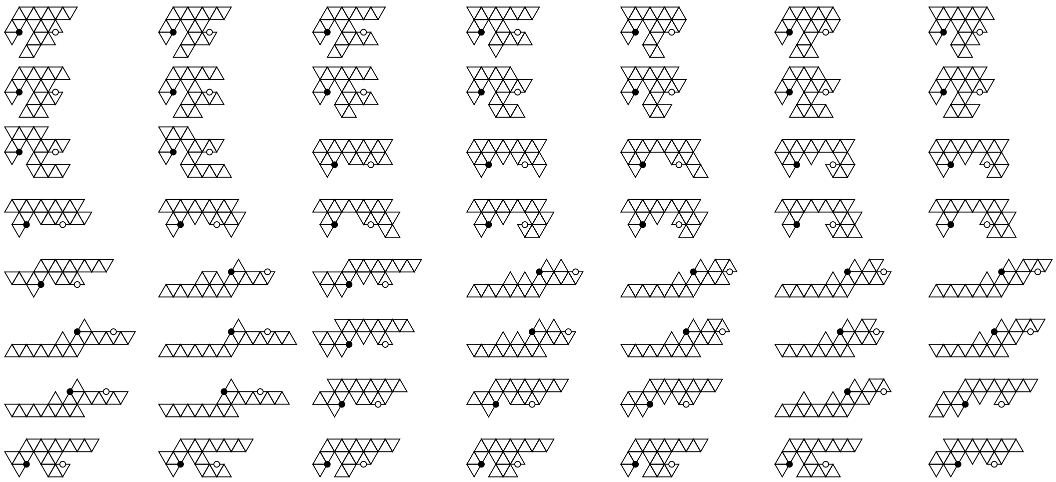


図 11 pmg タイリング可能な 20-iamond (一部抜粋)
Fig. 11 Partial list of 20-iamonds for pmg tiling

存研究である試行錯誤による手法 では $n = 2, 4, 6, 8, 10$ の polyiamond を列挙したのに対し，本研究では先に述べたように $n = 20$ まで列挙することができた．実行結果の例として列挙した 20-iamond の一部を **図 11** に示す.

6. まとめ

本稿では，逆探索により，pmg タイリング可能な polyiamond を列挙した．逆探索のルールを定め，そのルールにより列挙ができていることを証明した．さらに，提案アルゴリズムを実装し，計算機による実験を行った．試行錯誤による従来法では $n = 2, 4, 6, 8, 10$ を列挙しているのに対し，本稿では $n = 20$ までの pmg タイリング可能な polyiamond をすべて列挙することに成功した．今後の課題としては，17 種類のタイリング方法に対して逆探索に基づく列挙法を与えることが挙げられる．

表 1 pmg タイリング可能な polyiamond の個数と実行時間
Table 1 Partial list of experimental results

n	t_x, t_y, パターン	polyiamond	time(sec)
1	1,1,5	1	0.00
⋮	⋮	⋮	⋮
10	1,10,2	16	0.00
	2,5,4	60	0.00
	5,2,2	17	0.01
	10,1,4	1	0.00
⋮	⋮	⋮	⋮
18	1.18,2	256	0.00
	2,9,4	2648	0.00
	3,6,2	2384	0.28
	6,3,4	580	0.28
	9,2,2	65	0.06
	18,1,4	1	0.00
19	1,19,5	256	0.00
	19,1,5	1	0.00
20	1,20,2	512	0.00
	2,10,1	5264	2.94
	2,10,3	0	0.41
	4,5,4	3736	0.53
	5,4,2	2708	0.37
	10,2,1	47	0.01
	10,2,3	44	0.00
	20,1,4	1	0.00

参考文献

[1] D. Avis and K. Fukuda: Reverse Search for Enumeration, *Discrete Appl. Math.*, 6, pp.21–46,(1996).
[2] H. Fukuda, C. Kanomata, N. Mutoh, G. Nakamura, and D. Schattschneider: Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains for Isohedral Tilings of Crystal Class D_2, *Symmetry*, pp.325–364, (2011).
[3] H. Fukuda, C. Kanomata, N. Mutoh, G. Nakamura, and D. Schattschneider: Polyominoes and Polyiamonds as Fundamental Domains of Isohedral Tilings with Rotational Symmetry, *Symmetry*, pp.828–851, (2011).
[4] H. Fukuda, N. Mutoh, G. Nakamura, and D. Schattschneider: A Method to Generate Polyominoes, Polyiamonds and Polyhexs for Isohedral Tilings with Rotational Symmetry, *Graphs and Combinatrics*, 23, pp.259–267, (2007).
[5] T. Horiyama, M. Samejima: Enumeration of Polyominoes for p4 Tiling, *In Proc. of the 21st Canadian Conference on Computational Geometry*, pp.29–32, (2009).
[6] T. Horiyama and S. Yamane: Generation of Polyiamonds for p6 tiling by the Reverse Search, *The China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications* (CGGA 2010, Dalian), pp.58-59, 2010. J. Akiyama et al. (Eds.), LNCS 7033, pp.96–107, (2011).
[7] T. Horiyama and S. Yamane: Enumeration of Polyominoes for p4 Tiling Revisited, *LA symposium winter*, pp. 15.1–15.6, (2014).
[8] T. Horiyama and J. Nishioka: Enumeration of Polyominoes for pmg Tiling, *IEICE Technical Report, vol. 114, no. 80, COMP2014-14(2014-6)*, pp. 107–114, (2014).
[9] 前島 悠人: 逆探索に基づく p3, p6 タイリングの列挙, 埼玉大学工学部情報システム工学科卒業論文, (2013).