シミュレーションによる緩和除数方式の偏りの比較

ハンスックウォラパーニット スマッチャヤー 1,a 一森 哲男 1,b

受付日 2015年9月4日, 採録日 2016年5月17日

概要:好ましい議席配分方式のクラスとして緩和除数方式が提案されているが、本研究では、この配分方式の偏りを測ってみる。そのため、Balinski と Young の定義した尺度と Ernst の定義した尺度を利用する。さらに、最近、我々の提案した新しい尺度も使用する。これらの尺度を使用し、アメリカの各州の人口を対象に、それぞれの配分方式の偏りを計算する。この際、妥当な結論を得るため、実際の人口を少し変動させ、偏りの平均値を求めた。最後に、3つの尺度に対して得られた結果を比較検討する。

キーワード:配分方式、緩和除数方式、偏り、尺度、シミュレーション

Bias Comparison among Relaxed Divisor Methods by A Computer Simulation

Sumachaya Harnsukworapanich^{1,a)} Tetsuo Ichimori^{1,b)}

Received: September 4, 2015, Accepted: May 17, 2016

Abstract: In this research, we investigated the bias of relaxed divisor methods by applying the Stolarsky Mean Method. We compared three different measurements used for the Stolarsky Mean Method. First we calculated the average bias of two famous bias measurements: the Balinski and Young measurement and the Ernst measurement. Both measurements have a formula for large and small states. The third measurement, however, which was created by the researchers, did not factor in the element of large and small states in the formula. All three measurements were compared together, and the results showed that our measurement produced similar results to the other two measurements. One method called, the Webster method, gave the lowest bias value, compared to the other methods. But, at some parameter (θ) the averages of the bias values of the Balinski and Young measurement and the Ernst measurement include errors.

Keywords: Apportionment Method, Relaxed Divisor Method, Bias, Measurement, Simulation

1. はじめに

議席配分方式として緩和除数方式が提案され,多くの好ましい性質を持っていることが判明している [11], [13], [14], [15], [16], [17]. そのため,ここでは,緩和除数方式を研究対象とした.また,配分方式の優劣の基準として,配分方式の与える偏りは従来より非常に重要視されてきた.しかしながら,偏りを測る決定的な「ものさし」が存在しないため,この問題をより困難なものとしてきた.本稿では,「ものさし」を尺度と呼ぶことにし,

1 大阪工業大学

Osaka Institute of Technology, Hirakata, Osaka 573–0196, Japan

- a) h.sumachaya@gmail.com
- b) ichimori@is.oit.ac.jp

Balinski ら [1] の定義した尺度と Ernst [5] の定義した尺度を用いて、緩和除数方式の偏りを調べた。さらに、我々の提案した新しい尺度 [6] も使用し、3 つの尺度に対して得られた結果を比較検討した。その結果、

- (i) あらゆる場面で、Webster 方式と呼ばれる配分方式の偏りが最小であること、および、
- (ii) 我々の尺度には存在しないが、Balinski らの尺度と Ernst の尺度には非常に不満な性質のあることを発見した.

本研究では、アメリカの各州の人口を対象にして、配分方式の偏りの計算を行った。妥当な結論を得るため、実際の人口を少し変動させ、結果を平均化することにより、配分方式の偏りを定めた。

本研究の2章は配分方式を説明する.3章は緩和除数方式の定義を与えて4章で偏りの測り方を説明する.5章で

表 1 5 つの有名な除数方式

Table 1 5 accepted divisor methods.

Method	Adams	Dean	Hill	Webster	Jefferson
d(a)	a	$\frac{a(a+1)}{a+\frac{1}{2}}$	$\sqrt{a(a+1)}$	$a + \frac{1}{2}$	a+1

表 2 パラメーター θ の値と対応する方式

Table 2 The values of parameter θ according to methods.

θ	$-\infty$	-4	-1	0	1	2	+∞
Methods	Adams	Dean	Hill	TS	Theil	Webster	Jefferson

シミュレーションによる偏りを説明し、3つの偏りの測り方を用いて緩和除数方式の偏りを調べる。6章で本研究をまとめる。

2. 配分方式

現代の議席配分の研究では、配分方式を「除数方式」と呼ばれる配分方式のクラスに限定して行われるのが一般的である. 理由は、このクラス以外の配分方式では、「Alabamaパラドクス」や「人口パラドクス」といった奇妙な現象が起こるからである(詳細は文献[1]を参照).

最初に、記号を定義する。州の数をsとし、州iの人口を $p_i>0$ とする。総人口をp,議員定数をhとする。州iの取り分とは、理想比例配分値で、 $q_i=h*p_i/p$ と定義される。各除数方式には、それに対応する「丸め関数」が定義される。

非負の整数 a の丸め関数 d(a) は $a \leq d(a) \leq a+1$ を満たす狭義増加関数である。正の実数 x>0 を考え,これを除数として,各州の人口を除した値 p_i/x を丸め関数 d(a) を用いて整数に丸める(この整数を a_i とする)。すなわち, $d(a-1) < p_i/x < d(a)$ ならば $a_i = a$ とし, $p_i/x = d(a)$ ならば $a_i = a$ または $a_i = a+1$ とする,これらの整数 a_i の総和が議員定数 b に等しければ,b に等しくなければ,最初に定めた除数 b の他を調整し,最終的には,整数 b の総和が議員定数 b に等しなるようにする b [1], b [2], b [3].

除数方式は丸め関数を具体的に定めると、特別な名前で呼ばれることが多い。たとえば、 $\mathbf{表} 1$ にはよく知られた配分方式とその丸め関数を与える。

3. 緩和除数方式

緩和除数方式の丸め関数は Stolarsky 平均 [20] を用いて、 次のように定義されている.

正の整数 a に対し [11], [13], [14], [15], [16], [17],

$$d_{\theta}(a) = \begin{cases} \frac{1}{e} \frac{(a+1)^{(a+1)}}{a^{a}} &, \quad \theta = 1\\ \frac{1}{\log \frac{a+1}{a}} &, \quad \theta = 0\\ \left(\frac{(a+1)^{\theta} - a^{\theta}}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta - 1}} &, \quad \theta \neq 0, 1 \end{cases}$$
 (1)

と定義する.

a=0 に対し、

$$d_{\theta}(0) = \begin{cases} 0 & , & \theta \le 0 \\ \frac{1}{e} \approx 0.37 & , & \theta = 1 \\ \left(\frac{1}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta - 1}} & , & \theta > 0, \theta \ne 1 \end{cases}$$
 (2)

と定義する.

この丸め関数は 1 つのパラメータ θ を用いて表現されており [8], [9], [10], [12], [19], パラメータをさまざまな値に設定することにより、さまざまな配分方式を表現することができる。実際、 $\theta \to -\infty$ とすれば Adams 方式が得られ、 $\theta = -4$ のとき、実質上 Dean 方式が得られる(詳細は文献 [15] の命題 3.3 を参照)。また、 $\theta = -1$ のとき Hill 方式、 $\theta = 2$ のとき Webster 方式が得られる。そして、 $\theta = 0$ ならば TS 方式 [23], $\theta = 1$ ならば Theil 方式 [24] が得られる。最後に、 $\theta \to +\infty$ とすれば Jeffersons 方式が得られる。以上を表 2 にまとめる。

4. 偏りの測り方

緩和除数方式の丸め関数はパラメータを含むため、緩和除数方式は1つの配分方式を表しているのではなく、無限個の配分方式のクラスを構成している。ただ、我々に必要なものは唯一の配分方式であるため、パラメータの値を唯一に決める必要がある。本稿では、配分方式の持つ、議席配分の偏りを判断規準として、その唯一の値を決めることにする。

本研究は2つの有名な偏りの尺度(Balinski らの尺度と Ernst の尺度)だけでなく,我々が文献[6]で提案した尺度も使用する.これら3つの尺度では,値が正のとき小州が有利であることを意味し,値が負のとき大州が有利であることを意味する.さらに,これらの尺度の絶対値が大きいほど,配分方式の偏りが大きいものと解釈する.

4.1 Balinski らによる偏りの尺度

まず、Balinski らが提案した偏り尺度を説明する。人口の多い州を大州と呼び、その集合を L とする。また、人口の少ない州を小州と呼び、その集合を S とする。このとき、 $|L|=|S|,\ L\cap S=\emptyset,\ L\cup S\subset\{1,\dots,s\}$ と仮定する。h 議席の配分を a_i $(1\leq i\leq s)$ 、取り分を q_i $(1\leq i\leq s)$

とする.

また、 $a_i(\theta)$ をパラメータ θ の緩和除数方式が州 i に与える議席数とする。彼らの偏り尺度は大州と小州の取り分 q_i と議席数 $a_i(\theta)$ の比率を考える。すなわち、

$$k_L(\theta) = \frac{\sum_{i \in L} a_i(\theta)}{\sum_{i \in L} q_i}, \quad k_S(\theta) = \frac{\sum_{i \in S} a_i(\theta)}{\sum_{i \in S} q_i}$$

とおいて.

$$BY(\theta) = \frac{k_S(\theta)}{k_L(\theta)} - 1 \tag{3}$$

と定義される[1],[4].

4.2 Ernst 方式による偏りの尺度

次に、Ernst の偏り尺度も人口の多い州と人口の少ない州の取り分 q_i と配分議席数 $a_i(\theta)$ の比率を考えているが、その定義は Balinski らによる方式のそれと少し異なる.

Ernst [5] の偏りの定義は,

$$k'_{L}\left(\theta\right) = \sum_{i \in L} \frac{q_{i}}{a_{i}\left(\theta\right)}, \quad k'_{S}\left(\theta\right) = \sum_{i \in S} \frac{q_{i}}{a_{i}\left(\theta\right)}$$

とおいて.

$$ER(\theta) = 1 - \frac{k_S'(\theta)}{k_I'(\theta)} \tag{4}$$

と定義される[5].

4.3 我々による偏りの尺度

Balinski らと Ernst の偏りの測り方では、大州・小州を分けて計算している。しかし、大州・小州といっても、実は、大きい小さいは主観的なもので、これらを厳密に区別することは難しい [18], [21], [22]。本研究は大州小州を区別せずに使える、文献 [6] で提案した偏りの尺度も使用する。ここで、緩和除数方式の丸め関数 $d_{\theta}(a)$ を用いて、取り分 q_i を整数 $[q_i]_{\theta}$ に丸める。具体的には、 $d_{\theta}(a-1) < q_i \leq d_{\theta}(a)$ を満たす非負の整数 a が存在すれば、 $[q_i]_{\theta} = a$ とする。取り分 q_i が固定されたとして、緩和除数方式の偏りを測る尺度が、

$$B(\theta) = \sum_{i=1}^{s} [q_i]_{\theta} - h \tag{5}$$

を用いる[6],[7].

5. シミュレーションによる偏り

今回の研究では、1960 年度から 2010 年度のアメリカの各州の実際の人口を考えた。この期間では、州の数がs=50、衆議院議員の議席総数がh=435である。緩和除数方式の偏りを求めるが、パラメータ θ の値が-12から+12の計 25 個の整数となる場合の配分方式を対象とした。また、各年度の人口をそのまま利用し配分方式の偏りを求めるのではなく、各州の人口をある程度増減させ、偏りの

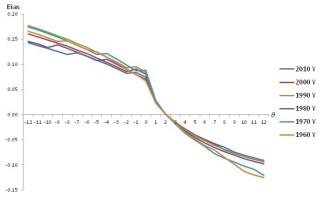


図 1 Balinski らによる $BY(\theta)$ の偏り

Fig. 1 Bias of Balinski and Young $BY(\theta)$, see Eq. (3).

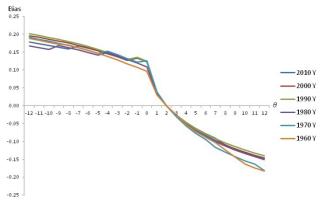


図 2 Ernst による $ER(\theta)$ の偏り

Fig. 2 Bias of Ernst $ER(\theta)$, see Eq. (4).

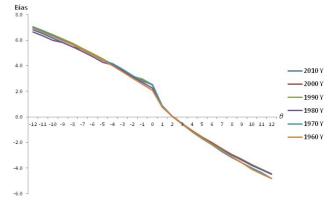


図 3 我々による $B(\theta)$ の偏り

Fig. 3 Bias of $B(\theta)$, see Eq. (5).

平均値を求め,その値を配分方式の偏りとした.実際,緩和除数方式では人口をある程度増減させても,州に配分される議席数は変化しない.そこで,その議席数が変化しない範囲内で,各州の人口をランダムに選んだ.そうすることにより,各年度の1組の人口から,10万組の人口を作成し,それぞれの配分方式の偏りを算出した.前の章で述べた3つの尺度 $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ を用いて,すなわち,式(3),(4) および(5) の定義を用いて偏りを計算した結果を図 1,図 2,および,図 3 にまとめる.各図の横軸にパラメータ θ の値をとり,縦軸に偏りの平均値をとる.以下

表 3 2010 年度の人口パラメーター θ の $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ の 偏りの平均値

Table 3 The average bias values of $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ in 2010.

θ	$BY(\theta)$	$ER(\theta)$	$B(\theta)$
-8	0.1198	0.1585	5.4714
-7	0.1232	0.1681	5.2655
-6	0.1161	0.1614	4.8940
-5	0.1083	0.1537	4.4712
-4	0.1001	0.1457	4.0499
-3	0.0917	0.1371	3.6161
-2	0.0825	0.1274	3.1466
-1	0.0839	0.1333	2.9340
0	0.0747	0.1233	2.4967

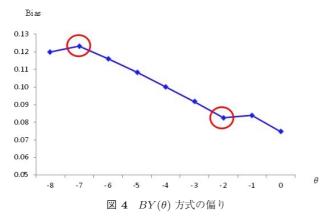


Fig. 4 Bias of $BY(\theta)$ formula, see Table (3).

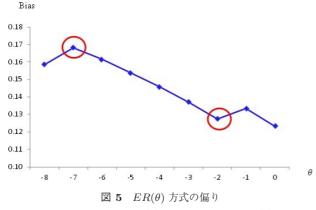


Fig. 5 Bias of $ER(\theta)$ formula, see Table (3).

では、記号 $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ は偏りの平均値を表すことにする。これらの図より、3 つの尺度のグラフの形状が類似し、どの尺度を用いても、 $\theta=2$ のとき、すなわち、Webster 方式の偏りが最小となっていることが分かる。

また、文献 [18] の 50 ページに述べられているように、文献 [1] の 118 ページの偏りの観点からすれば、緩和除数方式はパラメータ θ に関して小州有利から大州有利へと徐々に変化するはずである (より詳しくは、文献 [1] の Theorem5.1 と文献 [13] の Lemma3.4 を参照)。 ところが、尺度 $BY(\theta)$ と $ER(\theta)$ のグラフには、パラメータが大きくなると、尺度

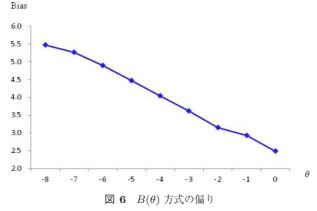


Fig. 6 Bias of $B(\theta)$ formula, see Table (3).

表 4 2000 年度の人口パラメーター θ の $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ の 偏りの平均値

Table 4 The average bias values of $BY(\theta), ER(\theta), B(\theta)$ in 2000.

_	θ	$BY(\theta)$	$ER(\theta)$	$B(\theta)$
	-2	0.0858	0.1279	3.1457
	-1	0.0907	0.1341	2.9460
	0	0.0805	0.1238	2.5042

表 5 1990 年度の人口パラメーター θ の $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ の 偏りの平均値

Table 5 The average bias values of $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ in 1990.

θ	$BY(\theta)$	$ER(\theta)$	$B(\theta)$
-2	0.0936	0.1299	3.1833
-1	0.0949	0.1352	2.9627
0	0.0840	0.1246	2.5162

表 6 1980 年度の人口パラメーター θ の $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ の 偏りの平均値

Table 6 The average bias values of $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ in 1980.

θ	$BY(\theta)$	$ER(\theta)$	$B(\theta)$
-12	0.1460	0.1678	6.6527
-11	0.1402	0.1631	6.3381
-10	0.1339	0.1578	6.0002
-9	0.1384	0.1683	5.8292
-8	0.1317	0.1629	5.4765
-7	0.1241	0.1562	5.0784
-6	0.1162	0.1492	4.7009
-5	0.1077	0.1413	4.2686
4	0.1096	0.1487	4.0551

の値が減少していないところがある。たとえば、2010 年度 人口に対し、 $\theta=-7$ 、および $\theta=-1$ で $BY(\theta)$ と $ER(\theta)$ の値が増加している(表 3 および図 4、図 5、図 6 を参 照)。同じような現象は他の年度においても、多数発生し ている。2000 年度の $\theta=-1$ (表 4)、1990 年度の $\theta=-1$ (表 5)、1980 年度の $\theta=-10$ と $\theta=-5$ (表 6)、1970 年

表 7 1970 年度の人口パラメーター θ の $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ の 偏りの平均値

Table 7 The average bias values of $BY(\theta), ER(\theta), B(\theta)$ in 1970

θ	$BY(\theta)$	$ER(\theta)$	$B(\theta)$
-8	0.1466	0.1693	5.6513
-7	0.1380	0.1622	5.2471
-6	0.1292	0.1547	4.8559
-5	0.1195	0.1463	4.4123
-4	0.1216	0.1531	4.1777
-3	0.1108	0.1435	3.7209
-2	0.0990	0.1325	3.2385
-1	0.0877	0.1219	2.7805
0	0.0882	0.1259	2.5392
1	0.0282	0.0386	0.8753
2	0.0016	0.0000	0.0678

表 8 1960 年度の人口パラメーター θ の $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ の 偏りの平均値

Table 8 The average bias values of $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ in 1960.

θ	$BY(\theta)$	$ER(\theta)$	$B(\theta)$
-10	0.15269	0.17747	6.28393
-9	0.14598	0.17180	5.93699
-8	0.14657	0.16935	5.64612
-7	0.13802	0.16225	5.24185
-6	0.12919	0.15473	4.85079

度の $\theta = -4$ と $\theta = 0$ (表 7), 1960 年度の $\theta = -8$ (表 8). 以上のことから,尺度 $BY(\theta)$, $ER(\theta)$ は尺度 $B(\theta)$ に比べ,理論的にあまりよくない.

6. おわりに

3つの尺度を用いて、実際の 60 年間のアメリカの人口を利用して緩和除数方式の偏りの平均を測ってみた。その結果、(i) あらゆる年度で、 $\theta=2$ の Webster 方式の偏りの平均が最小となった。このことは過去の研究 [1], [3], [21] の結果に一致する。さらに、パラメータが増加すると、緩和除数方式の偏りは徐々に小州有利から大州有利に変化する性質を持つが、このことは、3つの尺度 $BY(\theta)$, $ER(\theta)$, $B(\theta)$ がすべて、狭義減少関数となることを要求している。しかしながら、今回のシミュレーションの結果では Balinski らの尺度 $BY(\theta)$ と Ernst の尺度 $ER(\theta)$ ではそうはならなかった。すなわち、我々の尺度 $B(\theta)$ は尺度 $BY(\theta)$ と $ER(\theta)$ より優れている。

参考文献

- Balinski, M.L. and Young, H.P.: Fair Representation, Yale University Press (1982).
- [2] Balinski, M.L. and Young, H.P.: The Quota Method of Apportionment, *The American Mathematical Monthly*, Vol.82, No.7, pp.701–730 (1975).

- [3] Balinski, M.L. and Young, H.P.: The Webster Method of Apportionment, Applied Mathematical Sciences, Vol.77, No.1, pp.1–4 (1980).
- [4] Balinski, M.L. and Young, H.P.: Fairness in Apportionment, Johns Hopkins University and The Brookings Institution (2004).
- [5] Ernst, L.R.: Appointment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges, *Management Science*, Vol.40, No.10, pp.1207–1227 (1994).
- [6] ハンスックウォラパーニット・スマッチャヤー,一森哲男:議席配分方式の偏りを測る尺度の提案,日本応用数理学会 2014 年度年会 (2014).
- [7] Harnsukworapanich, S. and Ichimori, T.: Bias Analysis of Apportionment Methods by A Computer Simulation, 20th ISSAT International Conference, pp.289–292 (2014).
- [8] Ichimori, T.: New Apportionment Methods and Their Quota Property, JSIAM Letters, Vol.2, pp.33–36 (2010).
- [9] 一森哲男:連続平等性と対称性の観点からみた議員定数 配分方法と大域的最適化問題,日本応用数理学会論文誌, Vol.21, No.1, pp.103-124 (2011).
- [10] Ichimori, T.: On Rounding off Quotas to the Nearest integers in the Problem of Apportionment, JSIAM Letters, Vol.3, pp.21–24 (2011).
- [11] Ichimori, T.: Relaxed Divisor Methods and Their Seat Biases, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.55, No.1, pp.63–72 (2012).
- [12] 一森哲男:レニーのエントロピーを最大にする議席配分 方式について,日本応用数理学会論文誌,Vol.22,No.3, pp.81-96 (2012).
- [13] Ichimori, T.: A Note on Relaxed Divisor Methods, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.55, pp.225–234 (2012).
- [14] 一森哲男:分布間ダイバージェンスと議席配分方式の関係について,情報処理学会論文誌, Vol.54, No.8, pp.1988–1995 (2013).
- [15] 一森哲男:緩和除数方式の比例性と歴史上の5方式との 関係について,日本オペレーションズ・リサーチ学会和 論文誌,Vol.56,pp.1-14 (2013).
- [16] 一森哲男:緩和除数方式の偏りについて,日本応用数理 学会論文誌,Vol.23,No.4,pp.601-617 (2013).
- [17] 一森哲男:議員定数配分問題の離散最適化による解法について,日本応用数理学会論文誌,Vol.23,No.1,pp.15-35 (2013).
- [18] 一森哲男:ダイバージェンスによる議員定数配分方式の 偏りについて、日本オペレーションズ・リサーチ学会和 文論文誌, Vol.58, pp.42-55 (2015).
- [19] Marshall, A.W., Olkin, I. and Pukelsheim, F.: A Majorization Comparison of Apportionment Methods in Proportional Representation, Social Choice and Welfare, Vol.19, pp.885–900 (2002).
- [20] Stolarsky, K.B.: Generalizations of the Logarithmic Mean, Mathematics Magazine, Vol.48, No.2, pp.87–92 (1975).
- [21] Schuster, K., Pukelsheim, F., Drton, M. and Draper, N.R.: Seat Biases of Apportionment Methods for Proportional Representation, *Electoral Studies*, Vol.22, pp.651–676 (2003).
- [22] Schwingenschlögl, U.: Seat Biases of Apportionment Methods Under General Distributional Assumtions, Applied Mathematics, Vol.21, pp.1–3 (2008).
- [23] Theil, H. and Schrage, L.: The Apportionment Problem and the European Parliament, European Economic Reviews, Vol.9, No.3, pp.247–263 (1977).
- [24] Theil, H.: The Desired Political Entropy, American Po-

litical Science Review, Vol.63, No.2, pp.521–525 (1969).



ハンスックウォラパーニット スマッチャヤー (正会員)

2013年大阪工業大学大学院工学研究 科博士前期課程修了. 2016年3月大 阪工業大学大学院情報科学研究科博士 後期課程修了. 博士 (情報学).



一森 哲男 (正会員)

昭和57年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了.同年広島大学工学部助手.昭和60年より大阪工業大学工学部専任講師.昭和63年より大阪工業大学工学部助教授.平成8年より大阪工業大学情報科学部

教授.システムの最適化に関する研究に従事.工学博士. 昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究 奨励賞受賞.平成 25 年日本応用数理学会論文賞受賞.日 本オペレーションズ・リサーチ学会,日本応用数理学会各 会員.