Vol. 40 No. SIG 9 (TOM 2)　　情報処理学会論文誌　　Dec. 1999

整列問題のネットワークフローモデルによる解釈とその拡張

萩原　斉[†]　中森　眞理雄[††]

線形計画問題を，情報科学の基本的問題の記述に適用した事例報告である．具体的には，整列問題を線形計画問題として記述した例を示し，変数や双対問題の意味のさまざまな角度からの解釈を試みる．さらに，線形計画問題として記述された整列問題を割り当て問題として記述し，それを実現する回路を示す．この回路が $O(n\log_2 n)$ 個の素子で実現できることを示す．

次に，この手法を一般に困難とされている問題に拡張する方法を試みる．具体的には，グラフにおいてクリークが存在するか否かを判定する問題を取り上げ，双線形計画問題として記述した例を示す．

Interpretation of Sorting with Network-flow Models and Extensions

HITOSHI HAGIWARA [†] and MARIO NAKAMORI[††]

In the present paper, we show examples of applying linear programming problem to basic problems of computer sience. For instance, it is shown that the problem of sorting data is described as a linear progamming problem, and the variables and the constraints of the primal and the dual problems are interpreted from various points of view. Further, the sort problem is described as an assignment problem and an electric circuit. This circuit is made of $O(n\log_2 n)$ electrical elements.

We extend this method to a problem that is generally regarded as hard problems. As an example, the clique problem is described as a bilinear programming problem.

1. まえがき

計算機科学においては，比較的能率の良いアルゴリズムが存在するか否かによる問題の複雑さの分類が知られている[1),2)]．一般に，問題の規模 n に対して計算時間が $O(n^p)$（p は定数）の決定性アルゴリズムが存在する問題はクラスPと呼ばれ，計算時間が $O(n^p)$ の非決定性アルゴリズムが存在する問題はクラスNPと呼ばれる．クラスPには，整列（ソート）やグラフにおける最短路問題，最大流問題，最小費用流問題などがあり，いずれも現実的な高速アルゴリズムが存在する．また，線形計画問題にも計算時間が $O(n^p)$ の決定性アルゴリズム[3)]が知られているが，その時間のオーダは必ずしも低いものではない．

グラフにおける最短路問題，最大流問題，最小費用流問題などは線形計画問題として解釈することができる[4),5)]．経験によれば，高速アルゴリズムが存在する問題の多くは線形計画問題として記述される．これは，線形計画問題とその双対問題[6)~8)]が，可能解の改善方向を示唆する強力な尺度を提供しているためと考えられる．

筆者らは，整列問題[9)]も線形計画問題として解釈することが可能ではないかと予想し，いろいろな記述を試みた．その結果，整列やそれに関連するいくつかの問題を線形計画問題やネットワークフロー問題として記述したり，変数の意味をさまざまな観点から解釈したりすることができたので，それらを事例として報告する．

本論文では，次の問題を線形計画問題として記述した例を示す．

- 多数の数値の中から最大値や最小値を求める問題
- 数値の大きい（小さい）方から k 個の和を求める問題
- 数値の大きい（小さい）方から k 番目のものを求める問題
- 数値を整列する問題

特に，整列問題に対しては，数値を大小半分ずつに分割する問題を最小費用流問題として記述する例を示し，それを繰り返し適用することにより，$O(n\log_2 n)$ 個の変数を用いて n 個の数値を整列する線形計画問題を示す．この結果は，整列問題に対する最良のアルゴ

† 東京農工大学（現. 株式会社 構造計画研究所）
Tokyo A&T University
(KOZO KEIKAKU ENGINEERING Inc.)
†† 東京農工大学
Tokyo A&T University

リズムの手間が $O(n \log_2 n)$ であることと比較すると，興味深い．

クラス NP の問題を線形計画問題として記述する方法は知られていない（仮にそれが可能であるとするとP=NP となることから，恐らく不可能であると予想されている）．本論文では，将来への課題として，クラス NP の問題であるグラフのクリークを求める問題を，双線形計画問題として記述した例を示す．

2. k 番目の値を求める問題

本章では，与えられた n 種類の正の数値 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ $(a_i \neq a_j;\ i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して，k 番目に大きな（小さな）値を求める問題を線形計画問題として記述した例を示す（2.3）．その準備として，大きな（小さな）方から k 番目のものの和を求める問題を線形計画問題として記述した例を示す（2.2）．この特別な場合として最大値（最小値）を求める問題（2.1）があるが，この問題の線形計画問題としての記述は周知のことがらである．

2.1 最大値および最小値 – 事例 1 –

周知のとおり，A の中の最大値を求める問題は線形計画問題として次のように記述することができる．

問題 $\pi 1$

maximize

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

次に，問題 $\pi 1$ の双対問題を示す．

問題 $\delta 1$

minimize

$$w = y,$$

subject to

$$y \geq a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

この問題 $\delta 1$ は，「A のいずれに対してもそれ以上である値（つまり A の上界）の中で最小のもの」という意味であり，A が有限集合であることから，A の上界の最小値と A の最大値は一致する．

問題 $\pi 1$ と問題 $\delta 1$ は，互いに双対であるから，両者の最適解に対する目的関数の値は一致する．また，最適解 $\hat{x}$ に対する問題 $\pi 1$ の制約条件は

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i = 1$$

が成り立っている．このことと，問題 $\delta 1$ の最適解 $\hat{y} = a_{i_0}$ が 0 でないこととは，線形計画問題の相補性条件 (complementary slackness condition) からも裏付けられる．

同様に，A の中の最小値を求める問題とその双対問題を線形計画問題として記述した例を次に示す．

問題 $\pi 2$

minimize

$$t = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = 1,$$

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

問題 $\delta 2$

maximize

$$s = v,$$

subject to

$$v \leq a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

2.2 大きい方および小さい方から k 個の和 – 事例 2 –

A の中の大きい方から k 個の和を求める問題を，線形計画問題として記述した例を次に示す．

問題 $\pi 3$

maximize

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k,$$

$$x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

仮に大きい方から k 個を $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k}$ とすると，解 $\hat{x}$

$$\hat{x}_i = 1,\ \hat{x}_{\bar{i}} = 0\ (i \in I, \bar{i} \notin I; I = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\})$$

は可能解であり，別の解 $\tilde{x}$ に対して

$$\begin{aligned} &\sum_i a_i \hat{x}_i - \sum_i a_i \tilde{x}_i \\ &= a_{i_1}(1 - \tilde{x}_{i_1}) + a_{i_2}(1 - \tilde{x}_{i_2}) + \cdots \\ &\quad + a_{i_k}(1 - \tilde{x}_{i_k}) - \sum_{i \notin I} a_i \tilde{x}_i \end{aligned}$$

$$\geq a_{i_1}(1-\tilde{x}_{i_1})+a_{i_2}(1-\tilde{x}_{i_2})+\cdots$$
$$+a_{i_k}(1-\tilde{x}_{i_k})-\max_{i\notin I} a_i \sum_{i\notin I}\tilde{x}_i$$
$$\geq \min(a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k})\cdot(k-\tilde{x}_{i_1}-\tilde{x}_{i_2}-\cdots-\tilde{x}_{i_k})$$
$$-\max_{i\notin I} a_i(k-\tilde{x}_{i_1}-\tilde{x}_{i_2}-\cdots-\tilde{x}_{i_k})\geq 0$$

となることから，$\hat{x}$ が最適解であることが証明される．

問題 $\pi 3$ の双対問題は次の通りである．

問題 $\delta 3$

minimize
$$w = ky_0+\sum_{i=1}^{n} y_i,$$
subject to
$$y_0+y_i \geq a_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$y_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

問題 $\delta 3$ の最適解において，y_0 は大きい方から k 番目の値 a_{i_k} に対して $y_0 \leq a_{i_k}$ となる．また，a_{i_k} より大きい a_i に対応する y_i は $y_i = a_i - y_0$ となり，a_{i_k} より小さい a_i に対応する y_i は $y_i = 0$ となる．

$k=1$ の場合は問題 $\pi 1$ や問題 $\delta 1$ と同じである筈だが，上記の記述は少し異なっている（問題 $\pi 1$ では条件 “$x_i \leq 1\ (i=1,2,\cdots,n)$” がない）．これは，問題 $\pi 1$ では
$$\sum_i x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$
であることから，
$$x_i \leq 1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$
が自明に成り立つためである．$x_i \leq 1\ (i=1,2,\cdots,n)$ を問題 $\pi 1$ に加えて形式的に双対問題を作ると

問題 $\delta' 1$

minimize
$$w = y+\sum_i u_i,$$
subject to
$$y+u_i \geq a_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$u_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

となる．この問題 $\delta' 1$ において，解 $\hat{y}$
$$\hat{y}=a_{i_0},\ \hat{u}_i = 0\ (i=1,2,\cdots,n)$$
は最適解である．各 $\hat{u}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ の値が 0 であることは，問題 $\pi 1$ において $x_i \leq 1\ (i=1,2,\cdots,n)$ が冗長であることを意味する．

同様に，A の中の小さい方から k 個の和を求める問題とその双対問題を線形計画問題として記述した例を次に示す．

問題 $\pi 4$

minimize
$$t = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i,$$
subject to
$$\sum_{i=1}^{n} u_i = k,$$
$$u_i \leq 1 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$u_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

問題 $\delta 4$

maximize
$$s = kv_0-\sum_{i=1}^{n} v_i,$$
subject to
$$v_0 - v_i \leq a_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$v_i \geq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

問題 $\pi 4$ の最適解においては，問題 $\pi 3$ と同様に，a_i が小さい方から k 番目以内のとき $u_i = 1$ となり，a_i がそれ以外のときは $u_i = 0$ となる．また，最適解における t の値は A の中の小さい方から k 個の和に等しい．

一方，問題 $\delta 4$ の最適解においては，問題 $\delta 3$ と同様に，v_0 は小さい方から k 番目の値 a_{i_k} に対して $v_0 \geq a_{i_k}$ となる．また，a_{i_k} より大きい a_i に対応する v_i は $v_i = 0$ となり，a_{i_k} より小さい a_i に対応する v_i は $v_i = v_0 - a_i$ となる．

2.3 大きい方から k 番目のもの – 事例 3 –

A の中の大きい方から k 番目の値は，大きい方から k 個と小さい方から $n-k+1$ 個の両方に含まれるので，両者の和から全体の和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ を減じたものに等しい．そこで，最大化問題である問題 $\pi 3$ と問題 $\delta 4$ を組み合わせることにより，大きい方から k 番目の値を求める問題を線形計画問題として次のように記述することができる（問題 $\pi 3$ と問題 $\pi 4$ を組み合わせないのは，前者が最大化問題，後者が最小化問題であるためである）．

問題 $\pi 5$

maximize
$$h = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + (n-k+1)v_0 - \sum_{i=1}^{n} v_i$$
$$-\sum_{i=1}^{n} a_i,$$
subject to
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = k,$$
$$x_i \leq 1 \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$
$v_0 - v_i \leq a_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$
$v_i \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n).$

問題 $\pi5$ の双対問題，小さい方から k 番目のものを求める主問題およびその双対問題は，この問題 $\pi5$ と同様に，前述の問題 $\pi3$, $\pi4$, $\delta3$, $\delta4$ を組み合わせた問題として記述することができる．

3. 整列と線形計画モデル

A を大きい方から順に並べる問題（整列あるいはソート[2)]）およびその双対問題を特殊な線形計画問題である割り当て問題として記述してみる．

3.1 準備 – 割り当て問題 –

割り当て問題とは，n 人の従業員と n 個の仕事があり，従業員 i に仕事 j を割り当てるときのメリットが c_{ij} であるとき，全体のメリットの和が最大になるように従業員と仕事を 1 対 1 に対応づける問題である[4)]．

この問題は，線形計画問題として次のように記述できることが知られている[8)]．

問題 A0

maximize

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

問題 A0 の制約条件では，変数 x_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ は特に"離散値をとる"と断っていないが，問題 A0 の最適解において変数 x_{ij} の値は 0 または 1 となることが知られている[8)]（特別な場合として最適解が複数ある場合，離散値をとらない最適解が現れることがあるが，その場合も離散値の最適解が必ず存在する）．

問題 A0 の最適解 x_{ij} の意味は，次のとおりである．

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{従業員 } i \text{ に仕事 } j \text{ を割り当てる.} \\ 0 & \text{従業員 } i \text{ に仕事 } j \text{ を割り当てない.} \end{cases}$$

3.2 割り当て問題として記述した整列 – 事例 4 –

割り当て問題の考え方を，図 1 のように整列に応用する

いま，数値 a_i を従業員 i，順位 j を仕事 j と考え，従業員 i に仕事 j を割り当てる（数値 a_i が大きい方から j 番目の値である）ときの"メリット"を ja_i と考えると，A を大きい方から順に並べる問題およびその双対問題を，次に示す線形計画問題として記述できる．

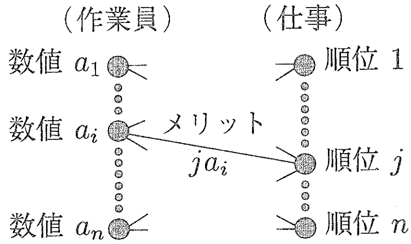


図 1 整列問題の割り当て問題としての解釈
Fig. 1 The interpretation sort problem as assign problem

問題 $\pi6$

minimize

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j a_i x_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

問題 $\delta6$

maximize

$$w = \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{j=1}^{n} q_i,$$

subject to

$$q_j + y_i \leq j a_i \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

変数の個数は，問題 $\pi6$ では n^2 個，問題 $\delta6$ では $2n$ 個である．なお，問題 $\pi6$ の最適解における x_{ij} が離散値 0 または 1 をとることは，一般の割り当て問題から自然に導かれる．

これに対して，A を小さい方から順に並べる問題およびその双対問題を線形計画問題として記述した例は次のとおりになる．

問題 $\pi7$

maximize

$$t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j a_i u_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$
$$u_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

問題 $\delta 7$

minimize
$$s = \sum_{i=1}^{n} v_i + \sum_{j=1}^{n} p_j,$$
subject to
$$p_j + v_i \geq j a_i \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

変数の個数は，大きい方から順に並べる問題と同様に，問題 $\pi 7$ では n^2 個，問題 $\delta 7$ では $2n$ 個である．

問題 $\pi 6$ (問題 $\pi 7$) において変数 x_{ij} (変数 u_{ij}) は，a_i が A の中で大きい（小さい）方から j 番目のときに 1 でその他のときに 0 になる．問題 $\pi 6$ (問題 $\pi 7$) が整列問題であることは，一般に $g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq g_n$ および $h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n$ が成り立つとき，$1, 2, \cdots, n$ のいかなる順列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ に対しても，
$$\begin{aligned} & g_1 h_n + g_2 h_{n-1} + \cdots + g_n h_1 \\ \leq\ & g_1 h_{p_1} + g_2 h_{p_2} + \cdots + g_n h_{p_n} \\ \leq\ & g_1 h_1 + g_2 h_2 + \cdots + g_n h_n \end{aligned}$$
であることから分かる．

すなわち，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を大きい方から並べた結果，$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \cdots \geq a_{i_n}$ となったとすると，
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$
$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$
をみたす任意の x_{ij}（問題 $\pi 6$，問題 $\pi 7$ の最適解は離散値をとるので，$x_{ij} = 0$ or 1 として良い）に対して
$$\begin{aligned} & 1a_{i_1} + 2a_{i_2} + \cdots + na_{i_n} \\ \leq & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j a_i x_{ij} \\ = & a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n \\ \leq & n a_{i_1} + (n-1) a_{i_2} + \cdots + 1 a_{i_n} \end{aligned}$$
が成立する．

このとき，$x_{ip_i} = 1$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ となり，この不等式の最左辺が問題 $\pi 6$ の最適解に，最右辺が問題 $\pi 7$ の最適解に対応する．

3.3 割り当て問題としての整列とネットワークフローモデル – 事例 5 –

本節での用語と記号は文献 4) と同じものを用いる．

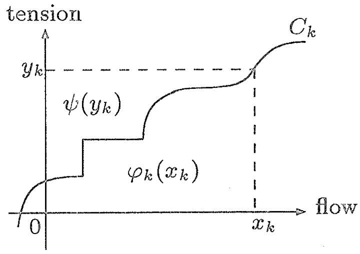


図 2 辺の特性
Fig. 2 Edge characteristic

ネットワークの各辺 k に対応する量 x_k が
$$\sum_{k=1}^{e} \overline{\overline{D}}_{ik}\, x_k = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, v) \tag{1}$$
を満たすとき，ベクトル $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ を流れ (flow) という．ただし，行列 $\overline{\overline{D}}_{ik}$ は接続行列 (incidence matrix)
$$\overline{\overline{D}}_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{辺 } k \text{ の始点が点 } i \text{ のとき} \\ -1 & \text{辺 } k \text{ の終点が点 } i \text{ のとき} \\ 0 & \text{辺 } k \text{ が点 } i \text{ に接続しないとき,} \\ & \text{または辺 } k \text{ がセルフループのとき} \end{cases}$$
である．

ネットワークの各辺 k に対応する量 y_k が，各点 i に対応する量 z_i により，
$$y_k = \sum_{i=1}^{v} \overline{\overline{D}}_{ik}\, z_i \quad (k = 1, 2, \cdots, e) \tag{2}$$
に表されるとき，ベクトル $(y_1, y_2, \cdots, y_e)$ を圧 (tension) という．流れと圧は，電気回路における電流と電圧を一般化した概念で，式 (1) はキルヒホッフの電流法則，式 (2) はキルヒホッフの電圧法則に相当する．

ネットワークの各辺において，流れと圧の関係が図 2 の曲線 C_k のように定められているとする．この曲線 C_k を辺 k の特性 (characteristic) という．

ここで，圧は流れに対して単調非減少関数であるとする．図 2 は，電気回路における（非線形な）抵抗の概念を一般化したものである．なお，伝統的な電気回路の理論と異なり，ネットワークフロー理論では，流れを横軸に，圧を縦軸にとる習慣がある．

辺 k において，圧を流れで積分したものを $\varphi_k(x_k)$，流れを圧で積分したものを $\psi_k(y_k)$ と記すことにする（図 2）．

このとき，辺 k において，流れ x_k と圧 y_k が特性 C_k を満たす（すなわち，$(x_k, y_k) \in C_k$）ならば，
$$\varphi_k(x_k) + \psi_k(y_k) = x_k y_k$$

が成り立つ．

以上の準備のもとに，次の3つの問題を考える．

PI

ネットワークにおける流れ $(x_1, x_2, \cdots, x_e)$ で，関数

$$\Phi = \sum_{k=1}^{e} \varphi_k(x_k)$$

を最小にするものを求めよ．

PII

ネットワークにおける圧 $(y_1, y_2, \cdots, y_e)$ で，関数

$$\Psi = \sum_{k=1}^{e} \psi_k(y_k)$$

を最小にするものを求めよ．

PIII

ネットワークにおける流れ $(x_1, x_2, \cdots, x_e)$ と圧 $(y_1, y_2, \cdots, y_e)$ で，各辺 k において x_k と y_k が特性 C_k を満たすのもを求めよ．

ネットワークフローの理論によれば，これらの3つの問題 PI, PII, PIII は同等である[4]．

ここで，一般化された定電流源，定電圧源，ダイオードを図3により定義する．

ネットワークフローの理論によれば，割り当て問題は図4のような定電圧源，定電流源，ダイオードからなる電気回路の解を求めることによって解くことができる（各 x_{ij} は電流）．

図1の割り当て問題では，数値 a_i（従業員 i）と順位 j（仕事 j）を結ぶ辺において，

$$0 \leq x_{ij} \leq 1$$

が成り立っていなければならず，数値 a_i に順位 j が割り当てられたときのメリットが ja_i であるので，ネットワークフロー理論で割り当て問題を扱うために図5のような特性を持つ辺を考えることになる．

この特性は，定電流源，定電圧源，ダイオードを図6のように組み合わせることによって実現される．

近年，ニューラルネットを用いて組合せ最適化問題を解く試みが多数報告されているが，上記のネットワークフロー理論では，本来の問題の目的関数が厳密な意味で最小化されるので，ニューラルネットの手法とは根本的に異なる手法である．

3.4 整列問題のネットワークフローモデル－事例6－

問題 $\pi6$（問題 $\pi7$）では，整列問題を n^2 個の変数 x_{ij} $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を用いて割り当て問題として定式化した．本節では，整列問題を問題 $\pi6$ よりも少ない個数の変数を用いた線形計画問題として記述して

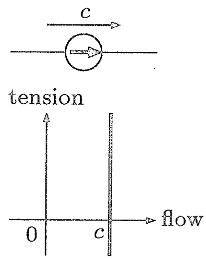


図 3-a 一般化された定電流源
Fig. 3-a Generalized current source

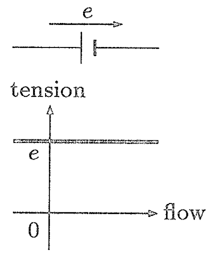


図 3-b 一般化された定電圧源
Fig. 3-b Generalized voltage source

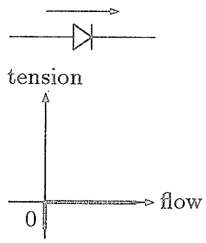


図 3-c 一般化されたダイオード
Fig. 3-c Generalized diode

図3 一般化された基本構成要素
Fig. 3 Elements of generalized electric circuit

みる．

3.4.1 準備—最小費用流問題—

最小費用流問題（輸送問題）とは，ある品種を m 箇所の生産地から n 箇所の消費地へ最小費用で運ぶための輸送量を決定する問題である[5),8)]．生産地 i では s_i だけ生産され，消費地 j では d_j だけ消費される．ここで，

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

を仮定しておく．

生産地 i から消費地 j へ品物を1単位運ぶのに要する費用を e_{ij} とする．以上，$s_i(i = 1, 2, \cdots, m)$, $d_j(j = 1, 2, \cdots, n)$, $e_{ij}(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ はデータとして与えら

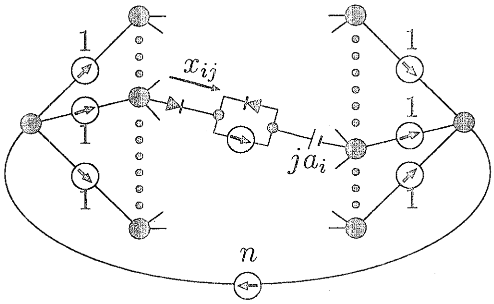


図 4 割り当て（整列）問題を解く回路
Fig. 4 The circuit to solve assign(sort) problems

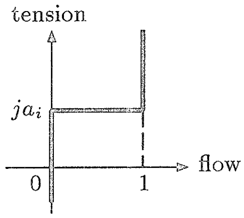


図 5 割り当て問題における各辺の特性
Fig. 5 Edge characteristic in an assignment problem

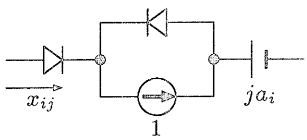


図 6 割り当て問題における各辺の構成
Fig. 6 Conposition of an edge for an assignment problem

れているとする．

生産地 i から消費地 j へ運ぶ量を x_{ij} とすると，最小費用流問題は次のとおりに記述される．

問題 M1

minimize
$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} e_{ij}x_{ij},$$
subject to
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n).$$

この最小費用流問題において，$m = n$, $s_i = 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$, $d_j = 1 (j = 1, 2, \cdots, n)$ とすれば，割り当て問題になる．ただし，従業員 i を仕事 j に割り当てるときのメリット c_{ij} に対して $M - c_{ij}$ を e_{ij} とする（上記では，最小費用流問題は最小化問題，割り当て問題は最大化問題として記述されているため）．なお，M は十分大きな数である．

3.4.2 整列問題の分割

以上の考察を整列に適用してみる．そのために，n 箇所の生産地 $1, 2, \cdots, n$ と 2 箇所の消費地 1, 2 の最小費用流問題を考える．各生産地における生産量は 1，各消費地における消費量は $\frac{n}{2}$ とする（n が奇数の場合は，一方の消費量を $\frac{n+1}{2}$，他方の消費量を $\frac{n-1}{2}$ とする）．

また，単位輸送量あたりの費用は生産地 i から消費地 1 へは 0，生産地 i から消費地 2 へは a_i とする．いま，

$c_1 = 0,\ c_2 = 1$

と定めるなら，生産地 i から消費地 j への単位輸送量あたりの費用は一般に $c_j a_i$ と書ける．以上の最小費用流問題は，次のとおりに記述できる．

問題 $\pi 8(1)$

minimize
$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} c_j a_i x_{ij},$$
subject to
$$\sum_{j=1}^{2} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq n/2 \quad (j = 1, 2),$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2).$$

問題 $\pi 8(1)$ の最適解 $\hat{x}_{ij}$ は，数値の集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を大きい方半分と小さい方半分に分ける．すなわち，a_i が大きい方から $\frac{n}{2}$ 番目（n が奇数の場合は $\frac{n+1}{2}$ 番目）以内にあるならば，

$\hat{x}_{i1} = 1,\ \hat{x}_{i2} = 0$

であり，さもなければ

$\hat{x}_{i1} = 0,\ \hat{x}_{i2} = 1$

となる．

以上により，A を大小半分に分ける問題を変数の個数が $O(n)$ の線形計画問題（この場合，最小費用流問題）として記述できることが示された．この最小費用流問題のコストは図 7 のとおりである．これに必要な変数の個数は $2n$，グラフの辺の本数は $2n$，グラフの点の個数は $n + 2$ である．これを第 1 段階の分割とよぶことにする．

$a_1, \cdots, a_n$ のうち大きい方半分 $a'_1, \cdots, a'_{\frac{n}{2}}$ と小さい方半分 $a'_{\frac{n}{2}+1}, \cdots, a'_n$ をそれぞれ大小半分にすることも同様の方法でできる．このとき，それぞれに必要な変数の個数は n，グラフの辺の本数は n，グラフの

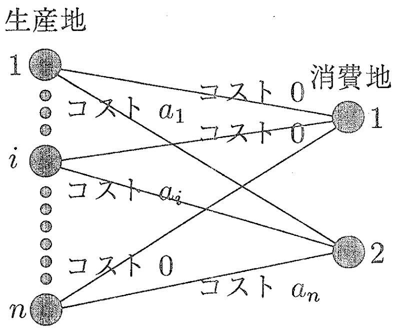


図 7 数値を大きい方と小さい方に分ける最小費用流問題におけるコスト（第 1 段階）
Fig. 7 Cost in the minimum cost flow problem of dividing numbers into larger and smaller classes(The 1st stage)

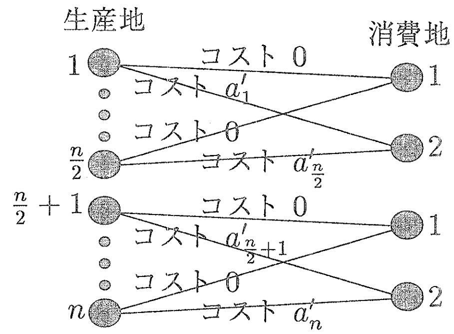


図 8 数値を大きい方と小さい方に分ける最小費用流問題におけるコスト（第 2 段階）
Fig. 8 Cost in the minimum cost flow problem of dividing numbers into larger and smaller classes(The 2nd stage)

点の個数は $\frac{n}{2}+2$ である（n が奇数の場合は，一方を $\frac{n+1}{2}$，他方を $\frac{n-1}{2}$ とする）．これを第 2 段階の分割とよぶことにする．第 2 段階の分割は，次のように記述できる．

問題 $\pi 8(2)$

minimize

$$z = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \sum_{j=1}^{2} c_j a'_i x'_{ij} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \sum_{j=1}^{2} c_j a'_i x'_{ij},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{2} x'_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} x'_{ij} \leq n/4 \quad (j = 1, 2),$$

$$\sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} x'_{ij} \leq n/4 \quad (j = 1, 2),$$

$$x'_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2).$$

第 2 段階の分割は，$a'_1, \cdots, a'_{\frac{n}{2}}$ に対する部分と $a'_{\frac{n}{2}+1}, \cdots, a'_n$ に対する部分からなるが，合わせて，変数の個数は $2n$，グラフの辺の本数は $2n$，グラフの点の個数は $n+4$ である（図 8）．第 1 段階と第 2 段階の分割を続けて実行することにより，$a_1, \cdots, a_n$ は大きい $\frac{n}{4}$ 個のグループ，2 番目に大きい $\frac{n}{4}$ 個のグループ，3 番目に大きい $\frac{n}{4}$ 個のグループ，4 番目に大きい $\frac{n}{4}$ 個のグループに分けられる（n が 4 の倍数でない場合の処理は，問題 $\pi 8(1)$ と同様）．

このとき，第 1 段階から第 2 段階へデータを受け渡す方法，すなわち問題 $\pi 8(1)$ の結果に応じて，図 8 のコストを作り出す方法が問題になる．これをネットワークフロー問題として記述する方法はないので，この部分は人手で行うこととする．

このように，$a_1, \cdots, a_n$ を大小半分に分割することを，分割結果が 1 個になるまで行うことにする．この段数は $\log_2 n$ である．各段階での変数の個数は $2n$，グラフの辺の本数は $2n$，グラフの点の個数は段ごとに $n+2, n+4, n+8, \cdots, 2n$ となるので，全体での変数の個数は $2n \log_2 n$，グラフの辺の本数は $2n \log_2 n$，グラフの点の個数は $n \log_2 n + 2n$ となる．このことを，n 個の数値 $a_1, \cdots, a_n$ を整列する最良のアルゴリズムの計算複雑度が $O(n \log_2 n)$ であることと比較することは興味深い．

4. 今後の課題 – 双線形計画問題への発展 –

以上により，整列を線形計画問題として記述できることが示された．この手法を NP 問題に拡張することを今後の課題としたいと思う．一例として，クリーク問題（大きさ K の完全部分グラフが存在するか否かを判定する問題）を双線形計画問題として記述する例を試みる．

グラフ G の補グラフ $\bar{G} = (V, \bar{E})$ を次に示す接続行列 $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{g}_{ij})$ $(i = 1, 2, \cdots, v;\ j = 1, 2, \cdots, \bar{e})$ により表現する．ただし，$v = |V|, \bar{e} = |\bar{E}|$ とする．

$$\bar{g}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i \text{ が枝 } j \text{ の端点であるとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

大きさ K のクリーク存在判定問題は双線形計画問題として次のように記述することができる．

問題 $\pi 9$

minimize

$$\varphi = \sum_{i=1}^{v} \{x_i(1-u_i) + (1-x_i)u_i\},$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{v} x_i = K, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{v} \bar{g}_{ij} x_i \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, \bar{e}), \tag{4}$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, v),$$

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, v).$$

問題 $\pi 9$ の最適解において $\varphi = 0$ が成立するとき，連続変数 x_i $(i = 1, 2, \cdots, v)$ は次のような整数値をとり，与えられたグラフ G に大きさ K のクリークが存在する．なお，変数の個数は $2v$ 個である．

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i \text{ がクリークに含まれるとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

ただし，問題 $\pi 9$ の最適解を求める効率の良いアルゴリズムは知られていない．

5. まとめ

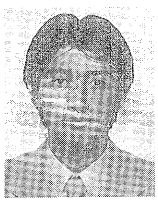
数値の集合が与えられたときに、最大値や最小値を求める問題，大きい（小さい）方から k 個の和を求める問題，大きい（小さい）方から k 番目のものを求める問題，数値を整列する問題を，線形計画問題として記述した例を示した．特に，整列問題に対しては，数値を大小半分ずつに分割する問題を最小費用流問題（輸送問題）として記述する例を示し，それを繰り返し適用することにより，$O(n \log_2 n)$ 個の変数を用いて n 個の数値を整列する線形計画問題を示した．整列問題に対する線形計画問題は最小費用流問題として記述されているので，それを実現する電気回路を示した．アナログ計算機は精度の面でディジタル計算機に劣るため，今日では計測機器以外にはほとんど用いられていないが，本論文に示した最小費用流問題では，変数の値は自然に離散値になるので，精度の問題はない．したがって，整列問題をアナログ的に解く回路（ハードウェア）を作ることが，原理的には可能である．このハードウェアにおいては，素子数を小さくすることが重要であり，本論文ではその観点から回路の素子数やその基礎となる最小費用流問題の変数の個数を論じた．しかし，入力されたデータから辺の特性を自動的に作り出す方法は今後の研究課題である．

整列問題を線形計画問題として記述する方法の拡張としてグラフにおけるクリークを求める問題を，双線形計画問題として記述してみた．一般に，双線形計画問題を解くのは容易ではないとされている．本論文の方法で記述された双線形計画問題を解くアルゴリズムも今後の課題である．計算幾何学に本研究を応用することも検討したいと考えている．

参考文献

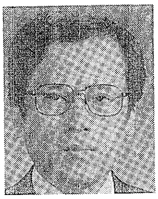
1) E. Börger, *Computability, Complexity, Logic*, North-Holland, (1989).
2) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, (1974).
3) N. Karmarkar, "A new polynomial-time algorithm for linear programming," *Algorithmica*, 4, 374-395 ,(1984).
4) M. Iri, *Network Flow, Transportation, and Scheduling – Theory and Algorithms*, Academic Press, (1969).
5) L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, (1962).
6) 茨木俊秀, 福島雅夫, "最適化の手法," 共立出版, (1996).
7) V. Chvátal, *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, (1983).
8) G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, (1963).
9) D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol.3 (Sorting and Searching), Addison-Wesley, (1973).

(平成 10 年 9 月 11 日受付　　　　　)
(平成 11 年 2 月 10 日再受付 (第 1 回))
(平成 11 年 6 月　5 日再受付 (第 2 回))
(平成 11 年 6 月 28 日採録　　　　　)



萩原　　斉（正会員）

平 4 東京農工大・工・数理情報工卒．平 6 同大学大学院博士前期課程 (電子情報工学専攻) 了．平 9 同大学院博士後期課程単位取得満期退学．同年．株式会社構造計画研究所入社．在学中は，組合せ最適化問題や計算複雑度の理論などについて研究．



中森眞理雄（正会員）

1977 年東大・工・計数・博士課程了．同年．東京農工大・工・数理情報工学科講師．現在，同大・工・情報コミュニケーション工学科教授．1985-1986 文部省在外研究員として西ドイツボン大学にて研究．アルゴリズム，データ構造，数理計画法，情報処理教育カリキュラムの研究に従事．情報処理学会数理モデル化と問題解決研究会主査 (1995-1998)．カリキュラム調査委員会幹事 (1991-1995)．日本オペレーションズ・リサーチ学会理事 (1997-1999)．