

開いた BCMP 待ち行列網における 目標の異なる最適化に対する到達度指標

小澤 孝之† 亀田 壽夫‡ 李 頌‡

開いた BCMP 待ち行列網によってモデル化できるシステムにおける最適資源分配（最適負荷分散、最適経路選択など）について、いくつかの異なる最適化目標が考えられる。その代表的なものが、システム全体にわたる平均応答時間を最小にしようとするもので、ここでは、全体最適化方式と呼ぶ。他にも個別最適化方式、クラス別最適化方式（ノード別最適化方式）などの目標が異なる最適化が考えられる。これらの全ての方式について最適化条件が変分不等式を用いて与えられる。

本研究ではこれらの最適化に対して最適化到達度を評価するための性能指標を考え、数値実験により検討した。その結果、提案した指標が gap function や regularized gap function と同等の性能を有することが示された。

Indices Showing the Degrees of Achieving Various Optimization Purposes in Open BCMP Queuing Networks

TAKAYUKI KOZAWA, HISAO KAMEDA and JIE LI

We can consider various performance optimization policies in the system that can be modeled as an open BCMP queuing network. One policy is to minimize the overall mean response time, which we call overall optimal policy. Furthermore, we can consider an individually optimal policy and an intra-node optimal policy. In this paper, we propose mutually similar indices that evaluate the degree of achievement of optimization for overall, individually and intra-node optimal policies, and examine them by numerical experiments. As a result, it appears that our proposed indices have equivalent performance to the gap function or the regularized gap function.

1. はじめに

通信ネットワークや、分散型コンピュータシステムで負荷分散を行なうにあたって何を最適化するか、その方針（最小にする目標）を決定することは重要であり、システムの性能に大きな影響を及ぼす。まず考えられるのは、システム全体の平均応答時間が最小になるように負荷を分散する方式である^{7),8),10),11),18)}。これを全体最適化方式（Overall Optimal Policy, 以下 OOP）と呼ぶ。

OOP ではシステム全体の平均応答時間は最小になるが、同じノードに到着したジョブであっても、処理

されるノード（あるいはネットワークを通過する経路）によって応答時間の期待値に違いが生じること、すなわち、ジョブ間に不平等感があることがある。

個別最適化方式（Individually Optimal Policy, 以下 IOP）ではこのようなジョブ間の不平等感はない^{3),9),13),16)}。IOP とは、同じノードに到着したジョブは処理されるノード（あるいはネットワークを通過する経路）によらず応答時間の期待値が等しく、かつ最小になるように負荷を分散する方式である。IOP では、同じノードに到着したジョブの応答時間の期待値は等しくなるがシステム全体の平均応答時間は最小になるとは限らない。この方式については Braess のパラドックスの存在が近年注目をあびている^{1),2),12)}。Braess のパラドックスとは、IOP のネットワークに新たにリンクを追加すると、全体および各個の性能がともに悪化する場合があるという現象である。

さらに、ジョブ全体をいくつかのグループに分け、各グループのジョブの平均応答時間が最小になるように負荷を分散する方式を考えることができる^{6),15)}。例

† 筑波大学大学院工学研究科, つくば市
Doctoral Program in Engineering, University of
Tsukuba, 1-1-1, Tennodai, Tsukuba-shi, Ibaraki, 305-
8537, Japan

‡ 筑波大学電子・情報工学系, つくば市
Institute of Information Sciences and Electronics, Uni-
versity of Tsukuba, 1-1-1, Tennodai, Tsukuba-shi,
Ibaraki, 305-8537, Japan

えば、同じジョブクラス内のジョブが全て1つのグループに入ると考え、各ジョブクラスのジョブの平均応答時間が最小になるように負荷を分散する方式が考えられる。これをクラス別最適化方式 (intra-Class Optimal Policy, 以下 **COP**) と呼ぶ。その一例として、同じノードに到着したジョブが1つのグループに入ると考え、各ノードに到着したジョブの平均応答時間が最小になるように負荷を分散する方式を考えることができる。これをノード別最適化方式 (intra-Node Optimal Policy, 以下 **NOP**) と呼ぶ。

3.1節の(2),(4),(7)式に示すように、これらの全ての方式についての最適条件が変分不等式 (variational inequality) を用いて与えられる⁸⁾。これにより最適条件が満たされているかどうか判定できる。これらは全て類似した形をしている。

全体最適化については、全体最適化状態のシステム全体の平均応答時間と全体最適化されていない状態のシステム全体の平均応答時間の差をとることによって、各状態が全体最適化状態にどのくらい到達しているかを評価することができる。他の最適化についても、最適条件を満たしていない状態が最適条件にどの程度近いを示す、すなわち、各最適化の到達度を示すような指標があれば、各最適化についての到達度を評価することができる。到達度についても変分不等式のように最適化方式によらず形が類似したものが好ましいと思われる。全体最適化については、システム全体の平均応答時間の差という最適化到達度指標があるので、求める **OOP** の到達度指標も、これと同じかあるいは類似したふるまいをすることが望まれる。はじめに我々は、変分不等式そのものに基づいた到達度指標 (指標グループ B) を検討した。しかし、5章の図4に示すように到達度指標としては不適切であった。そこで新しい到達度指標 (指標グループ A) を考えた。

本研究では、**OOP**, **COP** (**NOP**), **IOP** について、各方式の到達度という性能指標を求めることを検討する。そして、変分不等式に対する評価関数として提案されている gap function^{5),14)} (以下, **GF**), regularized gap function^{4),17)} (以下, **RGF**) あるいは最適解との差のノルムなどと数値実験により比較検討する。

2. モデル

本論文では、Kameda and Zhang⁸⁾と同様な開いた BCMP 待ち行列網モデルを用いる。各サービスセンターは FCFS(First-Come First-Served), LCFS-PR(Last-Come First-Served - Preemptive-

Resume), PS(Processor-Sharing)のいずれかの単一サーバか、あるいは無限サーバ (Infinite-Server, IS) である。各サービスセンターのサービス率は状態によらないと仮定する。また、ネットワーク内には出発点 (Origin points) と到着点 (Destination points) が存在すると仮定する。出発点と到着点でのサービス時間は0と仮定する。出発点と到着点の組を O-D ペアと呼ぶ。各ジョブは1つの出発点に到着し、ネットワークを通り、1つの到着点から離れて行く。各ジョブの出発点と到着点は、ジョブがネットワークに到着した時点で決定されている。

ジョブは R ジョブクラスに分けられる。ジョブは、ネットワーク内ではクラスは変わらないと仮定する。O-D ペアが (o_1, d_1) であるクラス k ジョブは、出発サービスセンター o_1 からいくつかのサービスセンターを通り、到着サービスセンター d_1 に到着する。その間の通信路をパスと呼ぶ。そのパスを、ジョブクラス k の O-D ペア (o_1, d_1) の有限個のパスクラスにクラス分けする。1つのパスクラスの中のどのパスを通るかは、ノード間の遷移確率等で決定され、最適化のために選ぶことができない。どのパスクラスを選択するかを、最適化のために選ぶことができる。各クラスの各 O-D ペアへのジョブの到着過程はポアソンで、システムの状態によらないと仮定する。

本研究で用いた記法は次の通りである。

M サービスセンター (通信チャネルあるいはプロセッサ) の数。

$D^{(k)}$ クラス k ジョブの O-D ペアの集合。

$\Pi_d^{(k)}$ O-D ペア d を通るクラス k ジョブのパスクラスの集合。

$$\gamma_{pd}^{(k)(k')} = \begin{cases} 1 & p \in \Pi_d^{(k')} \text{ かつ } k = k' \text{ の場合,} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

$\phi_d^{(k)}$ O-D ペア $d \in D^{(k)}$ を通るクラス k ジョブの割合。

Φ システム全体のジョブ到着率,

$$\Phi = \sum_{k=1}^R \sum_{d \in D^k} \phi_d^{(k)}.$$

$x_p^{(k)}$ パスクラス p を通るクラス k ジョブの割合。

$\delta_{lp} x_p^{(k)} = 1$ と仮定した時に、サービスセンター l を通るパスクラス p のジョブの割合。

$\lambda_l^{(k)}$ クラス k ジョブのサービスセンター l を通る割合,

$$\lambda_l^{(k)} = \sum_{p \in \Pi^k} \delta_{lp} x_p^{(k)}.$$

$\mu_l^{(k)}$ サービスセンター l でのクラス k ジョブのサービス率。

I IS サービスセンターの集合。

N IS サービスセンターを除くサービスセンターの集

合、 $(|N| = M - |I|)$.

$\rho_l^{(k)}$ クラス k ジョブのサービスセンター $l \in N$ での利

用率、 $\rho_l^{(k)} = \frac{\lambda^{(k)}}{\mu_l^{(k)}}$.

ρ_l サービスセンター $l \in N$ の利用率、

$$\rho_l = \sum_{k=1}^R \rho_l^{(k)}.$$

T システム全体の平均応答時間.

$t_p^{(k)} = \frac{\partial(\Phi T)}{\partial x_p^{(k)}}$, パスクラス p を通るクラス k ジョブの marginal delay.

$T_p^{(k)}$ パスクラス p を通るクラス k ジョブの平均遅延.

$T^{(k)}$ クラス k ジョブの平均応答時間.

A_{OP}, V_{OP} 全体最適化到達度指標.

A_{CP}, V_{CP} クラス別最適化到達度指標.

A_{IN}, V_{IN} ノード別最適化到達度指標.

A_{IP}, V_{IP} 個別最適化到達度指標.

ρ $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_M]^T$.

$\rho_U \rho$ $|\rho_l = 0, l \in I$.

ϕ $[\phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \dots, \phi_1^{(2)}, \phi_2^{(2)}, \dots]^T$.

$\mathbf{x}^{(k)}$ $[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots]^T$.

\mathbf{x} $[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots]^T$.

$N(\mathbf{x})$ \mathbf{x} のノルム,

$$N(\mathbf{x}) = (x_1^{(1)2} + x_2^{(1)2} + \dots + x_1^{(2)2} + x_2^{(2)2} + \dots)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{(1)(1)} & \gamma_{12}^{(1)(1)} & \dots & \gamma_{11}^{(1)(2)} & \dots \\ \gamma_{21}^{(1)(1)} & \gamma_{22}^{(1)(1)} & \dots & \gamma_{21}^{(1)(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \gamma_{11}^{(2)(1)} & \gamma_{12}^{(2)(1)} & \dots & \gamma_{11}^{(2)(2)} & \dots \\ \gamma_{21}^{(2)(1)} & \gamma_{22}^{(2)(1)} & \dots & \gamma_{21}^{(2)(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

\mathbf{t} $[t_1^{(1)}, t_2^{(1)}, \dots, t_1^{(2)}, t_2^{(2)}, \dots]^T$.

\mathbf{T} $[T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \dots, T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, \dots]^T$.

3. 性能指標

$\Gamma^T \mathbf{x} = \phi$, $\mathbf{x} \geq 0$ なる \mathbf{x} の集合を S と表す.

3.1 各最適化方式の解

●OOP (全体最適化方式) : システム全体の平均応答時間は以下の式で表される⁸⁾.

$$T(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Phi} \left[\sum_{l \in N} \frac{\rho_l}{1 - \rho_l} + \sum_{l \in I} \rho_l \right]. \quad (1)$$

全体最適化問題は以下のように表わされる:

$T(\mathbf{x})$ を最小にする $\mathbf{x}(\in S)$ を求める.

上記全体最適化問題の解 $\hat{\mathbf{x}}$ は、以下の変分不等式を満たす⁸⁾.

$$\text{全ての } \mathbf{x}(\in S) \text{ に対して, } \mathbf{t}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \geq 0. (2)$$

$$\text{ここで, } t_p^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_p^{(k)}}(\Phi T)$$

$$= \sum_{l \in N} \delta_{lp} \frac{1}{\mu_l^{(k)}(1 - \rho_l)^2} + \sum_{l \in I} \delta_{lp} \frac{1}{\mu_l^{(k)}}.$$

●IOP (個別最適化方式) : 個別最適化問題は以下のように考えることができる⁸⁾. IOP は、全ての $d \in D^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, R$ なるクラス k ジョブは、(3) 式を満たすパス p を選択していなければならない.

$$T_p^{(k)}(\mathbf{x}) = \min_{q \in \Pi_d^{(k)}} T_q^{(k)}(\mathbf{x}). \quad (3)$$

経路選択が上の条件を満たしていれば、その経路選択は個別最適化を実現している.

個別最適化問題 (3) 式の解 $\hat{\mathbf{x}}$ は以下の変分不等式を満たす⁸⁾.

$$\text{全ての } \mathbf{x}(\in S) \text{ に対して, } \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \geq 0. (4)$$

ただし、開いた BCMP 待ち行列網の場合は、

$$\tilde{T}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Phi} \left[\sum_{l \in N} \log_e \left(\frac{1}{1 - \rho_l} \right) + \sum_{l \in I} \rho_l \right], \quad (5)$$

と定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial x_p^{(k)}}(\Phi \tilde{T}(\mathbf{x})) = T_p^{(k)}(\mathbf{x}).$$

$$\text{ここで, } T_p^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_p^{(k)}}(\Phi \tilde{T}(\mathbf{x}))$$

$$= \sum_{l \in N} \delta_{lp} \frac{1}{\mu_l^{(k)}(1 - \rho_l)} + \sum_{l \in I} \delta_{lp} \frac{1}{\mu_l^{(k)}}.$$

個別最適化問題は $\tilde{T}(\mathbf{x})$ を最小にする $\mathbf{x}(\in S)$ を求めるという全体最適化問題と等価である.

そこで、 \tilde{T} という指標を全体最適化問題の最適化指標 T と同様に、個別最適化問題の最適化指標と考えることができる.

●COP (クラス別最適化方式) : クラス k 全体の平均応答時間は以下のように表される.

$$T^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\phi^{(k)}} \left[\sum_{l \in N} \frac{\rho_l^{(k)}}{1 - \rho_l} + \sum_{l \in I} \rho_l^{(k)} \right]. \quad (6)$$

クラス別最適化問題は以下のように表される:

各 k について $\mathbf{x}^{(k)}$ 以外の \mathbf{x} の値を所与とし、 $T^{(k)}(\mathbf{x})$ を最小にする $\mathbf{x}^{(k)}$ を求める. ただし $\mathbf{x} \in S$.

クラス別最適化問題の解 $\hat{\mathbf{x}}$ は以下の変分不等式を満たす.

$$\text{全ての } \mathbf{x}(\in S) \text{ に対して, } \hat{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \geq 0. (7)$$

$$\text{ここで, } \hat{t}_p^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_p^{(k)}}(\phi^{(k)} T^{(k)})$$

$$= \sum_{l \in N} \delta_{lp} \frac{1 - \rho_l + \rho_l^{(k)}}{\mu_l^{(k)} (1 - \rho_l)^2} + \sum_{l \in I} \delta_{lp} \frac{1}{\mu_l^{(k)}}.$$

3.2 最適化到達度

以下の性質 1, 性質 2⁸⁾に着目する。以下 $\rho_U, \bar{\rho}_U$, $\bar{\rho}_U$ は各々解 $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}}$ の場合の IS センターを除く各サービスセンターの利用率を表すとする。

性質 1. $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ は単調かつ以下が成り立つ。すなわち, OOP の解 $\bar{\mathbf{x}}$ および任意の $\mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}})$ に対し,

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}(\bar{\mathbf{x}})) > 0, \quad \text{if } \rho_U \neq \bar{\rho}_U, \quad (8)$$

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}(\bar{\mathbf{x}})) = 0, \quad \text{if } \rho_U = \bar{\rho}_U, \quad (9)$$

性質 2. $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ は単調かつ以下が成り立つ。すなわち, IOP の解 $\hat{\mathbf{x}}$ および任意の $\mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}})$ に対し,

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}})) > 0, \quad \text{if } \rho_U \neq \bar{\rho}_U, \quad (10)$$

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}})) = 0, \quad \text{if } \rho_U = \bar{\rho}_U, \quad (11)$$

性質 1. 性質 2. より, 全体最適化到達度 $A_{OP}(\mathbf{x})$, 個別最適化到達度 $A_{IP}(\mathbf{x})$ として次のようなものを用いることを提案する。

$$A_{OP}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{l}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}(\bar{\mathbf{x}})) \quad (12)$$

$$A_{IP}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}})) \quad (13)$$

COP については, 性質 1. 性質 2. と同様の性質が成り立つかどうかかわからないが, クラス別最適化到達度 $A_{CP}(\mathbf{x})$ として以下のものを用いることを提案する。

$$A_{CP}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \cdot (\hat{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{l}}(\hat{\mathbf{x}})) \quad (14)$$

$$\text{ここで, } A_{CP}(\mathbf{x}) = \sum_{l \in N} \sum_{k=1}^R \{(\rho_l^{(k)} - \hat{\rho}_l^{(k)})$$

$$\left[\frac{1 - \rho_l + \rho_l^{(k)}}{(1 - \rho_l)^2} - \frac{1 - \hat{\rho}_l + \hat{\rho}_l^{(k)}}{(1 - \hat{\rho}_l)^2} \right]\}.$$

(12), (13), (14) 式をそれぞれ OOP, IOP, COP (NOP) の最適化到達度の性能指標とする (指標グループ A)。性質 1, 2 より, $\mathbf{x} \neq \bar{\mathbf{x}}$ あるいは $\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}}$ であっても, $\rho_U = \bar{\rho}_U$ あるいは $\rho_U = \bar{\rho}_U$ であることが, \mathbf{x} が解であることの必要十分条件であることが証明されている⁸⁾。また, \mathbf{x} が解である場合のみ (12) あるいは (13) 式が 0 になることが示される。

そして, 最初に試みた変分不等式を利用した性能指標を, それぞれ OOP, IOP, COP (NOP) の最適化到達度 $V_{OP}(\mathbf{x}), V_{IP}(\mathbf{x}), V_{CP}(\mathbf{x})$ とする (指標グループ B)。

$$V_{OP}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}). \quad (15)$$

$$V_{IP}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}). \quad (16)$$

$$V_{CP}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{l}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}). \quad (17)$$

また, 状態 \mathbf{x} が各最適化方式の解からどの程度離れているかをみるための指標として, 各最適化方式の解と

状態 \mathbf{x} との差のノルムを求めた (指標グループ C)。さらに, GF (指標グループ D) を用いて, OOP, IOP, COP それぞれ,

$$G_{OP}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in S} \{-\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\} \quad (18)$$

$$G_{IP}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in S} \{-\mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\} \quad (19)$$

$$G_{CP}(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in S} \{-\hat{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})\} \quad (20)$$

とし, また, RGF (指標グループ E) を用いて, OOP, IOP, COP それぞれ,

$$RG_{OP}(\mathbf{x}) \quad (21)$$

$$= \max_{\mathbf{y} \in S} \left\{ -\mathbf{l}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \right\}$$

$$RG_{IP}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

$$= \max_{\mathbf{y} \in S} \left\{ -\mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \right\}$$

$$RG_{CP}(\mathbf{x}) \quad (23)$$

$$= \max_{\mathbf{y} \in S} \left\{ -\hat{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \right\}$$

とし, 比較をおこなった。ここで, \mathbf{P} は symmetric positive definite matrix である。

4. 数値実験

数値実験には分散型コンピュータシステムモデルを用いた。また, 同じノードに到着するジョブはクラス分けされないとした。従って, クラス別最適化方式としては到着ノードが異なる時のみジョブクラスが異なるとするノード別最適化方式のみが考えられることになる。

4.1 ノードモデルおよび通信ネットワークモデル
ノードモデルとして $\bullet/M/1$ モデル, 通信ネットワークモデルとしてシングルチャネルのプロセッサシェアリング $\bullet/G/1$ モデルを用いる。

4.2 NOP (ノード別最適化方式)

ノード数と同じ数のジョブクラスを考える。そして, ノード i のジョブの処理率を μ_i とすると, 各クラスのジョブの処理率もそれに等しく, $\mu_i^{(1)} = \mu_i^{(2)} = \dots = \mu_i^{(R)} = \mu_i$ とする。そして, 各ノードへのジョブの外部到着率は,

$$\phi_i^{(k)} = \begin{cases} \phi_i & i = k \text{ の場合,} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

とする。

クラス k に外部到着するジョブはノード i に外部到着するジョブだけなので, $k \rightarrow i$ と置き換えて考えると, 各ジョブクラスに外部到着したジョブを最適化す

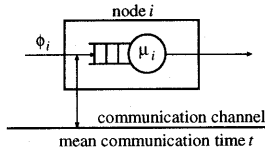


図1 ノードモデルおよび通信チャネルモデル

Fig. 1 The node and communication channel models.

ることは、各ノードに外部到着したジョブを最適化することになる。

このように、NOPの解を計算した。そして、NOPの最適化到達度指標をそれぞれ $A_{IN}(\mathbf{x}) = A_{CP}(\mathbf{x})$, $V_{IN}(\mathbf{x}) = V_{CP}(\mathbf{x})$, $G_{IN}(\mathbf{x}) = G_{CP}(\mathbf{x})$, $RG_{IN}(\mathbf{x}) = RG_{CP}(\mathbf{x})$ とし、数値実験を行った。

4.3 数値実験のパラメータ

数値実験に用いたモデルのパラメータは以下の通りである。ノード数は4で、各ノードへのジョブの外部到着率は、それぞれ ϕ_1, \dots, ϕ_4 である。各ノードへ到着したジョブは到着したノードで処理されるか、通信ネットワークを通して、他のノードに移送されて処理される。また、 μ_1, \dots, μ_4 は各ノードのジョブの処理率である。 t は平均通信所用時間で、待ち時間を含まない純粋に通信にかかる時間である。

指標グループ A: (12), (13), (14) 式

指標グループ B: (15), (16), (17) 式

指標グループ C: 各最適化方式の解との差のノルム

指標グループ D: (18), (19), (20) 式

指標グループ E: (21), (22), (23) 式

の5種類の性能指標での数値実験により比較した。なお、指標グループ E の RGF で用いられる symmetric positive definite matrix \mathbf{P} は、単位行列に 0.01 を掛けたものを用いた。

●実験 1 $\mu_1 = 150.0, \mu_2 = 12.0, \mu_3 = 10.0, \mu_4 = 16.0$. $\phi_1 = 80.0, \phi_2 = 7.0, \phi_3 = 7.0, \phi_4 = 7.5$ (jobs/sec). $0 \leq t \leq 1.5$ (sec).

●実験 2 $t = 0.15$ (sec). $60.0 \leq \phi_1 \leq 140.0$ (jobs/sec). 他は実験 1 と同様。

●実験 3 解が複数存在する場合の数値例として、 $\mu_1 = \mu_2 = 150.0, \mu_3 = \mu_4 = 10.0$ (jobs/sec),

$\phi_1 = \phi_2 = 80.0, \phi_3 = \phi_4 = 7.0$ (jobs/sec),

$t = 0.0$ (sec) のモデルの OOP の解のうち、以下の2つの解を用いて各指標グループの評価をおこなった。

解 1: $x_{11} = x_{22} = 80.0, x_{31} = x_{42} = 7.0$, その他の x_{ij} ($i, j = 1, \dots, 4$) は 0.

解 2: $x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = 3.5$. 他は解 1 と同じ。

各サービスセンターの利用率は解 1, 2 いずれの場合も $\rho_1 = \rho_2 = 87.0/150.0, \rho_3 = \rho_4 = 0.0$ である。

その他、実験 1, 2, 3 以外にもいくつかの場合にも実験をおこなった。

5. 結果と考察

図 2 ~ 図 23 内で、 $\hat{\mathbf{x}}$ は OOP, $\tilde{\mathbf{x}}$ は NOP, $\bar{\mathbf{x}}$ は IOP の解, $\hat{\mathbf{x}}$ は OOP, IOP, NOP の解を平均した値 (以下、平均方式) を表す。また、図 3, 図 9, 図 12, 図 16, 図 20, 図 23 は指標グループ A, 図 4 は指標グループ B, 図 5 は指標グループ C, 図 6, 図 10, 図 13, 図 17, 図 21, 図 24 は指標グループ D, 図 7, 図 11, 図 14, 図 18, 図 22, 図 25 は指標グループ E を用いた計算結果を示している。

実験 1 図 2 は OOP のシステム全体の平均応答時間と、NOP, IOP および平均方式のシステム全体の平均応答時間の差を示している。この値が 0 に近ければ近い程、全体最適化の到達度が高い。

図 3 は NOP, IOP の解および平均方式の値の、指標グループ A による全体最適化到達度を示している ($A_{OP}(\hat{\mathbf{x}}), A_{OP}(\tilde{\mathbf{x}}), A_{OP}(\bar{\mathbf{x}})$)。図 2 と図 3 を比較すると、図 2 の OOP と、NOP のシステム全体の平均応答時間の差 ($T(\hat{\mathbf{x}}) - T(\tilde{\mathbf{x}})$) と、図 3 の NOP の解の全体最適化到達度 ($A_{OP}(\tilde{\mathbf{x}})$) のふるまいが非常に類似していることが見られる。また、図 2 の IOP と、OOP のシステム全体の平均応答時間の差 ($T(\tilde{\mathbf{x}}) - T(\bar{\mathbf{x}})$) と、図 3 の IOP の解の全体最適化到達度 ($A_{OP}(\bar{\mathbf{x}})$) のふるまいも非常に類似している。

図 4 は NOP, IOP の解および平均方式の値の、指標グループ B による全体最適化到達度を示している ($V_{OP}(\hat{\mathbf{x}}), V_{OP}(\tilde{\mathbf{x}}), V_{OP}(\bar{\mathbf{x}})$)。この指標によると、IOP は、全体最適化が達成されていないにもかかわらず、常に全体最適化が達成されているかのようなふるまい、つまり $V_{OP}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ になっている。また、NOP も通信所用時間によっては、全体最適化が達成されていないにもかかわらず $V_{OP}(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ となる場合が多い。図 2 とふるまいが異なり、全体最適化到達度の指標としては不適當であることがわかる。

図 5 は OOP の解と、NOP, IOP の解および平均方式の値との差のノルム (指標グループ C) を示している ($N(\hat{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}), N(\tilde{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}), N(\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}})$)。これらのグラフのふるまいは、図 2 のシステム全体の平均応答時間の差のふるまいとは類似していない。

図 6 は OOP の解と、NOP, IOP の解および平均方式の値との GF の値 (指標グループ D) を示している ($G_{OP}(\hat{\mathbf{x}}), G_{OP}(\tilde{\mathbf{x}}), G_{OP}(\bar{\mathbf{x}})$)。これらのグラフのふるまいは、図 2 のシステム全体の平均応答時間

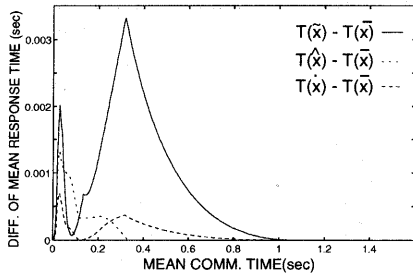


図2 全体最適化方式のシステム全体の平均応答時間との差 (実験 1).

Fig. 2 Differences of the overall mean response times from that of the overall optimal policy (exp. 1).

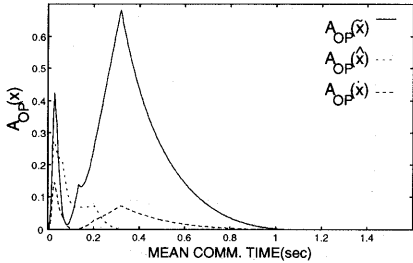


図3 全体最適化指標 (指標グループ A) (実験 1).

Fig. 3 The index of the overall optimal policy (index group A)(exp. 1).

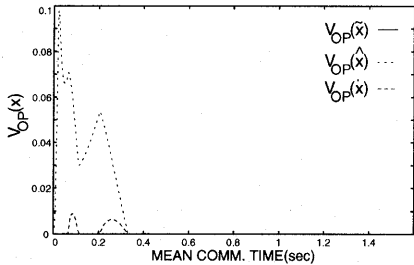


図4 全体最適化指標 (指標グループ B) (実験 1).

Fig. 4 The index of the overall optimal policy (index group B)(exp. 1).

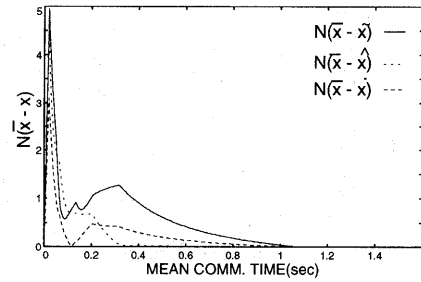


図5 全体最適化方式の最適解との差のノルム (指標グループ C) (実験 1).

Fig. 5 The norm of the difference from the optimal solution of the overall optimal policy (index group C)(exp. 1).

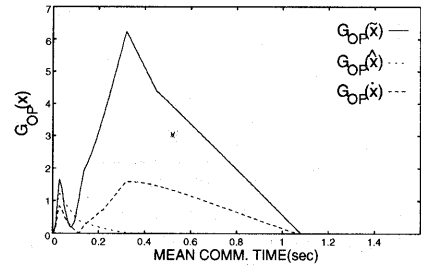


図6 全体最適化指標 (指標グループ D) (実験 1).

Fig. 6 The index of the overall optimal policy (index group D)(exp. 1).

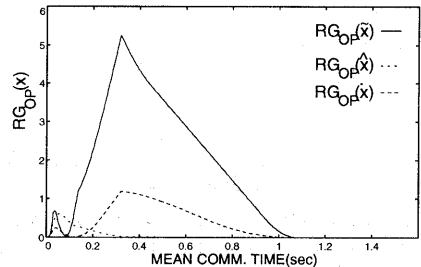


図7 全体最適化指標 (指標グループ E) (実験 1).

Fig. 7 The index of the overall optimal policy (index group E)(exp. 1).

の差と図3の全体最適化到達度 (指標グループ A) のふるまいが類似しているほどには、図2のシステム全体の平均応答時間の差とは類似していない。

図7は **OOP** の解と、**NOP**、**IOP** の解および平均方式の値との **RGF** の値 (指標グループ E) を示している ($RG_{OP}(\hat{x})$, $RG_{OP}(\bar{x})$, $RG_{OP}(\bar{x})$)。これらのグラフのふるまいも、図2のシステム全体の平均応答時間の差とは類似していない。

図8は **IOP** の \bar{T} の値と、**OOP**、**NOP** の解および平均方式の値の \bar{T} の値の差を示している ($\bar{T}(\bar{x}) - \bar{T}(\bar{x})$, $\bar{T}(\hat{x}) - \bar{T}(\bar{x})$, $\bar{T}(\bar{x}) - \bar{T}(\bar{x})$)。

図9は **OOP**、**NOP** の解および平均方式の値の、指標グループ A による個別最適化到達度を示している ($A_{IP}(\bar{x})$, $A_{IP}(\hat{x})$, $A_{IP}(\bar{x})$)。図8と図9を比較

すると、これらのグラフは図2と図3でシステム全体の平均応答時間の差と、全体最適化到達度のグラフが類似しているほどには \bar{T} の差と個別最適化到達度のグラフは類似していないが、大小関係は一致している。一方、グループ B, C の指標は、個別最適化についても同様に不適當であることが見られた。

図10は **IOP** の解と、**OOP**、**NOP** の解および平均方式の値との **GF** の値 (指標グループ D) を示している ($G_{IP}(\bar{x})$, $G_{IP}(\hat{x})$, $G_{IP}(\bar{x})$)。

図11は **IOP** の解と、**OOP**、**NOP** の解および平均方式の値との **RGF** の値 (指標グループ E) を示している ($RG_{IP}(\bar{x})$, $RG_{IP}(\hat{x})$, $RG_{IP}(\bar{x})$)。

図12は **OOP**、**IOP** の解および平均方式の値の、

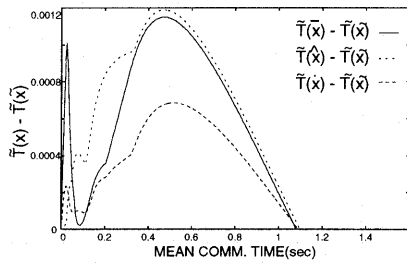


図 8 個別最適化方式の最適解の \bar{T} の値との差 (実験 1).
 Fig. 8 The difference of the value of \bar{T} from that of the individually optimum policy (exp. 1).

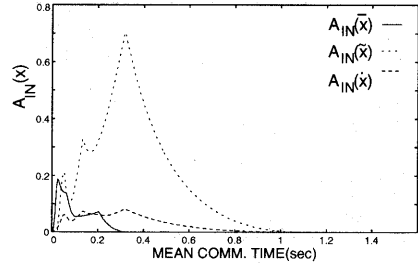


図 12 ノード別最適化指標 (指標グループ A) (実験 1).
 Fig. 12 The index of the intra-node optimal policy (index group A) (exp. 1).

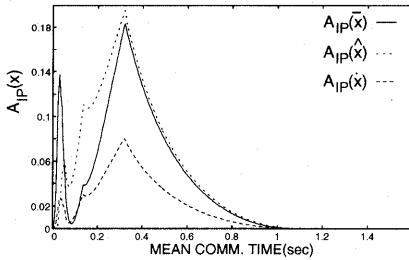


図 9 個別最適化指標 (指標グループ A) (実験 1).
 Fig. 9 The index of the individual optimal policy (index group A) (exp. 1).

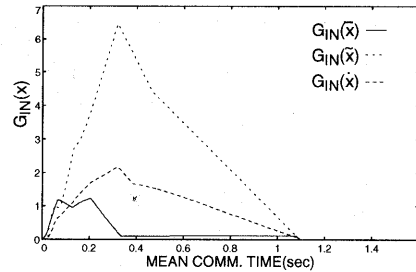


図 13 ノード別最適化指標 (指標グループ D) (実験 1).
 Fig. 13 The index of the intra-node optimal policy (index group D) (exp. 1).

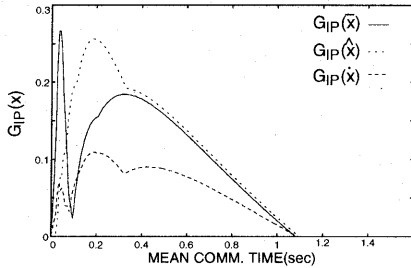


図 10 個別最適化指標 (指標グループ D) (実験 1).
 Fig. 10 The index of the individual optimal policy (index group D) (exp. 1).

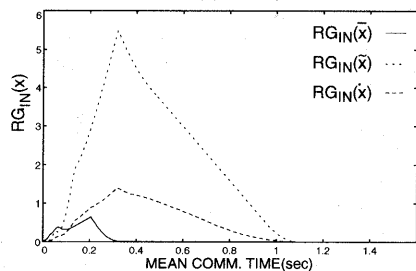


図 14 ノード別最適化指標 (指標グループ E) (実験 1).
 Fig. 14 The index of the intra-node optimal policy (index group E) (exp. 1).

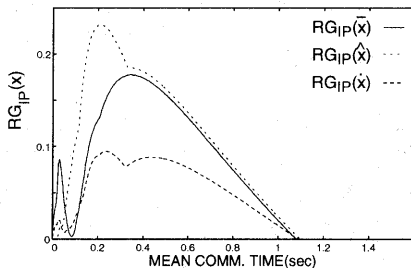


図 11 個別最適化指標 (指標グループ E) (実験 1).
 Fig. 11 The index of the individual optimal policy (index group E) (exp. 1).

指標グループ A によるノード別最適化到達度を示している ($A_{IN}(\bar{x})$, $A_{IN}(\hat{x})$, $A_{IN}(\hat{x})$). ノード別最適化到達度では, 全体最適化到達度 (図 3) とシステム全体の平均応答時間の差 (図 2) の比較の場合のように比較するものはない. しかし, 図 12 の全体最適化方式の解

のノード別最適化到達度 ($A_{IN}(\bar{x})$) と, 図 3 のノード別最適化方式の解の全体最適化到達度 ($A_{OP}(\hat{x})$) のふるまいが非常に類似していることが注目される. また, 図 12 の IOP の解のノード別最適化到達度 ($A_{IN}(\hat{x})$) と, 図 9 の NOP の解の個別最適化到達 ($A_{IP}(\hat{x})$) についても同様のことが見られる.

図 13 は NOP の解と, OOP, IOP の解および平均方式の値との GF の値 (指標グループ D) を示している ($G_{IN}(\bar{x})$, $G_{IN}(\hat{x})$, $G_{IP}(\hat{x})$).

図 14 は NOP の解と, OOP, IOP の解および平均方式の値との RGF の値 (指標グループ E) を示している ($RG_{IN}(\bar{x})$, $RG_{IN}(\hat{x})$, $RG_{IN}(\hat{x})$).

図 3, 図 9, 図 12 より, 異なる 2 つの最適化到達度指標から見た互いの最適化到達度のふるまいが非常に類似していることが見られる. この特徴は, 到達度指

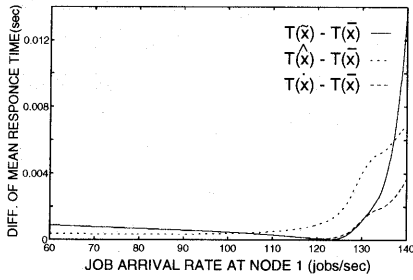


図 15 全体最適化方式のシステム全体の平均応答時間との差 (実験 2).

Fig. 15 Differences of the overall mean response times from that of the overall optimal policy(exp. 2).

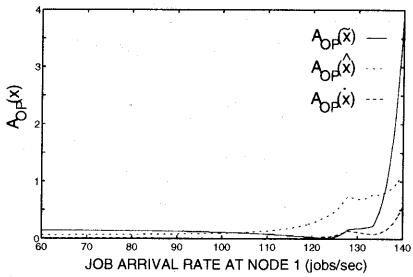


図 16 全体最適化指標 (指標グループ A) (実験 2).

Fig. 16 The index of the overall optimal policy (index group A)(exp. 2).

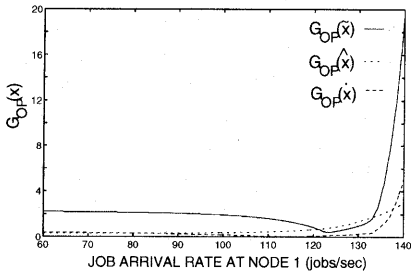


図 17 全体最適化指標 (指標グループ D) (実験 2).

Fig. 17 The index of the overall optimal policy (index group D)(exp. 2).

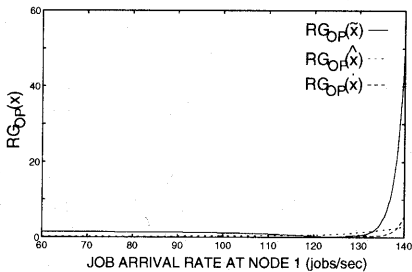


図 18 全体最適化指標 (指標グループ E) (実験 2).

Fig. 18 The index of the overall optimal policy (index group E)(exp. 2).

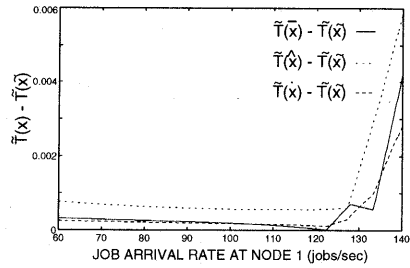


図 19 個別最適化方式の最適解の \bar{T} の値との差 (実験 2).

Fig. 19 The difference of the value of \bar{T} from that of the individually optimal policy(exp. 2).

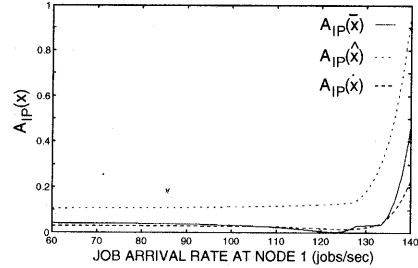


図 20 個別最適化指標 (指標グループ A) (実験 2).

Fig. 20 The index of the individual optimal policy (index group A)(exp. 2).

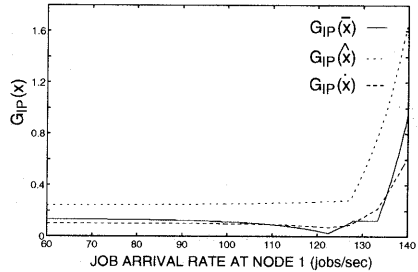


図 21 個別最適化指標 (指標グループ D) (実験 2).

Fig. 21 The index of the individual optimal policy (index group D)(exp. 2).

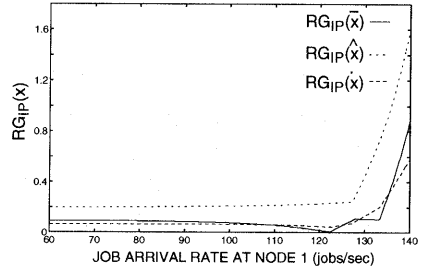


図 22 個別最適化指標 (指標グループ E) (実験 2).

Fig. 22 The index of the individual optimal policy (index group E)(exp. 2).

標として好ましいものであると考えられる。

実験 2 図 15 ~ 図 23 は実験 2 における結果を示している。実験 2 でも、実験 1 と同様な結果が得られた。

実験 3 解 1 を x_1 , 解 2 を x_2 とすると,

$$A_{OP}(x_1) = A_{OP}(x_2) = 0.0, V_{OP}(x_1) = V_{OP}(x_2) =$$

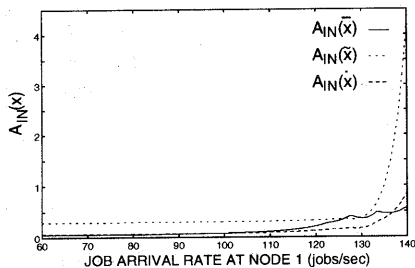


図 23 ノード別最適化指標 (指標グループ A) (実験 2).
Fig. 23 The index of the intra-node optimal policy (index group A)(exp. 2).

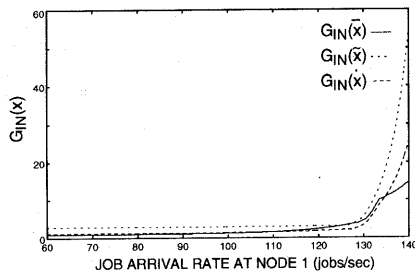


図 24 ノード別最適化指標 (指標グループ D) (実験 2).
Fig. 24 The index of the intra-node optimal policy (index group D)(exp. 2).

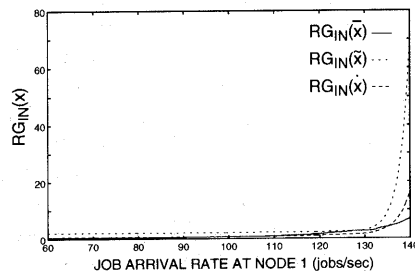


図 25 ノード別最適化指標 (指標グループ E) (実験 2).
Fig. 25 The index of the intra-node optimal policy (index group E)(exp. 2).

0.0, $N(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 7.0$, $G_{OP}(\mathbf{x}_1) = G_{OP}(\mathbf{x}_2) = 0.0$, $RG_{OP}(\mathbf{x}_1) = RG_{OP}(\mathbf{x}_2) = 0.0$ となり、我々のモデルでは、解が複数存在する場合には、最適状態であっても解との差のノルムが 0 にならない場合が存在するので、ノルムは最適化到達度の指標としては不適當であることが予想されたが、この数値例でこのことが実際に確認された。

実験 1, 2, 3 以外のいくつかの場合の実験でも、同様の結果が得られた。

6. 総 括

本研究では、開いた BCMP 待ち行列ネットワークモデルで、最適化の目的の異なる全体最適化方式、クラス別最適化方式、個別最適化方式について、各方式のそれぞれの最適化到達度という新しい性能指標を

求めることを検討した。そして数値実験により比較をした。

全体最適化については、システム全体の平均応答時間と同じようにふるまう全体最適化到達度指標を示した。それ以外の最適化では、直接比較する指標がない場合にも、おおむね好ましい特徴を示すことを見た。

また、gap function や regularized gap function と同等の性能を有する結果を得た。

これにより各方式とも、非解を最適化到達度という性能指標で比較、評価することの可能性が拓けるように思われる。

謝辞 本研究について、数理計画に関する国際的権威である山本芳嗣(筑波大学社会学系)教授にご議論いただいた。また、査読者より貴重なコメントをいただいた。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Bean, N. G., Kelly, F. P. and Taylor, P. G.: Braess's paradox in a loss network, *J. Appl. Prob.*, Vol. 34, pp. 155-159 (1997).
- 2) Calvert, B. and Ziedins, W. S. I.: Braess's paradox in a queueing network with state-dependent routing, *J. Appl. Prob.*, Vol. 34, pp. 134-154 (1997).
- 3) Cohen, J.E. and Kelly, F.P.: A paradox of congestion in a queueing network, *J. Appl. Prob.*, Vol. 27, pp. 730-734 (1990).
- 4) Fukushima, M.: Equivalent differentiable optimization problems and descent methods for asymmetric variational inequality problems, *Mathl. Prog.*, Vol. 53, pp. 99-110 (1992).
- 5) Hearn, D. W.: The gap function of a convex program, *Oper. Res. Letters*, Vol. 1, No. 2, pp. 67-71 (1982).
- 6) Kameda, H., Kozawa, T. and Li, J.: Anomalous relations among various performance objectives in distributed computer systems, *Proc. 1st World Congress on Systems Simulation*, IEEE, pp. 459-465 (1997).
- 7) Kameda, H., Li, J., Kim, C. and Zhang, Y.: *Optimal Load Balancing in Distributed Computer Systems*, Springer (1996).
- 8) Kameda, H. and Zhang, Y.: Uniqueness of the solution for optimal static routing in open BCMP queueing networks, *Mathl. Comput. Modelling*, Vol. 22, No. 10-12, pp. 119-130 (1995).
- 9) Kelly, F. P.: Network routing, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol. 337, pp. 343-367 (1991).
- 10) Kim, C. and Kameda, H.: Optimal static load balancing of multi-class jobs in a distributed

- computer system, *Proc. 10th Intl. Conf. Distributed Comput. Syst.*, IEEE, pp. 562-569 (1990).
- 11) Kim, C. and Kameda, H.: An algorithm for optimal static load balancing in distributed computer systems, *IEEE Trans. Comput.*, Vol. 41, No. 3, pp. 381-384 (1992).
 - 12) Korilis, Y. A., Lazar, A. A. and Orda, A.: Capacity allocation under noncooperative routing, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 42, No. 3, pp. 309-371 (1997).
 - 13) Lippman, S. A. and Stidham, S.: Individual versus social optimization in exponential congestion systems, *Oper. Res.*, Vol. 25, No. 2, pp. 233-247 (1977).
 - 14) Marcotte, P. and Dussault, J. P.: A note on a globally convergent newton method for solving variational inequalities, *Oper. Res. Letters*, Vol. 6, No. 1, pp. 35-42 (1987).
 - 15) Orda, A., Rom, R. and Simkin, N.: Competitive routing in multiuser communication networks, *IEEE/ACM Trans. Networking*, Vol. 1, No. 5, pp. 510-521 (1993).
 - 16) Stidham, S.: Optimal control of admission to a queueing system, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 30, No. 8, pp. 705-713 (1985).
 - 17) Taji, K., Fukushima, M. and Ibaraki, T.: A globally convergent newton method for solving variational inequalities, *Mathl. Prog.*, Vol. 58, pp. 369-383 (1993).
 - 18) Tantawi, A.N. and Towsley, D.: Optimal static load balancing in distributed computer systems, *J. ACM*, Vol. 32, No. 2, pp. 445-465 (1985).

(平成 10 年 10 月 23 日受付)

(平成 11 年 4 月 15 日再受付)

(平成 11 年 6 月 23 日採録)



小澤 孝之

1968 年生。1990 年東京理科大学理学部物理学卒業。1992 年電気通信大学大学院電気通信学研究科博士前期課程修了。工学修士。同年筑波大学大学院工学研究科編入。1998 年単位取得退学。同年 4 月より筑波大学大学院工学研究科研究生。分散/並列処理, システムの性能評価の研究に従事。



亀田 壽夫 (正会員)

1942 年生。1965 年東京大学理学部物理学卒業。1970 年同大学院理学系研究科博士課程修了。理学博士。同年東京大学理学部助手。1971 年電気通信大学講師。同大学助教授・教授を経て, 1992 年より筑波大学電子・情報工学系教授。コンピュータのオペレーティングシステム, 分散/並列処理, システム性能評価, 等の研究教育に従事。



李 韻 (正会員)

1959 年生。1982 年中国浙江大学計算機科学卒業。1985 年中国北京郵政省科学研究院大学院修士課程修了。1993 年電気通信大学大学院博士課程修了。博士(工学)。1985~89 年中国北京郵政省科学研究院研究工程師。1993 年筑波大学電子・情報工学系助手。1994 年同講師を経て, 1997 年同助教授。分散/並列処理, オペレーティングシステム, システムの評価の研究教育に従事。