

デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検証モデル

矢萩 一樹[†] 宮崎 浩一[†]

オプションの市場価格が理論価格より割高である場合には、オプションを売却してデルタヘッジを行えば理論上は確実に収益があがるはずであるが、実際には損失が発生することがある。本研究では、そのメカニズムを解明するために、デルタヘッジの効率性に着目したシミュレーションモデルを提案した後、実データに基づいて本モデルを利用した検証を行う。デルタヘッジを行う際に使用するデルタの算出には、実現したボラティリティ、各時点のインプライド・ボラティリティ、GARCH ボラティリティの3種類を用いることで、これらのボラティリティがデルタヘッジに与える効率性の違いを比較した。また、分析をより現実的なものとするため、デルタヘッジにおける株式の売買コストを考慮したうえで、ヘッジ頻度を変えた分析からデルタヘッジの効率性とヘッジコストとのトレードオフを確認した。実験結果から、各時点のインプライド・ボラティリティおよびGARCH ボラティリティを直接利用するだけでは、デルタヘッジの効率性はきわめて低いことが分かった。ただし、現実のボラティリティをある程度正しく予測することができたならば、取引回数を10回程度以上行うことで理論どおりに収益をあげることができるのが確認できた。また、ヘッジコストとヘッジの効率性に関するトレードオフは存在し、ヘッジ間隔が長くなるにつれて売買コストが低下する影響が強く現れる結果となった。

A Verification Model of Profitability in the Delta Hedging Strategy

KAZUKI YAHAGI[†] and KOICHI MIYAZAKI[†]

When the market price of an option is higher than the theoretical price of it, theoretically, we can make profit with 100% certainty by selling the expensive option and activating the delta-hedging strategy. However, in reality, we sometimes lose in the option trade. In this research, we clarify why such a counter intuitive situation occurs based on our simulation model focusing on the efficiency in the delta hedging. We examine the hedging efficiency depending on the delta in the delta-hedging by utilizing the three kind of volatilities such as actual volatility in the period, implied volatility in each delta-hedging timing and GARCH volatility. Making our analysis to be more realistic, we introduce the trading cost of the underlying equity in the delta-hedging and examine the trade-off between the hedging cost and the hedging efficiency by comparing the results in the different hedging frequencies. The results indicate that the performances of the delta-hedging based on the delta derived by the implied volatility in each delta-hedging timing and the GARCH volatility are very poor. However, when we can foretell the actual volatility of the underlying equity in the hedging period with reasonable precision, as the theory indicates, we can almost surely make profit by activating the same kind of the trade independently more than 10 times. Regarding as the trade-off between the hedging cost and the hedging efficiency, we found that the effect of the hedging cost surpasses that of the hedging efficiency when the hedging frequency decreases.

1. はじめに

オプション価格評価式を初めて与えた有名なブラック・ショールズモデル、Black and Scholes (1973)¹⁾ が発表されてから30年以上が経過した今日、オプション市場は金融市場参加者にとって必要不可欠な市場に発展した。また、金融工学もこの30年間に爆発的に発展し、オプション評価に関する研究は、数多く行わ

れてきた。しかし、オプション評価の研究は、他の金融工学の分野である株式や債券などのアセットアロケーションや企業分析といった分野と比較すると、研究の方向性がオプション評価モデルの精緻化に向き、実データから推定したパラメータを用いた研究が比較的手薄にある。この理由として、日本においては、整備されたオプションの価格データがなかったことがあげられる。実務においてもアカデミアにおいても金融の実データを利用する際は、市場の終値を利用することが多い。株式の日経225であれば市場が引ける直前まで値動きがみられるが、日経225オプションの

[†] 電気通信大学大学院電気通信学研究科
Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-Communications

場合には、市場の引け 30 分前に取引がありそれ以降取引がないようなケースが多く、その場合でも市場の引け 30 分前の取引価格が日経 225 オプションの終値として公表されてきた。2 章で詳しく述べるが、オプション価格は原資産となる株価水準に依存して決まるため、上記の日経 225 オプションの終値を有意義に利用するためには、市場の引け 30 分前の日経 225 株価を用いる必要がある。しかし、このような時点の株価は一般には公表されていないため、日経 225 オプションに関する実データを数値実験に利用するのが困難であった。近年、大阪証券取引所は、日経 225 オプションの終値を日経 225 平均の終値と整合性がとれる形で公表するようになり、ようやく実データを数値実験に取り込んだ研究を行う素地ができてきた。

オプション評価に関して実データを利用した研究の中でも、デルタヘッジ戦略に関するものはほとんど見当たらない。我々が調べた限りでは、淵江 (2002)²⁾ が唯一の先行研究といえる。淵江 (2002) は、1998 年 1 月 9 日から 2001 年 1 月 12 日までの期間において、期近物の日経 225 オプションに関して、日経 225 オプション価格が、その期間における株価リターンの実現ボラティリティを用いたブラック・ショールズモデルによる理論価格よりも割高である場合に、日経 225 オプションを売却して週次でデルタヘッジを行う、割安である場合には、日経 225 オプションを購入して週次でデルタヘッジを行うことで、どの程度の収益があるかを実証的に分析して、おおむね収益があがる結果を示した。しかし、淵江 (2002) の分析結果を見ると、日経 225 オプションを理論価格よりも割高である場合に売却、割安である場合に購入したうえで、デルタヘッジを行っている (理論的には収益があがる取引を行っている) にもかかわらず、いくつかの限月では損失が発生しているのである。

本研究の目的は、淵江 (2002) にみられるような理論的には収益があがる取引を行っているにもかかわらずいくつかの限月では損失が発生するメカニズムを、ブラック・ショールズモデルの枠組みの中で、デルタヘッジの効率性に着目し、シミュレーションモデルによる分析に基づいて明らかにすることである。現実の株価の動きとブラック・ショールズモデルとの乖離についてはこれを考察の対象からはずす。モデルの概要は、(1) 株価リターンから株価過程のパラメータを推定したうえで、シミュレーションにより株価のサンプルパスを発生させる、(2) 割高なオプションを売却して、株価のサンプルパスごとにデルタヘッジを行いコストの分布を描く、(3) このコストの分布に基づいて検証を行う、となる。

デルタヘッジを行う際のデルタとしては、割高なオプションの売却時点のインプライド・ボラティリティ、日々のインプライド・ボラティリティ、GARCH モデルに基づくボラティリティから求められる 3 通りを利用する。GARCH モデル^{3)~5)} は、1986 年に Bollerslev⁴⁾ により開発された不均一分散ボラティリティを表現する時系列モデルであり、ファイナンスへの利用もさかんであり、先物のダイナミックヘッジにおけるヘッジ比率を求めることへの応用は、商品先物 (Baillie and Myers (1991)⁶⁾, Bera, Garcia and Roh (1997)⁷⁾, Myers (1991)⁸⁾), 為替先物 (Kroner and Sultan (1993)⁹⁾), 金利先物 (Gagnon and Lypny (1995)¹⁰⁾), 株価指数先物 (Park and Switzer (1995)¹¹⁾, Tong (1996)¹²⁾, 程島・芦谷 (2003)¹³⁾) にみられるが、オプションのデルタヘッジにおけるデルタを計算する際のボラティリティの指標としての利用は見当たらない。売却する割高なコール・オプションとしては、イン・ザ・マネー、アット・ザ・マネー、アウト・オブ・ザ・マネーの 3 種類を対象とし、オプションの行使価格による影響も検討した。デルタヘッジにおける株式の取引コストも考慮した。また、モデルの概要 (2) で示した取引 1 つのコスト分布を表現する確率分布に基づいて多数取引を行うことを想定した (オプショントレーダは多数取引を行っている) コストの平均の分布に基づく検証も合わせて行った。

本論文の構成は、以下のとおり。次章では、ファイナンス工学の予備知識のない読者に配慮して、本研究に用いるファイナンスの概念、公式および用語を整理した。3 章では、研究目的を明確にしたうえで、本研究モデルを導入する。4 章では、数値実験に用いるデータを明らかにしたうえで、実験結果と考察を与える。最終章では、まとめと結語を付す。

2. 本研究に用いるファイナンスの概念、公式、および用語

本章では、オプション価格理論に関して、本研究に利用する部分に焦点を当てて解説する。

2.1 オプションとは

オプションとは、「所定の期日 (または期間内) に、ある特定の資産をあらかじめ定めた価格で買う (売る) ことができる権利」のことであり、オプションに関して以下の用語を用いる。

満期: 所定の期日

権利行使価格 (ストライクプライス): あらかじめ定められた価格

原資産: オプションが取引対象としている特定の資産

コール・オプション：行使価格で原資産を買うことができる権利
 ヨーロピアン・オプション：権利行使できるタイミングがオプション満期時点に限るもの
 プレミアム：オプション自体の価格
 コール・オプションに関する場合
 イン・ザ・マネー：原資産価格が権利行使価格よりも大きい場合
 アウト・オブ・ザ・マネー：原資産価格が権利行使価格よりも小さい場合
 アット・ザ・マネー：原資産価格と権利行使価格が等しい場合

株式オプションに関する具体例を用いて、オプションの用語とオプションの収益に関して確認する。「現在、XYZ社の株式が1,000円として、1カ月後にXYZ社の株式を1,000円で買う権利をA氏は100円で購入した」という状況に関してオプション用語を用いて明確に述べると、「現在、原資産であるXYZ社の株式が1,000円として、オプション満期が1カ月、権利行使価格が1,000円のヨーロピアン・コール・オプションをプレミアム100円でA氏は購入した」となる。このとき、満期時点において、横軸にXYZ社株価を縦軸にA氏の収益をグラフ化したものを図1の細線に示した。XYZ社株価が株式市場において1,000円以上で取引されている場合には、権利を行使してオプションを売却した相手からXYZ社株式を1,000円で購入してそれを株式市場で売却することで収益がある。ただし、当初、プレミアムを100円支払っているので、利益をグラフ化したものは図1の太線となり、利益が出るのはXYZ社株式が満期時点で1,100円以上になった場合である。一方、XYZ社株式が1,000円以下になった場合には、権利行使を行わないだけであり、損失は当初のプレミアムの100円となる。ヨーロピアン・コール・オプションを購入するのではなく、XYZ社株式を購入する場合には、プレミアムの100円が不要である代わりに、価格が1,000円を下回る場合には、下回った額だけの損失が発生する(図1の点線)。

上記の例では、ヨーロピアン・コール・オプションのプレミアムを仮に100円としたが、適正なプレミアムを求める理論がオプション価格理論であり、そこでは、無裁定条件(リスクのない資産の収益率は無リスク金利に等しい)を満たすようにオプション価格が導出される。

2.2 デルタヘッジに基づくオプション評価

ここでは、デルタヘッジ¹⁴⁾の考え方に基いて、ブラック・ショールズの公式を導出する方法について述

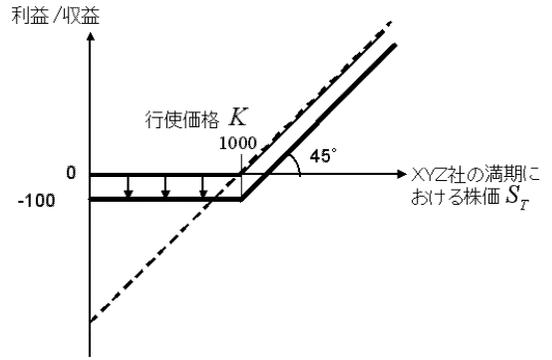


図1 コール・オプションのペイオフダイアグラム
 Fig. 1 Call option payoff diagram.

べる。株価が従う確率過程として、次の幾何ブラウン運動を仮定する。

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

ここで、 μ, σ はそれぞれ株価リターンの期待値とボラティリティである。原資産価格 S が式 (1) に従うときに、オプション価格を $f(t, S)$ で表すと、伊藤の公式から $f(t, S)$ の従う過程は、

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW(t) \tag{2}$$

株価が従う確率過程 (1) をみると確率的振舞いを示す部分は σdW_t であり、オプション価格が従う確率過程 (2) において確率的振舞いを示す部分は $\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW(t)$ となる。そこで、オプションを1単位売却するとともに、原資産株式を $\frac{\partial f}{\partial S}$ 単位購入して価格変動リスクのない(確率的振舞いのない)無リスクポートフォリオ Π を構築することを考える。これをオプションのデルタヘッジと呼ぶ。

無リスクポートフォリオ Π
 オプションの売却: -1 単位
 株式の購入: $\frac{\partial f}{\partial S}$

無リスクポートフォリオ Π の価値は、

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \tag{3}$$

微小時間 dt における無リスクポートフォリオ Π の価値変動量は、

$$d\Pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \tag{4}$$

式 (4) に式 (1)、式 (2) を代入することで、

$$d\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \tag{5}$$

が得られる。無リスクポートフォリオ Π は無リスク

(確率的振舞いが無い)であるから、無裁定条件を満足するためには、その収益率は無リスク金利 r に等しくなければならない。よって、

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt, \quad (6)$$

が成立しなければならず、これは、式 (7) のように書き替えられる。

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (7)$$

ここで、式 (5) と式 (7) の左辺が等しいこと、無リスクポートフォリオが式 (3) で表されることから、次式が得られる。

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt = r\left(-f + \frac{\partial f}{\partial S}S\right)dt. \quad (8)$$

式 (8) を dt に関する恒等式とみて、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \quad (9)$$

が得られる。これが、ブラック・ショールズ・マーソンの偏微分方程式と呼ばれているものであり、オプション満期における次の境界条件 (図 1 実線) を付した境界値問題を解くことで、ヨーロピアン・コール・オプションの価格式が得られる。

境界条件

$$f(T, S_T) = \text{Max}(S_T - K, 0). \quad (10)$$

コール・オプションの価格式

$$S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2). \quad (11)$$

ここで、

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad (12)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (13)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (14)$$

コール・オプションのデルタ $\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)$

コール・オプション価格 (11) を原資産株価 S_t で偏微分することで得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \Phi(d_1). \quad (15)$$

よって、コール・オプションのデルタは、 d_1 、つまり、現在の原資産株価 S_t 、権利行使価格 K 、無リスク金利 r 、ボラティリティ σ 、満期までの期間 $T-t$ に依存して決まることが分かる。

デルタヘッジに基づくオプション評価におけるポイントは、株価が確率過程 (1) に従うのであれば、株価が現時点からオプション満期までどのようなサンプル

パスをたどったとしても、そのサンプルパスに応じた「コール・オプションの価値のサンプルパス」と「借入を行い、原資産株式を各時点で $\frac{\partial f}{\partial S}$ 単位保有するようなデルタヘッジに基づくポートフォリオの価値のサンプルパス」とは等しくなることである。つまり、原資産株価のいかなるサンプルパスに関しても、コール・オプションの価値は株式と借入からなるポートフォリオで複製される。コール・オプションの価格 (11) は、ボラティリティ σ が大きいほど大きい。よって、株式オプション市場で観測されるコール・オプション価格の織り込むボラティリティ σ_I (インプライド・ボラティリティと呼ぶ) が、オプション満期までに実現する株式リターン σ_A よりも大きい場合には、割高なコール・オプションを売却して、オプション満期までに実現する株式リターン σ_A から計算されるデルタ $\left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)$ に基づくデルタヘッジを行うことで (デルタヘッジのコストは、ボラティリティが σ_A のときのコール・オプション価格に等しい)、確実に利益をあげることができる。その利益の大きさは、ボラティリティを σ_I としたときのコール・オプション価格からボラティリティを σ_A としたときのコール・オプション価格を差し引いた額である。

2.3 GARCH(1,1) モデル

GARCH(1,1) モデルとは、Bollerslev⁴⁾ が 1986 年に提案したモデルであり、ボラティリティの予測モデルの 1 つである。GARCH(1,1) モデルでは、 n 時点の株式リターンの分散 σ_n^2 は、長期的な分散の平均 V 、一時点前の株式リターンの分散 σ_{n-1}^2 と一時点前の株式リターンの二乗 μ_{n-1}^2 から次式のように求められる。

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha\mu_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2, \quad (16)$$

$$\gamma + \alpha + \beta = 1. \quad (17)$$

ここで、GARCH(1,1) の (1,1) は σ_n^2 が最も近い株式リターンの観測データから得られる μ_{n-1}^2 と最も近い分散の推定値 σ_{n-1}^2 から得られることを示している。よって、一般には、GARCH(p,q) モデルとなるが、本研究では最も単純な GARCH(1,1) モデルをボラティリティの予測モデルとして利用する。

2.4 デルタヘッジにおける株式売買コストとデルタヘッジ間隔

デルタヘッジにおいては、日々デルタが変動するため、この変動分だけ原資産株式を売買することになる。よって、デルタヘッジにより、コール・オプションの価値を株式と借入からなるポートフォリオで複製する場合には、現実的には株式を売買するコストも含めて考える必要がある。デルタヘッジの間隔をあげれば、デルタの変動分の調整を行う頻度が低下するために、

株式売買コストは低下するが、コール・オプションを複製する精度も低下するために、コール・オプションを売却したうえでデルタヘッジを行う取引の収益性の観点から、その間にトレードオフが働くと考えられる。

3. 本研究モデル

3.1 本研究モデルの目的

本研究モデルの目的は、主に次の3つである。

(1) 取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティの水準 σ_A を完全に正しく予測できた場合に、オプションを売却してデルタヘッジ（正しく予測できたボラティリティから計算したデルタに基づく）を行う取引によって利益をあげられるといえるかを検証すること。

2.2節で述べたように、オプション理論においては、デルタヘッジを連続的にを行い、かつデルタヘッジにおける株式売買コストを考慮しないと仮定されているため、インプライド・ボラティリティが、オプション満期までに実現する株式リターンのボラティリティ σ_A よりも大きい場合には、割高なコール・オプションを売却して、オプション満期までに実現する株式リターンのボラティリティから計算されるデルタ ($\frac{\partial f}{\partial S}$) に基づくデルタヘッジを行うことで確実に利益をあげることができる。しかし、現実にはデルタヘッジを連続的に行うことは不可能であるうえ、デルタヘッジにおける株式売買コストは必要になる。これらの影響を考慮した場合に、オプションを売却してデルタヘッジを行う取引によって利益をあげられるといえるかを検証することである。

(2) 取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティ σ_A がインプライド・ボラティリティ σ_I よりも高いか低いかは正しく予測できるが、 σ_A の水準までは予測できない場合に、オプションを売却してデルタヘッジ（何らかの情報や予測によるボラティリティから計算したデルタに基づく）を行う取引によって利益をあげられるといえるかを検証すること。

これは、(1)における取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティの水準 σ_A に関する情報の質が低下した場合において、オプションを売却してデルタヘッジを行う取引により利益があがるかどうかの検証を試みるものである。

(3) (1), (2)における検証は、1つの割高なオプションを売却してデルタヘッジを行うという単一の取引に関するものである。3つめの目的は、この単一の取引を独立に複数回行った場合の平均の利益に関して、(1),

(2)と同様の検証を行うことである。これは、オプショントレードは、通常、複数の取引をかかえているため、それらの取引を平均して利益があがったといえるかどうかを分析するものである。

3.2 本研究モデル

本研究モデルは、オプションを売却してデルタヘッジを行ういかなるデルタヘッジ戦略にも適用可能であるが、ここでは特に、数値実験において示すヨーロッパ・コール・オプションを売却してデルタヘッジを行う場合に関して説明する。本研究モデルでは、ヨーロッパ・コール・オプション満期から30営業日前に売却して、満期までデルタヘッジを行うものとする。研究目的(1)に関するモデル

本モデルの手続きを以下に示す。

Step1

取引開始時点からオプション満期までの株式リターンから、株価が従う確率過程(1)のパラメータ μ, σ を推定する。ここで推定した σ が、完全に正しく予測できた株式リターンのボラティリティの水準 σ_A に相当する。

Step2

Step1で推定されたパラメータを用いた株価が従う確率過程(1)に基づいて、オプション満期までの30営業日に関する株価のサンプルパスを1,000本発生させる。

Step3

Step2において発生させた株価のサンプルパスごとにデルタヘッジを行い、そのデルタヘッジコストを求める。つまり、各デルタヘッジ時点においてStep1で求めた σ (σ_A に等しい) とその他の変数に基づいて式(15)からデルタを求める。求めたデルタが、1時点前のデルタよりも大きいならばその分だけ借入を増やして原資産株式を買い増し、1時点前のデルタよりも小さいならばその分だけ借入を減らして原資産株式を売却することになる。

Step4

Step3により、1,000通りのデルタヘッジコストが得られる。これが、デルタヘッジの収益性に関する検証に用いる現実のデルタヘッジコストの分布となる(図2を参照)。

Step5

(♣) 割高なヨーロッパ・コール・オプションを売却してデルタヘッジを行ってもその収益はプラスにならない確率を導出する(ここでは α 値と呼ぶことにする)。4章の数値実験ではこの α 値が20%, 10%, 5%の水準に収まるかどうかを検証する。

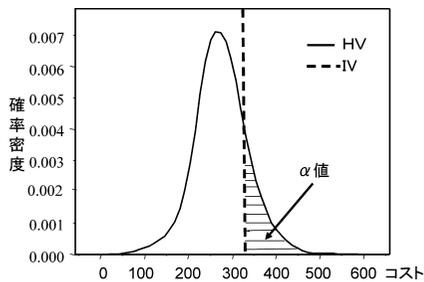


図2 シミュレーション結果 (HV) の分布と IV の位置関係

Fig.2 The distribution of the hedging cost based on our simulation model and the α -value used in our verification.

研究目的 (2) に関するモデル

研究目的 (2) に関するモデルは、基本的に研究目的 (1) に関するモデルと同じであるが、Step3 のデルタを求める際に用いるボラティリティが異なる。研究目的 (1) に関するモデルは、取引開始時点からオプション満期までの株式リターンボラティリティの水準 σ_A を完全に正しく予測できたと仮定したモデル (現実には不可能である) であるため、Step1 で推定したボラティリティ σ_A を用いてデルタを求めた。研究目的 (2) に関するモデルは、 σ_A の水準までは予測できない場合のモデルであり、オプション・トレーダはデルタを求める際に用いるボラティリティとして、何らかの情報や予測によるボラティリティを利用することになる。ここでは、オプション・トレーダは、日々のデルタヘッジ時点で利用可能な何らかの情報として各時点においてオプション市場で観測されるインプライド・ボラティリティ、予測によるボラティリティとして 2.3 節で示した GARCH(1,1) モデルから予測されるボラティリティ、の 2 通りのボラティリティから求められるデルタについて、Step3 を行うことにする。よって、研究目的 (1) のモデルに対して研究目的 (2) のモデルでは現実的な設定に近いものとなっている。デルタヘッジ回数とデルタヘッジにおける株式売買コストの影響

研究目的 (1), (2) に関するモデルにおいて、デルタヘッジ間隔とデルタヘッジにおける株式売買コストが検証結果に及ぼす影響を確認するため、デルタヘッジ間隔は、1 営業日、2 営業日、3 営業日の 3 通り、株式売買コストに関しては、コストがかからない場合と 1 単位あたり 0.5% のコストがかかる場合の 2 通り、の組合せ 6 通りに関して検証を行う。

研究目的 (3) に関するモデル

研究目的 (1) に関するモデルにおける Step4 の現実のデルタヘッジコストに関する分布を表現す

る確率変数を平均 $E(X)$ 、分散 $V(X)$ の正規分布 $N(E(X), V(X))$ を表現する確率変数 X を用いて近似する。これにより、同じ取引を n 回行う場合に利益の平均を表す確率変数 X/n の従う確率分布が容易に求められ、平均 $E(X)$ 、分散 $V(X)/n$ の正規分布 $N(E(X), V(X)/n)$ となる。研究目的 (2) に関するモデルについても、このような利益の平均の分布を求めたうえで、検証を行う。

4. 数値実験

4.1 実験に用いるデータ

本研究モデルの数値実験の対象となるオプションは、2004 年 1 月から 5 月までの各限月のヨーロピアン・コール・オプションであり、各限月のヨーロピアン・コール・オプションとしては、オプション売却日においてイン・ザ・マネー (権利行使価格がアット・ザ・マネーよりも 500 円低い)、アット・ザ・マネー、アウト・オブ・ザ・マネー (権利行使価格がアット・ザ・マネーよりも 500 円高い) の 3 種類を取りあげる。

3.2 節の冒頭で述べたように、各限月のヨーロピアン・コール・オプションを満期から 30 営業日前に売却して、満期までデルタヘッジを行う戦略の収益の分布を描くのであるが、デルタを式 (15) から算出するためのボラティリティとしては、3 種類がある。1 つは、研究目的 (1) に関するモデルの Step1 で推定するオプション満期までに実現する株式リターンボラティリティ σ_A (図表上では HV と表記) である。2 つめは、各デルタヘッジ時点で推定される GARCH ボラティリティであるが、GARCH ボラティリティの推定式 (16), (17) におけるパラメータは、各限月のオプション売却時点から 5 年間遡った日次データに基づいて S-plus を用いて推定した。3 つめは、各時点におけるインプライド・ボラティリティ (図表上では IV (変動 (\cdot)) と表記) であり、これは、各時点においてオプション市場から観測されるものであるから、オプションの種類 (イン・ザ・マネー、アット・ザ・マネー、アウト・オブ・ザ・マネー) によって異なる。2 つめと 3 つめのボラティリティは、研究目的 (2) に関するモデルで利用されるボラティリティである。

図 3, 図 4, 図 5, 図 6, 図 7 には、それぞれ、2004 年 1 月から 5 月までの各限月に関する各種ボラティリティを図示した。各図における IV [固定 (ATM)] は、売却したアット・ザ・マネー・オプションのインプライド・ボラティリティの水準 (売却時点の水準) を示したものである。2.2 節の最後で述べたように、デルタヘッジ戦略による利益の大きさは、ボラティリティ

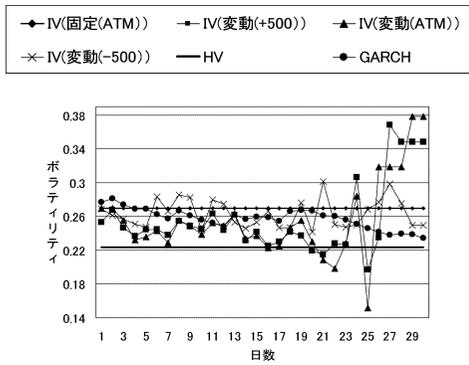


図 3 1 月限月に関するボラティリティの水準

Fig. 3 The level of volatilities in January 2004 contract.

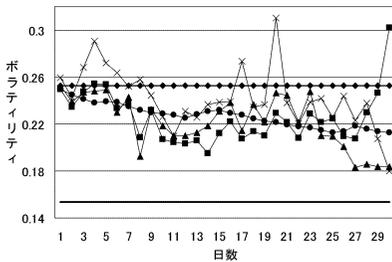


図 4 2 月限月に関するボラティリティの水準

Fig. 4 The level of volatilities in February 2004 contract.

を σ_I としたときのコール・オプション価格からボラティリティを σ_A としたときのコール・オプション価格を差し引いた額である。よって、図 3 から図 7 の各図における IV〔固定(ATM)〕が HV よりも大きければ大きいほど、研究目的 (1) に関するモデルに基づく検証では、割高なヨーロッパン・コール・オプションを売却してデルタヘッジを行えば、その収益はプラスになるとの結論が得られるはずである。

図 3 から図 7 のボラティリティに関して主な点を 3 つまとめておく。(I) IV〔固定(ATM)〕と HV との乖離は、2月に最も大きく(10%)、次に4月, 3月, 1月(8%, 7%, 5%), となり, 5月は1%と乖離はほとんどなかった。(II) 各時点におけるインプライド・ボラティリティは、イン・ザ・マネー、アット・ザ・マネー、アウト・オブ・ザ・マネーのいずれに関しても同様の動きを示しており、その水準は、HV よりも IV (固定(ATM)) に近い。(III) GARCH ボラティリティの推移の傾向は、インプライド・ボラティリティに似ているが、水準は幾分異なる。3月から5月のいずれの限月においても、インプライド・ボラティリティの水準よりも低くなっており、特に、5月限月では、図示した5つのボラティリティの中で最も低くなっている。

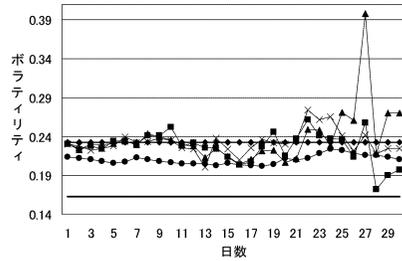


図 5 3 月限月に関するボラティリティの水準

Fig. 5 The level of volatilities in March 2004 contract.

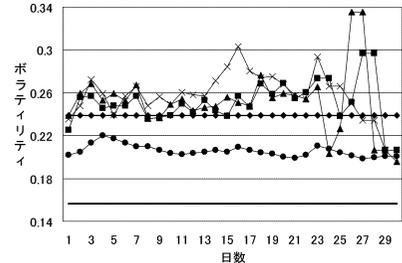


図 6 4 月限月に関するボラティリティの水準

Fig. 6 The level of volatilities in April 2004 contract.

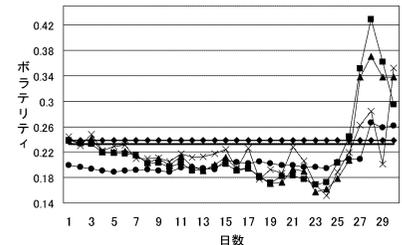


図 7 5 月限月に関するボラティリティの水準

Fig. 7 The level of volatilities in May 2004 contract.

4.2 実験結果と考察

2004年1月から5月までの各限月における3種類のヨーロッパン・コール・オプション(イン・ザ・マネー(権利行使価格がアット・ザ・マネーよりも500円低い), アット・ザ・マネー, アウト・オブ・ザ・マネー(権利行使価格がアット・ザ・マネーよりも500円高い))を売却してデルタヘッジを行った場合について、研究目的(1), (2)に関するモデルに基づく検証結果を表1, 表2, 表3, 表4, 表5, 表6に示した。各表の印は α 値が該当水準に収まったこととし、×印は収まらなかったことを表す。研究目的(1)に関するモデルに基づく検証結果を表1から表6の検証(HV)に、研究目的(2)に関するモデルに基づく検証結果を表1から表6の検証(GARCH), 検証(IV変)に示した。表1から表3は、デルタヘッジに際する株式の売買コストがかからない場合に、ヘッジ間隔

表 1 ヘッジ間隔 1 営業日，コスト 0%のときの検証結果

Table 1 The verification result of the profits (1day hedging interval, trading cost 0%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (HV)			検証 (GARCH)			検証 (IV 変)				
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV (変)	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%		
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	13%	69%	62%		x	x		x	x	x	x	x	x	
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	44%	56%					x	x	x	x	x	x	
	Mar-04	23%	16%	7%	2%	52%	71%					x	x	x	x	x	x	
	Apr-04	24%	16%	8%	12%	83%	82%			x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	46%	11%	63%	x	x	x			x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	30%	84%	61%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	46%	48%				x	x	x	x	x	x	x	
	Mar-04	23%	16%	7%	3%	40%	70%				x	x	x	x	x	x	x	
	Apr-04	24%	16%	8%	4%	49%	79%				x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	48%	10%	65%	x	x	x			x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	20%	76%	50%		x	x	x	x	x	x	x	x	x	
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	43%	50%				x	x	x	x	x	x	x	
	Mar-04	23%	16%	7%	3%	37%	61%				x	x	x	x	x	x	x	
	Apr-04	23%	16%	7%	5%	55%	76%			x		x	x	x	x	x	x	
	May-04	24%	23%	1%	46%	9%	63%	x	x	x			x	x	x	x	x	

表 2 ヘッジ間隔 2 営業日，コスト 0%のときの検証結果

Table 2 The verification result of the profits (2days hedging interval, trading cost 0%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (HV)			検証 (GARCH)			検証 (IV 変)			
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV (変)	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%	
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	19%	29%	56%		x	x		x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	36%	54%					x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	5%	54%	62%					x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	18%	67%	76%			x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	42%	30%	54%	x	x	x			x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	31%	40%	55%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	39%	47%				x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	5%	47%	58%				x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	8%	46%	74%			x		x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	45%	31%	56%	x	x	x			x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	25%	34%	48%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	38%	45%				x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	5%	53%	57%				x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23%	16%	7%	8%	52%	70%			x		x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	45%	35%	64%	x	x	x			x	x	x	x	x

表 3 ヘッジ間隔 3 営業日，コスト 0%のときの検証結果

Table 3 The verification result of the profits (3days hedging interval, trading cost 0%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (HV)			検証 (GARCH)			検証 (IV 変)			
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV (変)	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%	
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	23%	66%	63%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	1%	53%	61%				x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	9%	57%	65%			x		x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	23%	74%	81%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	47%	31%	63%	x	x	x			x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	36%	71%	49%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	48%	49%				x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	8%	49%	61%			x		x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	13%	52%	72%			x		x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	48%	29%	61%	x	x	x			x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	29%	69%	60%	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	1%	47%	49%				x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	7%	53%	55%			x		x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23%	16%	7%	13%	56%	70%			x		x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	47%	32%	47%	x	x	x			x	x	x	x	x

をそれぞれ 1 営業日，2 営業日，3 営業日としたものである。表 4 から表 6 は，デルタヘッジに際する株式の売買コストが通常想定される水準である 0.5% かかる場合に，ヘッジ間隔をそれぞれ 1 営業日，2 営業

日，3 営業日としたものである。各図には，参照の便宜のため取引開始日の VOL として，図 3 から図 7 の各図における IV [固定 (ATM)] と HV の水準を掲載した。また，α 値は先に述べたとおり，シミュレー

表 4 ヘッジ間隔 1 営業日，コスト 0.5%のときの検証結果

Table 4 The verification result of the profits (1day hedging interval, trading cost 0.5%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (HV)			検証 (GARCH)			検証 (IV 変)		
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV (変)	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	94%	100%	99%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	31%	99%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	87%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	100%	100%	97%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	99%	94%	98%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	98%	100%	90%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	26%	99%	99%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	67%	99%	95%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	90%	100%	97%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	99%	91%	91%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	84%	100%	96%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	18%	95%	97%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	41%	98%	99%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23%	16%	7%	72%	100%	99%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	99%	74%	89%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

表 5 ヘッジ間隔 2 営業日，コスト 0.5%のときの検証結果

Table 5 The verification result of the profits (2days hedging interval, trading cost 0.5%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (HV)			検証 (GARCH)			検証 (IV 変)		
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV (変)	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	75%	74%	93%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	16%	87%	93%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	64%	94%	96%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	98%	97%	92%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	89%	82%	94%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	79%	78%	85%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	11%	82%	87%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	43%	90%	90%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	65%	89%	95%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	87%	79%	87%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	64%	71%	83%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	9%	79%	83%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	25%	88%	90%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23%	16%	7%	53%	88%	94%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	83%	75%	77%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

表 6 ヘッジ間隔 3 営業日，コスト 0.5%のときの検証結果

Table 6 The verification result of the profits (3days hedging interval, trading cost 0.5%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (HV)			検証 (GARCH)			検証 (IV 変)		
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV (変)	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	46%	80%	79%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	3%	72%	79%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	28%	77%	84%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	53%	88%	90%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	67%	52%	80%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	61%	83%	68%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	5%	69%	71%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	27%	71%	79%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	36%	74%	88%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	70%	52%	76%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	48%	80%	75%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	5%	68%	67%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23%	16%	7%	18%	72%	76%		x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23%	16%	7%	37%	74%	82%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	67%	54%	68%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

ションモデルにおいて割高なヨーロッパ・コール・オプションを売却してデルタヘッジを行っても，その収益がプラスにならない確率である。

研究目的 (1) に関するモデルに基づく主な検証結果

と考察をまとめておく。(I) 表 1 から表 3 にあるデルタヘッジに際する株式の売買コストがかからない場合には，ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って，デルタヘッジの効率が低下し，利益の分

布の標準偏差が大きくなるため、(♣)に基づいた検証では、 α 値が 20%、10%、5%の各水準に収まらないケースが現れる。(II) 表 1 と表 4、表 2 と表 5、表 3 と表 6、とをそれぞれ比較すると、当然のことではあるが、いずれのヘッジ間隔においても、デルタヘッジに際する株式の売買コストがかかる場合の方がからない場合よりも、検証結果が×となる場合が多くなる。(III) 表 4 から表 6 にあるデルタヘッジに際する株式の売買コストがかかる場合には、ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従い、(♣)に基づいた検証において α 値が 20%、10%、5%の各水準に収まる場合が増加する。これは、ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って、デルタヘッジの効率が低下し利益の分布の標準偏差が大きくなる影響よりも、ヘッジ間隔が長くなることによりデルタヘッジに際する株式の売買コストが低くおさえられる効果の方が強く現れることを示している。

次に、研究目的 (2) に関するモデルに基づく主な検証結果と考察をまとめておく。(I) デルタヘッジを行う際のデルタを求めるために用いるボラティリティとして GARCH ボラティリティを利用する場合に検証結果が 印となったのは、5 月限月の〔水準 20% (全種類)、水準 10% (OTM)〕のみである。しかも、これは偶然であることに注意する必要がある。4.1 節に示したように、5 月限月では、GARCH ボラティリティは図示した 5 つのボラティリティの中で最も低くなっているが、必ずしも HV を的確に予測できているとはいえないからである。(II) デルタヘッジを行う際のデルタを求めるために用いるボラティリティとして各時点のインプライドボラティリティを利用する場合には、すべてのケースにおいて検証結果は 印とはならなかった。これは、4.1 節 (II) において指摘したように、各時点におけるインプライド・ボラティリティの水準は、HV よりも売却したヨーロピアン・コール・オプションの IV〔固定 (ATM)〕に近いから、このようなボラティリティを利用して求めたデルタを用いるとデルタヘッジコストが売却したオプション価格とそれほど変わらなくなるからである。(III) 研究目的 (2) に関するモデルに基づく検証結果の総括としては、オプションを売却してデルタヘッジを行うことで利益を得るためには、デルタを求めるためのボラティリティとして、GARCH ボラティリティや各時点のインプライド・ボラティリティを直接利用することは有益とはいえず、何らかの方法で、取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティの水準 σ_A をある程度正しく予測することが重要であることが分

かった。

研究目的 (3) に関するモデルに基づく検証結果を、先と同様に表 7、表 8、表 9、表 10、表 11、表 12 に示した。ここでの検証は、同じ取引を n 回行う場合の利益の平均を表す確率変数 X/n が従う確率分布に基づくものであるが、 n 回として、10 回、50 回、100 回の 3 通りの場合に関する結果を示した。同じ取引を n 回行う場合の利益の平均を表す確率変数 X/n が従う確率分布を求めるに際しては、計算を簡便にするため、研究目的 (1) に関するモデルにおける Step4 の現実のデルタヘッジコストに関する分布を表現する確率変数 X が正規分布に従うものと仮定した。この仮定の精度を視覚化して見るために、図 8 と図 9 には、それぞれ、デルタヘッジに際して株式の売買コストがからない場合とかかる場合について、5 月限月のアット・ザ・マネーに関するデルタヘッジコストの分布とその分布を正規分布で近似したものを掲載した。正規分布による近似を用いてもそれほど大きな近似誤差は確認されなかった。表 7 から表 9 は、デルタヘッジに際する株式の売買コストがかからない場合に、ヘッジ間隔をそれぞれ 1 営業日、2 営業日、3 営業日としたものである。表 10 から表 12 は、デルタヘッジに際する株式の売買コストが通常想定される水準である 0.5% かかる場合に、ヘッジ間隔をそれぞれ 1 営業日、2 営業日、3 営業日としたものである。各図における、取引開始日の VOL と α 値は、先の表 1 から表 6 と同様である。

研究目的 (3) に関するモデルに基づく主な検証結果と考察をまとめておく。(I) 表 1 と表 7、表 2 と表 8、表 3 と表 9、表 4 と表 10、表 5 と表 11、表 6 と表 12、をそれぞれ比較することにより、いずれの場合においても、検証結果が 印となる場合が増加する。これは、同じ取引を n 回行う場合には、利益の平均を表す確率変数 X/n の従う確率分布の分散が $V(X)/n$ となるため、検証に用いる α 値が小さくなるからである。(II) 取引が 1 回のみを表 1 から表 3 においては、研究目的 (1) に関するモデルに基づく主な検証結果と考察の (I) でみたように、デルタヘッジに際する株式の売買コストがかからない場合には、ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って、デルタヘッジの効率が低下し、利益の分布の標準偏差が大きくなるため、検証結果が×印となる場合が現れた。しかし、取引回数が 10 回以上であれば、表 7 から表 9 が示すようにヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くしても検証結果に大差はない。これは、取引回数が 10 回以上になると、利益の分布の標準偏差が検証結果に

表 7 ヘッジ間隔 1 営業日，コスト 0%のときの各取引回数に関する検証結果
 Table 7 The verification result when the number of trades is 10, 50, and 100
 (1day hedging interval, trading cost 0%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (n=10)			検証 (n=50)			検証 (n=100)		
		IV	HV	IV-HV	n=10	n=50	n=100	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	0%	0%	0%									
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	1%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	37%	22%	14%	x	x	x	x	x	x			x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	8%	0%	0%			x						
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	0%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	47%	44%	42%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	2%	0%	0%									
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	44%	37%	31%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

表 8 ヘッジ間隔 2 営業日，コスト 0%のときの各取引回数に関する検証結果
 Table 8 The verification result when the number of trades is 10, 50, and 100
 (2days hedging interval, trading cost 0%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (n=10)			検証 (n=50)			検証 (n=100)		
		IV	HV	IV-HV	n=10	n=50	n=100	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	1%	0%	0%									
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	1%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	29%	11%	4%	x	x	x		x	x			
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	9%	0%	0%			x						
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	0%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	35%	19%	11%	x	x	x		x	x			x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	4%	0%	0%									
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	36%	20%	12%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

表 9 ヘッジ間隔 3 営業日，コスト 0%のときの各取引回数の変化に関する検証結果
 Table 9 The verification result when the number of trades is 10, 50, and 100
 (3day hedging interval, trading cost 0%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (n=10)			検証 (n=50)			検証 (n=100)		
		IV	HV	IV-HV	n=10	n=50	n=100	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	2%	0%	0%									
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	4%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	35%	19%	10%	x	x	x		x	x			x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	17%	2%	0%			x	x					
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	0%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	42%	32%	25%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	7%	0%	0%			x						
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	Apr-04	23%	16%	7%	0%	0%	0%									
	May-04	24%	23%	1%	37%	22%	14%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

影響を与えないくらい小さくなっていることが考えられる。(III) 表 10 から表 12 にあるデルタヘッジに際する株式の売買コストがかかる場合には、ヘッジ間隔を

1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って、検証結果が 印となる場合が急速に増加する。これは、(II) で見たように、取引回数が 10 回以上であれば、ヘッ

表 10 ヘッジ間隔 1 営業日, コスト 0.5%のときの各取引回数の変化に関する検証結果
Table 10 The verification result when the number of trades is 10, 50, and 100
(1day hedging interval, trading cost 0.5%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (n=10)			検証 (n=50)			検証 (n=100)		
		IV	HV	IV-HV	n=10	n=50	n=100	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	10%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	3%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	96%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	54%	59%	62%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23%	16%	7%	99%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

表 11 ヘッジ間隔 2 営業日, コスト 0.5%のときの各取引回数の変化に関する検証結果
Table 11 The verification result when the number of trades is 10, 50, and 100
(2days hedging interval, trading cost 0.5%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (n=10)			検証 (n=50)			検証 (n=100)		
		IV	HV	IV-HV	n=10	n=50	n=100	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	98%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	90%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	99%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	36%	21%	12%	x	x	x	x	x	x		x	x
	Apr-04	24%	16%	8%	92%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	91%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	9%	0%	0%			x						
	Apr-04	23%	16%	7%	74%	93%	98%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	100%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

表 12 ヘッジ間隔 3 営業日, コスト 0.5%のときの各取引回数の変化に関する検証結果
Table 12 The verification result when the number of trades is 10, 50, and 100
(3days hedging interval, trading cost 0.5%).

行使価格帯	限月	取引開始日の Vol			α 値			検証 (n=10)			検証 (n=50)			検証 (n=100)		
		IV	HV	IV-HV	n=10	n=50	n=100	20%	10%	5%	20%	10%	5%	20%	10%	5%
ATM-500	Jan-04	27%	22%	5%	38%	24%	16%	x	x	x	x	x	x		x	x
	Feb-04	26%	15%	11%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	5%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	70%	88%	95%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	91%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25%	22%	2%	80%	97%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	3%	0%	0%									
	Apr-04	24%	16%	8%	15%	1%	0%		x	x						
	May-04	24%	23%	1%	94%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
ATM+500	Jan-04	25%	22%	3%	57%	64%	70%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25%	15%	10%	0%	0%	0%									
	Mar-04	23%	16%	7%	1%	0%	0%									
	Apr-04	23%	16%	7%	20%	3%	0%	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24%	23%	1%	90%	100%	100%	x	x	x	x	x	x	x	x	x

ジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くすることによるデルタヘッジの効率の低下が限定的だったのに対して、ヘッジ間隔が長くなることによりデルタヘッジに

際する株式の売買コストが低くおさえられる効果が強く影響したためと考えられる。

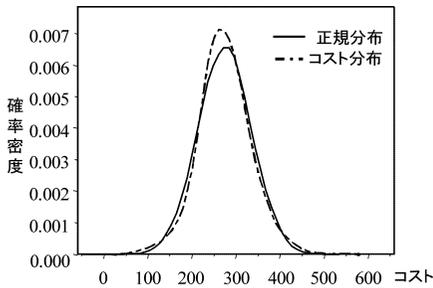


図 8 ヘッジコストの分布と近似正規分布 (2004/5 月限月, ATM, ヘッジ間隔 1 営業日, コスト 0%)

Fig. 8 The simulated distribution and the normal distribution approximating the hedging cost (May 2004 contract, 1day At The Money hedging interval, trading cost 0%).

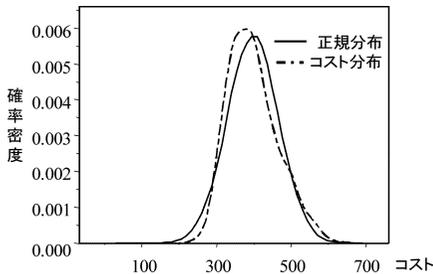


図 9 ヘッジコストの分布と近似正規分布 (2004/5 月限月, ATM, ヘッジ間隔 1 営業日, コスト 0.5%)

Fig. 9 The simulated distribution and the normal distribution approximating the hedging cost (May 2004 contract, 1day At The Money hedging interval, trading cost 0.5%).

5. まとめと結語

本研究では、オプションのデルタヘッジ戦略において、理論的には収益があがる取引を行っているにもかかわらず損失が発生するメカニズムを明らかにするために、デルタヘッジの効率性に着目したシミュレーションモデルを提案したうえで、実データに基づいて検証を試みた。提案モデルに基づく検証結果としては、オプションを売却してデルタヘッジを行うことで利益を得るためには、デルタを求めるためのボラティリティとして、GARCH ボラティリティや各時点のインプライド・ボラティリティを直接利用するのは有益でなく、何らかの方法で、取引開始時点からオプション満期までの株式リターンボラティリティの水準 σ_A に関するある程度正しい予測が重要であることが分かった。その予測が正しいならば、本検証実験でとりあげたオプションの種類やパラメータセットに関しては、取引回数を 10 回程度以上行うことで、理論どおりほぼ確実に利益が得られるという結果を得た。また、ヘッジ間

隔が検証結果に与える影響を分析したところ、ヘッジ間隔を長くすることによる利益分布の標準偏差の増大よりも、ヘッジ間隔が長くなることによりデルタヘッジにおける株式売買コストの低下のほうが分析結果に強く現れることが分かった。

参考文献

- 1) Black, F. and Scholes, M.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol.81, pp.637-659 (1973).
- 2) 淵江哲郎：日経平均株価オプションのダイナミック・ヘッジング, 日本経営財務研究学会第 26 回全国大会第 8 セッション第 2 報告書 (2002).
- 3) 刈屋武昭, 矢島美寛, 田中勝人, 竹内 啓：時系列の統計—その数理的基礎, 岩波書店 (2003).
- 4) Bollerslev, T.: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol.31, pp.307-327 (1986).
- 5) Engle, R. and Kroner, K.: Multivariate Simultaneous Generalized ARCH, *Econometric Theory*, Vol.11, pp.122-150 (1993).
- 6) Baillie, R.R.: Bivariate GARCH Estimation of the Commodity Futures Hedge, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.6, pp.109-124 (1991).
- 7) Bera, A.K., Garcia, P. and Roh, J.-S.: Estimation of Time-Varying Hedge Ratios for Corn and Soybeans: BGARCH and Random Coefficient Approaches, *Economics Working Paper Archive at WUSTL*, pp.97-106 (1997).
- 8) Myers, R.: Estimating timevarying optimal hedge ratios on futures markets, *Econometric Theory*, Vol.11, pp.39-53 (1991).
- 9) Kroner, K.F. and Sultan, J.: Time-varying distributions and dynamic hedging with foreign currency futures, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol.28, pp.535-551 (1993).
- 10) Gagnon, L. and Lypny, G.: Hedging short term interest risk under time varying distributions, *Journal of Futures Markets*, Vol.15, pp.767-783 (1995).
- 11) Park, T. and Switzer, N.: Bivariate GARCH estimation of the optimal hedge ratios for stock index futures, *A note, Journal of Futures Markets*, Vol.15, pp.61-67 (1995).
- 12) Tong, W.: An examination of dynamic hedging, *Journal of International Money and Finance*, Vol.15, pp.19-35 (1996).
- 13) 程島次郎, 芦谷政浩：東証株式指数の時変ヘッジ比率の推定, *オイコノミカ*, Vol.3-4, No.6, pp.1-17 (2003).
- 14) Hull, J.C.: *Options, Futures and Other Derivatives 4th edition*, Prentice Hall, Upper

Saddle River, NJ (2000).

(平成 16 年 11 月 16 日受付)
(平成 16 年 12 月 23 日再受付)
(平成 17 年 1 月 24 日採録)



矢萩 一樹

昭和 57 年生。平成 16 年電気通信大学電気通信学部卒業。同年電気通信大学大学院電気通信学研究科修士課程に入学。金融工学において実証ファイナンス分析に興味を持つ。



宮崎 浩一

昭和 42 年生。平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了。博士(経営学)。ゴールドマン・サックス証券会社(金融戦略部長)。電気通信大学システム工学科専任講師等を経て、平成 15 年度から電気通信大学システム工学科助教授。現在に至る。日本オペレーションズ・リサーチ学会, JAFEE, 日本応用数理学会等, 各会員。